

TRAITEMENT STATISTIQUE DU SIGNAL SPECTROMÉTRIQUE :  
Etude du désempilement de spectre en énergie pour la spectrométrie  $\gamma$

Thomas Trigano  
Rapport de Thèse

22 janvier 2006

*It isn't for the money,  
No it isn't for the fun,  
It's a plan, a scam, a diagram  
It's for the benefit of everyone.*

NoFX, « The Cause », 1996.

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| Remerciements   | xi        |
| Résumé  | xiii      |
| Abstract  | xv        |
| Notations usuelles  | xvii      |
| <b>1 Introduction – Description du problème</b>                                       | <b>1</b>  |
| 1.1 Introduction à la spectrométrie . . . . .   | 2         |
| 1.1.1 Définition et objectifs de la spectrométrie $\gamma$ . . . . .                  | 2         |
| 1.2 Interprétation de l’allure des spectres en énergie . . . . .                      | 3         |
| 1.2.1 Rappels de physique atomique . . . . .  | 3         |
| 1.2.2 Les interactions photons-matière . . . . .                                      | 4         |
| 1.2.3 Distortions du spectre liées à la physique du détecteur . . . . .               | 7         |
| 1.2.4 Premier bilan . . . . .   | 8         |
| 1.3 Le problème des empilements d’impulsions . . . . .                                | 9         |
| 1.4 État de l’art . . . . .   | 12        |
| 1.4.1 Méthodes physiques proposées pour le traitement d’empilements . . . . .         | 12        |
| 1.4.2 Méthodes physiques proposées pour la correction du taux de comptage . . . . .   | 14        |
| 1.4.3 Cadre mathématique du problème : l’analogie avec la théorie des files d’attente | 17        |
| 1.5 Apports de la thèse . . . . .   | 18        |
| 1.5.1 Problématique . . . . .   | 18        |
| 1.5.2 Méthodes proposées et résultats obtenus . . . . .                               | 18        |
| 1.5.3 Plan de la thèse . . . . .  | 20        |
| 1.6 Publications . . . . .  | 21        |
| 1.6.1 Articles de revue — Articles de journaux . . . . .                              | 21        |
| 1.6.2 Brevet . . . . .  | 21        |
| 1.6.3 Articles de conférence avec comité de lecture . . . . .                         | 21        |
| 1.6.4 Rapports Techniques . . . . .   | 21        |
| <b>2 Traitement probabiliste des empilements d’impulsions</b>                         | <b>23</b> |
| 2.1 Description du modèle — Premières propriétés . . . . .                            | 23        |
| 2.1.1 Modélisation d’une impulsion photonique . . . . .                               | 24        |
| 2.1.2 Modélisation d’une séquence d’occupation . . . . .                              | 25        |
| 2.1.3 Premières propriétés . . . . .  | 26        |
| 2.2 Formule de désempilement à temps continu . . . . .                                | 33        |
| 2.2.1 Choix de la grandeur d’intérêt . . . . .  | 33        |
| 2.2.2 Détermination de la loi d’un cycle . . . . .                                    | 33        |
| 2.2.3 Calcul de $\rho(x, y)$ à l’aide des séquences <i>busy</i> . . . . .             | 35        |
| 2.2.4 Calcul de $\rho(x, y)$ à l’aide des impulsions photoniques . . . . .            | 36        |
| 2.3 Formule de désempilement à temps discret . . . . .                                | 39        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.3.1    | Description du modèle discret . . . . .                                   | 39        |
| 2.3.2    | Établissement de la formule de désempilement discret . . . . .            | 42        |
| 2.4      | Conclusion . . . . .  | 46        |
| <b>3</b> | <b>Estimation non-paramétrique pour le désempilement</b>                  | <b>47</b> |
| 3.1      | Rappel et nouvelles hypothèses . . . . .                                  | 48        |
| 3.1.1    | Modèle pour le désempilement à temps continu . . . . .                    | 48        |
| 3.1.2    | Notations et hypothèses supplémentaires . . . . .                         | 48        |
| 3.2      | Lemmes techniques . . . . .   | 49        |
| 3.3      | Description des estimateurs . . . . .                                     | 51        |
| 3.3.1    | Description de l'estimateur « naïf » . . . . .                            | 51        |
| 3.3.2    | Problèmes liés à l'estimateur naïf . . . . .                              | 52        |
| 3.3.3    | Méthodologie — Description de l'estimateur final . . . . .                | 54        |
| 3.3.4    | Remarques finales sur la construction de l'estimateur . . . . .           | 58        |
| 3.4      | Etude théorique de l'estimateur . . . . .                                 | 58        |
| 3.4.1    | Etude des termes aléatoires . . . . .                                     | 58        |
| 3.4.2    | Performances de l'estimateur final au sens de l'ISE . . . . .             | 60        |
| 3.4.3    | Consistance et vitesses de convergence . . . . .                          | 65        |
| 3.5      | Conclusion . . . . .  | 68        |
| <b>4</b> | <b>Résultats numériques</b>   | <b>69</b> |
| 4.1      | Notations et protocole expérimental . . . . .                             | 70        |
| 4.1.1    | Choix des paramètres et des densités de probabilité initiaux . . . . .    | 70        |
| 4.1.2    | Préliminaire : élimination de l'estimateur naïf . . . . .                 | 72        |
| 4.1.3    | Influence des paramètres sur l'algorithme (A2) . . . . .                  | 72        |
| 4.2      | Résultats sur données simulées . . . . .                                  | 72        |
| 4.2.1    | Résultats sur l'estimateur naïf . . . . .                                 | 72        |
| 4.2.2    | Influence des paramètres . . . . .  | 73        |
| 4.2.3    | Résultats sur la densité (D4) . . . . .                                   | 76        |
| 4.3      | Description du système ADONIS . . . . .                                   | 77        |
| 4.3.1    | Limites du filtrage adapté . . . . .                                      | 77        |
| 4.3.2    | Description du systèmes ADONIS . . . . .                                  | 80        |
| 4.4      | Résultats sur données réelles . . . . .                                   | 85        |
| 4.4.1    | Remarque préliminaire . . . . .   | 86        |
| 4.4.2    | Résultats obtenus par l'algorithme (A2) . . . . .                         | 86        |
| 4.4.3    | Résultats obtenus par l'algorithme (A3) . . . . .                         | 88        |
| 4.5      | Discussion . . . . .  | 88        |
| 4.5.1    | Interprétation des résultats sur simulations . . . . .                    | 88        |
| 4.5.2    | Interprétation des résultats sur données réelles . . . . .                | 89        |
| 4.6      | Conclusion . . . . .  | 92        |
| <b>5</b> | <b>Conclusion et perspectives</b>   | <b>93</b> |
| <b>A</b> | <b>Algorithme de désempilement à temps discret</b>                        | <b>97</b> |
| A.1      | Abrégé descriptif . . . . .   | 97        |
| A.2      | Description de l'invention . . . . .                                      | 98        |
| A.2.1    | Effet Compton et bruit de mesure . . . . .                                | 98        |
| A.2.2    | Empilements d'impulsions . . . . .  | 99        |
| A.3      | État de l'art . . . . .   | 100       |
| A.4      | Description de la méthode . . . . .                                       | 101       |
| A.4.1    | Première étape : Recherche des coefficients d'une série entière . . . . . | 106       |
| A.4.2    | Deuxième étape : Identification des coefficients . . . . .                | 107       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| A.5      | Revendications du brevet . . . . .   | 110        |
| A.6      | Références bibliographiques . . . . .  | 111        |
| A.7      | Figures . . . . .  | 112        |
| <b>B</b> | <b>Inversion numérique de la transformée de Laplace</b>                        | <b>119</b> |
| B.1      | Transformée de Laplace de mesures positives et de fonctions . . . . .          | 119        |
| B.2      | Propriétés usuelles de la transformée de Laplace . . . . .                     | 120        |
| B.2.1    | Propriétés de linéarité . . . . .  | 120        |
| B.2.2    | Propriétés d'échelle et de translation . . . . .                               | 121        |
| B.2.3    | Dérivabilité, intégrabilité et convolution . . . . .                           | 121        |
| B.2.4    | Théorème taubérien . . . . .   | 122        |
| B.3      | Inversion théorique de la transformée de Laplace . . . . .                     | 123        |
| B.3.1    | Inversion théorique de la transformée de Laplace d'une mesure . . . . .        | 123        |
| B.3.2    | Inversion théorique de la transformée de Laplace d'une fonction . . . . .      | 124        |
| B.4      | Méthodes usuelles d'inversion numérique de la transformée de Laplace . . . . . | 125        |
| B.5      | Inversion numérique par FFT . . . . .  | 125        |
| B.5.1    | Description de la méthode . . . . .  | 125        |
| B.5.2    | Implémentation pratique de la méthode de Fourier . . . . .                     | 126        |
| <b>C</b> | <b>Élimination du bruit additif pour les histogrammes 2D</b>                   | <b>127</b> |
| C.1      | Problématique . . . . .  | 127        |
| C.1.1    | Exemples introductifs . . . . .  | 128        |
| C.2      | Méthode de débruitage par gradients multiplicatifs . . . . .                   | 129        |
| C.2.1    | Modélisation et résultats . . . . .  | 129        |
| C.2.2    | Initialisation . . . . .   | 129        |
| C.3      | Simulations sur des signaux synthétiques . . . . .                             | 130        |
| <b>D</b> | <b>Nonparametric inference about photon energy</b>                             | <b>133</b> |
| D.1      | Introduction . . . . .   | 133        |
| D.2      | Notations and main assumptions . . . . .                                       | 135        |
| D.3      | Inversion formula and estimation . . . . .                                     | 136        |
| D.4      | Main result . . . . .  | 139        |
| D.5      | Decomposition of the error . . . . .   | 140        |
| D.6      | Applications — Discussion . . . . .  | 143        |
| D.7      | Proof of Theorem D.5.1 . . . . .   | 146        |
| D.8      | Proof of the Theorem D.4.1 . . . . .   | 148        |
| D.9      | Proof of Proposition D.5.1 . . . . .   | 150        |
| D.10     | Proof of the Theorem D.3.1 . . . . .   | 151        |
| D.11     | Technical Lemmas . . . . .   | 153        |



# Table des figures

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Exemples de spectres en énergie : (a) Spectre de Cs 137 simulé — (b) Spectre réel. . .  | 3  |
| 1.2  | Diffusion Compton . . . . .   | 5  |
| 1.3  | Modèles de spectre en énergie. (a) Effet photoélectrique. (b) Effet photoélectrique et diffusion Compton. . . . .   | 6  |
| 1.4  | Nombre de photons diffusés dans un angle solide de 1 Strd pour différentes valeurs de $\alpha$ . . .  | 6  |
| 1.5  | Prépondérance des différentes perturbations physiques. . . . .  | 8  |
| 1.6  | Schéma-bloc d'une chaîne d'instrumentation de spectrométrie. . . . .  | 9  |
| 1.7  | Exemple de signal temporel observé (unités arbitraires). . . . .  | 10 |
| 1.8  | Modèle prenant en compte les perturbations physiques liées au détecteur et à la chaîne d'instrumentation. . . . .   | 10 |
| 1.9  | Illustration du problème des compteurs de type II : signal d'entrée avec $T_k$ le $k$ -ième temps d'arrivée, $X_k$ la $k$ -ième durée and $Y_k$ $k$ -ième énergie, $k = n, \dots, n + 2$ . . . . .                  | 11 |
| 1.10 | Comparaison entre un spectre de Césium 137 à bas taux de comptage (pointillés) et à taux de comptage élevé (phénomène d'empilements). . . . .   | 12 |
| 1.11 | Représentation du temps-mort ; le temps mort est donnée par le temps de montée $T_m$ , le temps de numérisation du convertisseur analogique-numérique et le temps de stockage des données $T_s$ par le MCA. . . . . | 13 |
| 2.1  | Représentation graphique des impulsions photoniques . . . . .   | 24 |
| 2.2  | Représentation graphique des séquences d'occupation . . . . .   | 25 |
| 2.3  | Représentation graphique des $A_k$ . . . . .  | 27 |
| 2.4  | Représentation graphique des notations . . . . .  | 42 |
| 4.1  | Densité <b>(D3)</b> — (a) Vue de dessus. (b) Marginale en énergie. . . . .  | 71 |
| 4.2  | Loi des empilements associés à <b>(D3)</b> — (a) Vue de dessus. (b) Marginale en énergie. . .   | 71 |
| 4.3  | Exemple de densité $f$ bimodale (pointillés) et loi des empilements associés (trait plein). . .   | 73 |
| 4.4  | Comportement des estimateurs. (a) obtenu par <b>(A2)</b> . — (b) obtenu par <b>(A1)</b> . . . . .   | 73 |
| 4.5  | Comparaison entre les estimateurs obtenus par <b>(A1)</b> et <b>(A3)</b> . (a) - Estimateur pour le modèle continu. (b) — Estimateur pour le modèle discret. . . . .  | 74 |
| 4.6  | Estimation de <b>(D1)</b> pour plusieurs valeurs de $N$ — (a) $N = 1000$ . (b) $N = 5000$ . (c) $N = 10000$ . (d) $N = 20000$ . (e) $N = 100000$ . (f) $N = 500000$ . . . . .                                       | 75 |
| 4.7  | Estimation de <b>(D1)</b> pour plusieurs valeurs de $c$ — (a) $c = 10^{-4}$ . (b) $c = 10^{-3}$ . (c) $c = 10^{-2}$ . (d) $c = 10^{-1}$ . (e) $c = 1$ . (f) $c = 10$ . . . . .                                      | 77 |
| 4.8  | Estimation de <b>(D1)</b> pour plusieurs valeurs de $T$ — (a) $T = 20$ . (b) $T = 40$ . (c) $T = 60$ . (d) $T = 80$ . (e) $T = 100$ . (f) $T = \max_{k \leq N} X'_k$ . . . . .                                      | 78 |
| 4.9  | Densité <b>(D4)</b> (en rouge) et loi des $(X', Y')$ (en bleu). . . . .   | 80 |
| 4.10 | Loi des $Y$ (en noir), loi des $Y'$ (en bleu), estimateur $\hat{m}_{T,h,N}$ (en rouge). . . . .   | 80 |
| 4.11 | Résultat de l'algorithme <b>(A3)</b> sur la densité <b>(D4)</b> . . . . .   | 81 |
| 4.12 | Traitement d'un spectre réel de Cs 137 - Cs 134 par l'algorithme <b>(A2)</b> . . . . .  | 87 |
| 4.13 | Traitement d'un spectre réel de Cs 137 - Cs 134 par l'algorithme <b>(A2)</b> . — (a) Zone [500; 800 keV]. (b) Zone [800; 1000 keV]. . . . .   | 88 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 4.14 | Résultats obtenus pour $T = \max_{1 \leq k \leq N} X'_k$ .  | 89  |
| 4.15 | Traitement d'un spectre réel Cs 137 - Eu 152 par l'algorithme <b>(A3)</b> .   | 90  |
| 4.16 | Traitement d'un spectre réel Cs 137 - Eu 152 par l'algorithme <b>(A3)</b> — (a) Zone [0; 600 keV]. (b) Zone [600; 1200 keV]. (c) Zone [1200; 1800 keV].   | 91  |
| A.1  | Dispositif instrumental schématisé.   | 112 |
| A.2  | Schéma d'un spectre de raies d'une source gamma.  | 112 |
| A.3  | Signal temporel généré par un détecteur de photon gamma.  | 113 |
| A.4  | Spectre de Césium 137.  | 113 |
| A.5  | Spectre en énergie de Césium et de Pechblende.  | 114 |
| A.6  | Signal temporel issu d'un détecteur lent lorsqu'un phénomène d'empilement a lieu.   | 114 |
| A.7  | Spectre en énergie simulé.  | 114 |
| A.8  | Spectre en énergie simulé avec empilements.   | 115 |
| A.9  | Portion de signal avec deux impulsions principales.   | 115 |
| A.10 | Signal échantillonné et quantifié.  | 115 |
| A.11 | Schéma-bloc de l'invention complète.  | 115 |
| A.12 | Histogramme bidimensionnel non traité.  | 116 |
| A.13 | Histogramme bidimensionnel corrigé.   | 116 |
| A.14 | Schéma-bloc de la première partie de l'algorithme.  | 116 |
| A.15 | Schéma-bloc de la deuxième partie de l'algorithme.  | 117 |
| A.16 | Spectre en énergie observé.   | 117 |
| A.17 | Spectre en énergie corrigé.   | 118 |
| C.1  | Histogramme de la densité idéale vu de dessus   | 130 |
| C.2  | Comparaison entre les densités bidimensionnelles  | 131 |
| D.1  | Illustration of the pile-up phenomenon. (a) : input signal with arrival times $T_j$ , lengths $X_j$ and energies $Y_j$ , $j = n, \dots, n + 2$ ; (b) : associated on-off process $S_t$ , $S_t = 1$ if the system is busy at time $t$ and $S_t = 0$ otherwise. | 134 |
| D.2  | dashed line : marginal density of the energy for the pdf (D.44); solide line : kernel density estimator of the pileup observations based on $10^5$ samples.   | 143 |
| D.3  | dashed line : marginal density of the energy for the pdf (D.44); solid line : estimator $\hat{m}_{T,h,n}$ .   | 144 |
| D.4  | Illustration of ideal and piled-up energy spectra of the Cs 137 element   | 144 |
| D.5  | Energy spectrum of the Cs 137 element — (a) Estimate $\hat{m}_{T,h,n}$ ; (b) Ideal probability density function   | 145 |

# Liste des tableaux

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Résumé des principales notations . . . . .  | 41  |
| 4.1 | ISE approchée dans le cas de la densité ( <b>D2</b> ) pour plusieurs valeurs de $N$ . . . . . | 76  |
| 4.2 | ISE approchée dans le cas de la densité ( <b>D2</b> ) pour plusieurs valeurs de $c$ . . . . . | 76  |
| 4.3 | ISE approchée dans le cas de la densité ( <b>D2</b> ) pour plusieurs valeurs de $T$ . . . . . | 79  |
| 4.4 | Une itération de l'algorithme EM . . . . .  | 83  |
| 4.5 | Estimation MAP des séquences jointes $(\mathbf{r}_1^N, \mathbf{E}_1^N)$ . . . . .             | 83  |
| 4.6 | Raies énergétiques de Cs 134 et de Eu 152 . . . . .   | 86  |
| 4.7 | Raies énergétiques significatives des isotopes du Césium . . . . .                            | 87  |
| C.1 | Algorithme du gradient additif . . . . .  | 128 |
| C.2 | Algorithme du gradient multiplicatif . . . . .  | 128 |
| D.1 | Integrated Square Error Monte-Carlo estimates as $n$ , $c$ or $T$ varies. . . . .             | 143 |



# Remerciements

*Vous savez, moi je ne crois pas qu'il y ait de bonnes ou de mauvaises situations. Moi si je devais résumer ma vie, aujourd'hui, avec vous, je dirais que c'est d'abord des rencontres, des gens qui m'ont tendu la main, peut-être à un moment où je ne pouvais pas, où j'étais seul chez moi, et c'est assez curieux de se dire que les hasards, les rencontres forment une destinée, parce que quand on a le goût de la chose, quand on a le goût de la chose bien faite, le beau geste, parfois on ne trouve pas l'interlocuteur en face, je dirais le miroir qui vous aide à avancer ; alors ce n'est pas mon cas comme je le disais là, puisque moi au contraire j'ai pu et je dis merci à la vie, je lui dis merci, je chante la vie, je danse la vie, je ne suis qu'amour, et finalement quand beaucoup de gens aujourd'hui me disent : Mais comment fais-tu pour avoir cette humanité ? Et bien je leur réponds très simplement, je leur dis : c'est ce goût de l'amour, ce goût donc qui m'a poussé, aujourd'hui, à entreprendre une construction mécanique mais demain, qui sait, peut-être, simplement à me mettre au service de la communauté, à faire le don, le don de soi. . .*

Edouard BAËR, in « Astérix et Obélix : Mission Cléopâtre », 2003.

Après une recherche laborieuse de financement suivie de trois ans de pérégrinations au pays des photons  $\gamma$ , arrive le temps des remerciements.

Je remercie tout particulièrement Eric Moulines, qui a accepté d'être mon directeur de thèse et qui, par son attention, sa disponibilité et ses divers conseils, remarques et encouragements, m'a donné le goût de la recherche et des estimateurs bien construits, mieux que ne l'auraient fait n'importe quel Borovkov relié pleine peau. Je remercie également Antoine Souloumiac, qui a assuré mon encadrement au CEA Saclay. Par ses conseils de rédaction, les nombreuses discussions au tableau de la pièce 52 et sa fameuse « Matlab Attitude », ce dernier a entre autres choses influencé considérablement ma vision de tous les aspects computationnels. Un bémol toutefois : pourquoi m'avoir transmis en sus le goût de la caféine ?

J'adresse également mes remerciements aux membres de mon jury : à Jean-Pierre Raoult, qui m'a fait l'honneur de présider ledit jury, à François Roueff et Laurent Decreusefond qui ont accepté d'en être les examinateurs et à Elisabeth Gassiat et Ya'acov Ritov pour leur relecture minutieuse et avisée de ma prose. Je remercie tout particulièrement François Roueff, dont les encouragements à un moment où j'en avais grand besoin furent une condition nécessaire et suffisante à l'aboutissement de cette thèse.

J'adresse également toute ma sympathie à tous ceux que j'ai côtoyés pendant mon séjour au CEA et à l'ENST et qui ont rendu cette période aussi agréable qu'enrichissante : côté CEA, Jean-Christophe (sans qui la thèse n'aurait pu se faire), Eric, Thomas, Laurent (malgré les blagues), Bernard, Thi, Luc et surtout Thierry le co-bureau de tous les instants, qui a coanimé aussi bien intellectuellement qu'humoristiquement la Pièce 52 (bien qu'il soit titulaire et senior, comme quoi il ne faut jamais juger les gens sur leurs apparences). Côté ENST, l'ensemble des thésards que j'ai côtoyés, Julie, Slim, Cléo, Pierre (ça compile!), NiKo, et enfin le co-bureau magique de TSAC Loïs, président du club Cité de la Peur, pour m'avoir ouvert l'esprit sur le bayésien (sans rire!) et pour tous les délires fatalpicardiens. Dors, mon fils !

Cette liste de remerciements ne serait pas complète sans ceux que j'adresse à tous mes amis « extérieurs » aux galères scientifiques : Isabelle en premier (*best friend ever!*), mais aussi les membres d'« À Portée de Notes », ceux de Menzoberranzane (Nico, Da Jér', Göran, Sylvain, c'est quand la prochaine répète?), et les rôlistes Goopil', Draco, Manu et Isa, enfin Sebby et Jérôme. Merci à mes parents, qui m'ont laissé une totale liberté et encouragé dans mes choix professionnels, ma soeur et ma grand-mère, qui m'ont soutenu dans les moments difficiles, et à ma famille.

Enfin, merci au lecteur anonyme de cette thèse, en espérant qu'il y trouvera ce qu'il est venu y chercher. Qu'il veuille bien me pardonner les éventuelles coquilles qui subsisteraient dans ce manuscrit.

# Résumé

DANS le cadre de la spectrométrie  $\gamma$ , on s'intéresse à la caractérisation des éléments radioactifs d'une source à partir des photons  $\gamma$  émis par cette dernière. L'analyse des énergies photoniques enregistrées par un détecteur et l'étude du spectre en énergie qui en découle permettent à la fois d'identifier les éléments radioactifs d'une source et d'estimer son activité. À des taux de comptage élevés, néanmoins, des perturbations liées à l'aspect stochastique du signal étudié sont susceptibles de gêner l'identification des éléments radioactifs. En particulier, à cause de la résolution finie du détecteur, les arrivées proches et par nature aléatoires des photons sont susceptibles de produire des *empilements*. Ce phénomène introduit une distortion du spectre en énergie, notamment l'apparition de pics multiples ne correspondant à aucun élément radioactif et une distortion du continuum Compton qui peut masquer des pics de faible intensité.

L'objectif de cette étude est de corriger les distortions des spectres en énergie causées par les empilements d'impulsions photoniques. Nous nous plaçons dans un cadre non-paramétrique ; en introduisant un modèle adapté à cet objectif, basé sur deux processus ponctuels marqués, nous établissons une relation non-linéaire entre la loi des observations et la densité de probabilité que l'on cherche à estimer. Cette relation est obtenue à la fois pour les signaux à temps continu et les signaux échantillonnés et quantifiés. Elle permet de considérer ce problème dans le cadre de la déconvolution non-linéaire de densités et de l'estimation non-paramétrique à partir de mesures indirectes.

À partir de cette relation, nous proposons un estimateur obtenu par inversion directe. Nous montrons en outre que cet estimateur est consistant et que sa vitesse de convergence au sens de la norme  $L^2$  est proche des vitesses non-paramétriques usuelles.

Nous illustrons ces aspects théoriques de notre étude par des résultats numériques obtenus sur des simulations et des spectres en énergie obtenus à partir du système ADONIS développé par le CEA Saclay. Nous montrons que les distortions dues aux empilements d'impulsions photoniques sont bien corrigées par les algorithmes dérivant de nos estimateurs.

**Mot-Clés :** Estimation non-paramétrique, déconvolution de densités, processus ponctuels, problèmes inverses non-linéaires, spectrométrie  $\gamma$ , mesures indirectes.



# Abstract

THE main objective of  $\gamma$  spectrometry is to characterize the radioactive elements of an unknown source by studying the energy of the emitted  $\gamma$  photons. When a photon interacts with a detector, its photonic energy is converted into an electrical pulse, whose integral energy is measured. The histogram obtained by collecting the energies can be used to identify radioactive elements and measure their activity.

However, at high counting rates, perturbations which are due to the stochastic aspect of the temporal signal can cripple the identification of the radioactive elements. More specifically, since the detector has a finite resolution, close arrival times of photons which can be modeled as an homogeneous Poisson process cause *pileups* of individual pulses. This phenomenon distorts energy spectra by introducing multiple fake spikes and prolonging artificially the Compton continuum, which can mask spikes of low intensity.

The objective of this thesis is to correct the distortion caused by the pileup phenomenon in the energy spectra. Since the shape of photonic pulses depends on many physical parameters, we consider this problem in a nonparametric framework. By introducing an adapted model based on two marked point processes, we establish a nonlinear relation between the probability measure associated to the observations and the probability density function we wish to estimate. This relation is derived both for continuous and for discrete time signals, and therefore can be used on a large set of detectors and from an analogical or digital point of view. It also provides a framework to this problem, which can be considered as a problem of nonlinear density deconvolution and nonparametric density estimation from indirect measurements.

Using these considerations, we propose an estimator obtained by direct inversion. We show that this estimator is consistent and almost achieves the usual rate of convergence obtained in classical nonparametric density estimation in the  $L^2$  sense.

We illustrate these theoretical aspects of our study with numerical results obtained both on simulations and on energy spectra associated to real-world data from the ADONIS instrumentation system developed by the CEA Saclay. We show that the distortions caused by the pileup phenomenon are well corrected by the algorithms derived from our estimators.

**Keywords :** nonparametric density estimation, density deconvolution, point processes, nonlinear inverse problems,  $\gamma$  spectrometry, indirect measurements.



# Notations usuelles

$\mathbb{E}[X]$  : espérance de la variable aléatoire  $X$ .

$\mathbb{P}(A)$  : probabilité de l'événement  $A$ .

$\mathbb{1}$  : fonction indicatrice d'un ensemble.

$\sigma(X)$  : tribu engendrée par la variable aléatoire  $X$ .

$\mathcal{B}(A)$  : ensemble des boréliens de  $A$ .

$\#A$  : cardinal de l'ensemble  $A$ .

$\mathcal{P}(\lambda)$  : loi de Poisson d'intensité  $\lambda$ .

$\mathcal{L}$  : opérateur de transformée de Laplace.

$\otimes$  : produit tensoriel de mesures de probabilité.

$\mathcal{E}_\lambda$  : mesure de probabilité exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

$\stackrel{\text{def}}{=} :$  est égal par définition à.

*i.i.d.* : indépendantes et identiquement distribuées.

*p.s.* : presque sûrement.



# Chapitre 1

## Introduction – Description du problème

*« I shall be telling this with a sigh  
Somewhere ages and ages hence :  
Two roads diverged in a wood, and I –  
I took the one less travelled by,  
And that has made all the difference. »*

Robert FROST, « The Road Not Taken », 1915.

### Sommaire du chapitre

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Introduction à la spectrométrie . . . . .</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1.1      | Définition et objectifs de la spectrométrie $\gamma$ . . . . .                            | 2         |
| <b>1.2</b> | <b>Interprétation de l'allure des spectres en énergie . . . . .</b>                       | <b>3</b>  |
| 1.2.1      | Rappels de physique atomique . . . . .  | 3         |
| 1.2.2      | Les interactions photons-matière . . . . .  | 4         |
| 1.2.3      | Distorsions du spectre liées à la physique du détecteur . . . . .                         | 7         |
| 1.2.4      | Premier bilan . . . . .   | 8         |
| <b>1.3</b> | <b>Le problème des empilements d'impulsions . . . . .</b>                                 | <b>9</b>  |
| <b>1.4</b> | <b>État de l'art . . . . .</b>  | <b>12</b> |
| 1.4.1      | Méthodes physiques proposées pour le traitement d'empilements . . . . .                   | 12        |
| 1.4.2      | Méthodes physiques proposées pour la correction du taux de comptage . . . . .             | 14        |
| 1.4.3      | Cadre mathématique du problème : l'analogie avec la théorie des files d'attente . . . . . | 17        |
| <b>1.5</b> | <b>Apports de la thèse . . . . .</b>  | <b>18</b> |
| 1.5.1      | Problématique . . . . .   | 18        |
| 1.5.2      | Méthodes proposées et résultats obtenus . . . . .   | 18        |
| 1.5.3      | Plan de la thèse . . . . .  | 20        |
| <b>1.6</b> | <b>Publications . . . . .</b>   | <b>21</b> |
| 1.6.1      | Articles de revue — Articles de journaux . . . . .  | 21        |
| 1.6.2      | Brevet . . . . .  | 21        |
| 1.6.3      | Articles de conférence avec comité de lecture . . . . .                                   | 21        |
| 1.6.4      | Rapports Techniques . . . . .   | 21        |

---

L'OBJECTIF de ce chapitre est de décrire les bases de la physique nucléaire pour la spectrométrie, afin de mieux présenter au lecteur les enjeux de cette thèse ainsi que les méthodes proposées dans ce cadre pour la correction d'empilements d'impulsions photoniques. Tout d'abord, nous présentons les bases de la spectrométrie  $\gamma$ , puis nous décrivons les perturbations permettant d'expliquer l'allure des spectres en énergie. Nous séparons ainsi les perturbations liées aux interactions photon-matière et les perturbations liées aux détecteurs et à la chaîne d'instrumentation, qui sont de

nature déterministes et portent sur le spectre à proprement parler, des perturbations liées aux empilements d'impulsions, de nature essentiellement stochastique et qui portent sur le signal temporel. Cette dernière perturbation introduisant une distortion au niveau des spectres en énergie et de l'estimation de l'activité des radio-nucléides ; nous présentons dans une troisième partie les méthodes de l'état de l'art, ainsi que leurs limites. Nous verrons que les méthodes pratiques proposées pour la correction d'empilements d'impulsions dans le signal photonique sont essentiellement basées sur des méthodes déterministes, qui ne prennent pas en compte certains aspects stochastiques du signal fondamentaux pour son traitement. Enfin, nous détaillons dans une dernière partie la démarche adoptée dans cette étude.

## 1.1 Introduction à la spectrométrie

Nous présentons ici les bases de la spectrométrie, en insistant sur la spectrométrie gamma. Le lecteur désirant approfondir cette description pourra se référer à [Tsoulfanidis, 1995], ou pour un panorama plus complet à [Knoll, 1989].

### 1.1.1 Définition et objectifs de la spectrométrie $\gamma$

Remarquons, tout d'abord, que le terme de spectrométrie en lui-même est vague, car il ne fait référence qu'à l'analyse de données en composants élémentaires susceptibles d'être disposés le long d'un ou plusieurs axes (numériques). C'est la représentation sur un graphique de cette répartition que l'on nomme « spectre ». Il faut donc à chaque fois préciser la nature des données et la dimension des axes (fréquence en Hertz, énergie en électron-volt ou encore masse en kilogramme). En spectrométrie  $\gamma$ , il s'agit de mesurer comment se répartissent, ou se distribuent, les photons gamma selon leur énergie individuelle en électron-volts, ou un multiple de cette unité.

Les radio-nucléides sont ainsi caractérisés par l'énergie des photons qu'ils émettent. Ces énergies sont discrètes et connues et archivées dans des bases de données. Idéalement, il est donc possible à partir du spectre d'identifier les radio-nucléides. Il est par conséquent possible de caractériser la composition, c'est-à-dire les radio-nucléides présents, et l'activité, c'est-à-dire le nombre de désintégrations par seconde ou Becquerels, d'une source émettrice de photons gamma. Le résultat final d'une mesure de spectrométrie gamma est, par exemple, un énoncé de la forme : « la source radioactive contient du Cesium 137 d'activité 4500 Becquerels et de l'Europium 152 d'activité 3700 Becquerels ».

En spectrométrie, on mesure la distribution en énergie (ou **spectre** en énergie) des particules émises par une source radioactive ou produites par une réaction nucléaire. Le terme de spectre peut sembler mal choisi, car il fait référence à des méthodes (analyse spectrale, transformations de Fourier) qui n'ont pas lieu d'être appliquées dans le cadre de la spectrométrie gamma ; toutefois, l'énergie des photons étant proportionnelle à leur fréquence d'après la relation de Planck, cet abus de langage est conventionnellement utilisé. Il existe deux sortes de spectre en énergie :

- *Le spectre en énergie différentiel* est une fonction  $n(E)$  telle que  $n(E) dE$  est le nombre de particules dont les énergies sont comprises entre  $E$  et  $E + dE$ ,
- *Le spectre en énergie intégral*  $N(E)$ , donné par la relation :

$$N(E) = \int_E^{+\infty} n(E) dE .$$

Dans toute la suite nous nous intéresserons uniquement à des spectres en énergie différentiels.

La figure 1.1-(a) représente un spectre en énergie de l'élément Césium 137 simulé, et la figure 1.1-(b) un spectre réel tiré de [Tsoulfanidis, 1995]. Nous insistons encore sur le fait que ces spectres en énergie ne sont pas obtenus par transformée de Fourier, mais qu'il s'agit d'un histogramme des énergies enregistrées sur une certaine période de temps.

Nous remarquons d'emblée que les spectres présentés semblent contredire ce qui a été dit précédemment, puisque qu'ils ne sont pas uniquement constitués de raies monoénergétiques, mais également

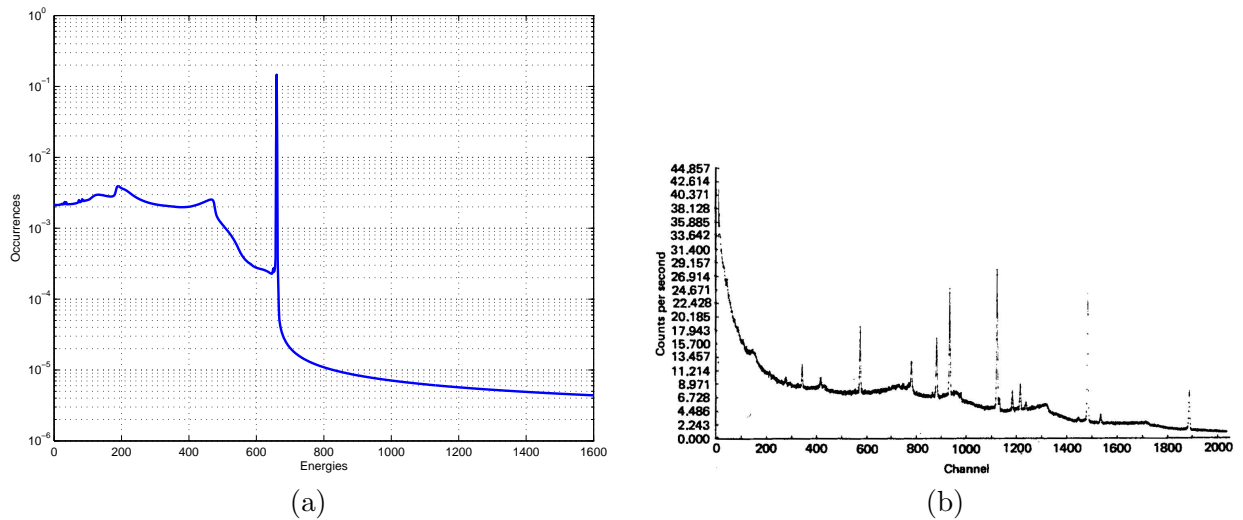


FIG. 1.1 – Exemples de spectres en énergie : (a) Spectre de Cs 137 simulé — (b) Spectre réel.

d'un continuum; une analyse plus détaillée de la physique sous-jacente, qui est présentée ci-après, permet de mieux comprendre ce phénomène.

## 1.2 Interprétation de l'allure des spectres en énergie pour la spectrométrie Gamma

Nous pouvons distinguer plusieurs types de perturbations qui dégradent le spectre de raies idéal, de trois sortes :

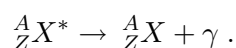
- les perturbations dérivant de l'interaction des photons avec la matière,
- les perturbations dérivant de la chaîne d'instrumentation et de l'acquisition du signal,
- les perturbations dérivant du caractère aléatoire du signal incident.

Bien que nous nous intéressions essentiellement au troisième type de perturbation dans notre étude, une compréhension plus générale est nécessaire pour justifier notre approche. Nous détaillons par conséquent dans cette partie l'ensemble des phénomènes qui introduisent un fond continu dans les spectres en énergie observés en pratique.

### 1.2.1 Rappels de physique atomique

Nous rappelons dans un premier temps les éléments nécessaires de physique atomique afin de pouvoir détailler quantitativement les différents effets quantiques intervenant en spectrométrie  $\gamma$ . Le modèle atomique usuel est le suivant : on appelle nucléon soit un proton, soit un neutron (le lecteur intéressé par les caractéristiques des particules élémentaires pourra se référer à [Tsoulfanidis, 1995, page 86]). Un noyau est constitué de  $N$  neutrons et  $Z$  protons, le nombre de masse  $A$  étant alors défini par  $N + Z = A$ . On appelle *isobares* les noyaux ayant le même nombre de masse, *isotopes* les noyaux ayant le même  $Z$ , *isotones* les noyaux ayant le même  $N$ , *isomères* des noyaux identiques à des états d'énergie différents. Les noyaux sont également associés à des niveaux d'énergie quantifiés. Chaque atome tend à devenir le plus stable possible, c'est-à-dire à atteindre le niveau d'énergie le plus bas possible.

Dans le cas de la radioactivité  $\gamma$ , le noyau d'un élément  $X$  passe d'un état excité  $X^*$  à un état de plus basse énergie en émettant un photon  $\gamma$ ; ceci s'écrit de manière schématique de la manière suivante :



Un isotope fréquemment utilisé dans les applications classiques de mesure et d'étalonnage pour ce type de rayonnement est le Césium 137, ce qui explique pourquoi nous nous intéresserons davantage à ce radionucléide pour les simulations et les résultats sur données réelles détaillées au Chapitre 4. L'énergie  $E$  d'un photon émis lors d'un rayonnement  $\gamma$  est proportionnelle à sa fréquence  $\nu$  suivant la loi de Planck :

$$E = h\nu .$$

Le terme de « spectre en énergie » se comprend aisément au vu de cette relation, puisque fréquence et énergie sont liées par une relation de proportionnalité.

### 1.2.2 Les interactions photons-matière

Dans toute la suite de cette partie  $E_\gamma$  désigne l'énergie d'un photon  $\gamma$  incident. Nous détaillons à présent les trois principales interactions photons-matière : l'effet photoélectrique, la diffusion Compton et la production de paires. Ces trois interactions photons-matière créent un nombre de paires électrons-trous proportionnel à  $E_\gamma$ , qui en migrant induisent un courant électrique. C'est ce courant qui donne une information sur l'énergie photonique incidente, car l'intégrale de l'impulsion de courant générée est proportionnelle à  $E_\gamma$ . Toutefois, pour un photon incident donné, la charge déposée dans le détecteur diffèrera suivant le type d'interaction. De fait, le courant observé sera différent.

#### L'effet photoélectrique

Un rayonnement interagissant avec la matière peut être absorbé provoquant ainsi une transition électronique. Si l'énergie incidente est faible, il provoque simplement le changement d'orbite d'un électron ; si l'énergie est suffisante, il provoque une ionisation. Dans le cas où le rayonnement incident est électromagnétique, on parle d'effet photoélectrique et l'électron éjecté est un photoélectron.

L'effet photoélectrique est donc une interaction de type absorption entre un photon et un électron lié. Quand un photon interagit avec le noyau d'un atome, il provoque la libération d'un des électrons. La probabilité d'une telle interaction est appelée coefficient photoélectrique et noté  $\tau$  (voir [Knoll, 1989]) ; celui-ci s'exprime en fonction de  $Z$ ,  $A$  et  $E_\gamma$  l'énergie du photon par la relation suivante :

$$\tau (m^{-1}) = aN \frac{Z^n}{E_\gamma^m} [1 - O(Z)] ,$$

où  $a$  est indépendant de  $Z$  et  $E_\gamma$  et  $m$  et  $n$  ne dépendent que de  $E_\gamma$ . L'effet photoélectrique correspond en quelque sorte à l'effet « optimal » pour la spectrométrie  $\gamma$  : par exemple, un photon interagissant par effet photoélectrique avec un détecteur Germanium va y déposer toute son énergie, n'engendrant aucun élément radiatif auxiliaire ; une partie de cette énergie est dissipée dans le milieu sous forme de chaleur, l'autre provoque la création de paires électrons-trous.

#### L'effet Compton ou diffusion Compton

Au contraire de l'effet photoélectrique, la diffusion Compton engendre la création d'un photon radiatif après-coup, et permet de mieux comprendre l'allure des spectres en énergie en spectrométrie. Ce type d'interaction apparaît dans toutes les applications mettant en œuvre le rayonnement  $\gamma$ , notamment en imagerie médicale comme on peut le voir par exemple dans [Buvat, 2002].

La diffusion Compton résulte de l'interaction d'un photon avec un électron libre<sup>1</sup>. Au cours de cette interaction, le photon transmet une partie de son énergie au milieu. Toutefois, il ne disparaît pas au cours de l'interaction, mais est dévié de sa trajectoire. Le photon radiatif émis est alors caractérisé par une énergie plus faible, d'après la conservation de l'énergie mécanique de l'ensemble photon-matière.

L'énergie ainsi cédée au milieu génère des paires électrons-trous. D'autre part, le photon diffusé peut soit interagir de nouveau avec le milieu (on parle alors de *rérodifusion*), soit s'échapper et ainsi

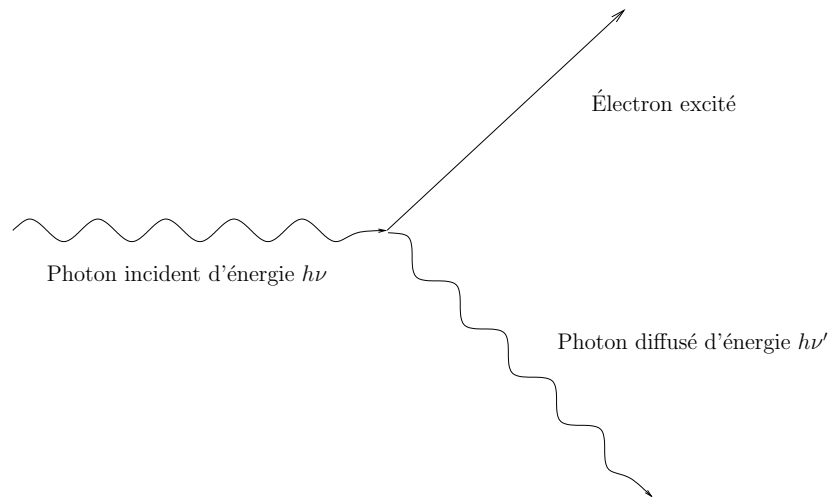


FIG. 1.2 – Diffusion Compton

ne plus être observé. La Figure 1.2 illustre la diffusion Compton : un photon incident d'énergie  $h\nu$  interagit avec la matière et transmet une partie de son énergie à un électron<sup>2</sup>, un photon d'énergie  $h\nu'$  est émis en utilisant la conservation de l'énergie du système photon-matière après le choc et la conservation des moments des particules, l'énergie du photon diffusé est donnée dans [Evans, 1958] par :

$$h\nu' = \frac{E_\gamma}{1 + (1 - \cos\theta)E_\gamma/mc^2}, \quad (1.1)$$

où  $\theta$  représente l'angle de diffusion et  $mc^2$  l'énergie d'un électron au repos (0.511 MeV). La relation (1.1) permet de comprendre pourquoi il existe une composante plus « lisse » dans les spectres en énergie observés en spectrométrie  $\gamma$ . En effet, si l'on fait varier l'angle de diffusion  $\theta$ , on s'aperçoit que, même dans le cas d'une diffusion maximale ( $\theta = \pi$ ), le photon émis garde une proportion de l'énergie du photon incident. Ainsi, (1.1) permet d'expliquer la présence d'un continuum à gauche de chaque pic correspondant à une énergie photonique effective. La limite supérieure de l'énergie détectée et due à la diffusion Compton, notée  $CC$ , est caractérisée par une énergie égale à :

$$CC = E_\gamma - \frac{E_\gamma}{1 + 2E_\gamma/mc^2}.$$

La Figure 1.3 montre la différence entre un spectre en énergie (a) ne considérant que l'effet photoélectrique et (b) prenant en compte la diffusion Compton.

De par de nombreux aspects aléatoires (interaction ou pas des photons émis, type d'interaction des photons émis) dépendant de la géométrie du détecteur, de la pièce où la mesure est faite, etc. . . , la diffusion Compton est très difficile à modéliser analytiquement. Le coefficient de diffusion, c'est-à-dire la probabilité qu'une diffusion Compton s'effectue dépend du nombre d'électrons disponibles sur les couches électroniques des atomes du matériau et donc dépend linéairement du nombre atomique  $Z$  :

$$\sigma (m^{-1}) = NZf(E_\gamma).$$

Dans le cas d'un détecteur plan infini, la formule de Klein-Nishina (voir [Knoll, 1989]) permet d'obtenir  $\sigma$  en fonction de l'angle solide de diffusion :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Zr_0^2 \left( \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \right)^2 \left( \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \right) \left( 1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)[1 + \alpha(1 - \cos\theta)]} \right),$$

<sup>1</sup>Dans la matière, tous les électrons sont liés, toutefois si l'énergie de liaison d'un électron est de l'ordre de l'eV, il peut en première approche être considéré comme libre.

<sup>2</sup>L'électron est supposé initialement au repos.

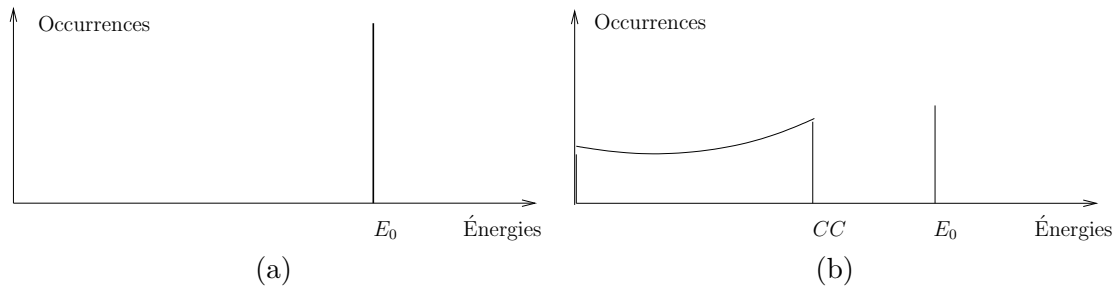


FIG. 1.3 – Modèles de spectre en énergie. (a) Effet photoélectrique. (b) Effet photoélectrique et diffusion Compton.

où  $\alpha = h\nu/mc^2$  et  $r_0$  est le rayon électronique. La Figure 1.4 représente pour différentes valeurs de  $\alpha$  les variations de  $d\sigma/d\Omega$ , cette dernière grandeur étant la probabilité qu'un photon émis soit diffusé dans l'angle solide  $d\Omega = 2\theta \sin\theta d\theta$ ; ainsi, plus l'énergie du photon incident est élevée, moins le phénomène de diffusion observé sera important. On constate également qu'il est très difficile de déterminer *a priori* la forme du continuum Compton sur les spectres en énergie.

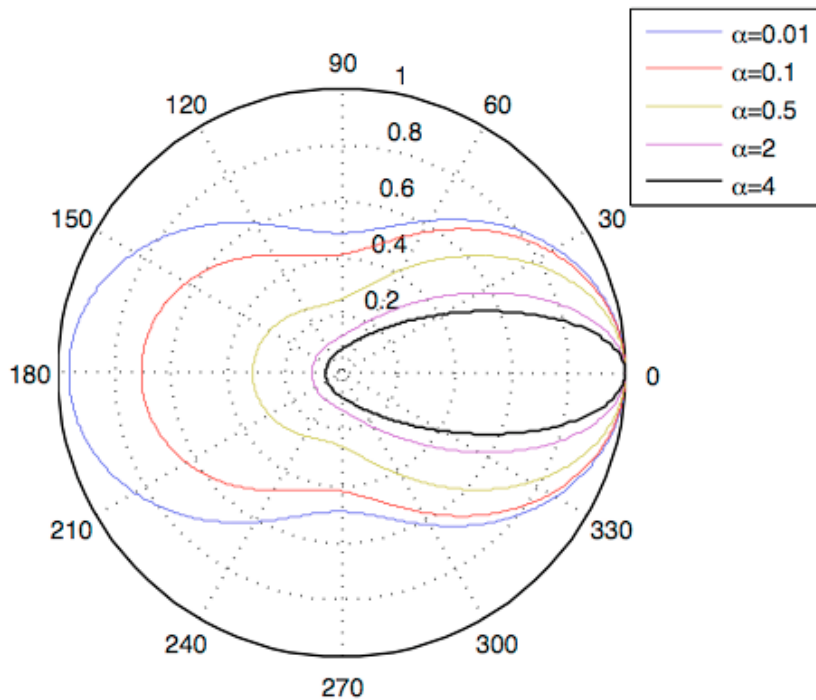


FIG. 1.4 – Nombre de photons diffusés dans un angle solide de 1 Strd pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

### La production de paires

Lorsque l'énergie du photon incident dépasse le double de l'énergie d'un électron au repos (1.022 MeV), le phénomène de production de paires est théoriquement possible. En pratique, toutefois, ce type d'interaction n'est observé qu'à de très fortes énergies, de l'ordre de plusieurs MeV. Comme la diffusion Compton, la production de paires engendre des photons radiatifs.

Dans le cas de la production de paires, le photon incident d'énergie  $h\nu$  interagit avec un noyau. Il y a alors création d'une paire électron-positon et d'un photon radiatif d'énergie  $h\nu - 1.022$  MeV. Le positon en s'annihilant avec un électron de la matière crée deux photons d'énergie 0.511 MeV. dans

une autre direction. Plusieurs types de détection sont alors possibles :

1. tous les photons émis interagissent avec le détecteur, on enregistre l'énergie  $h\nu$ ,
2. seul le photon d'énergie  $h\nu - 1.022$  MeV interagit avec le détecteur,
3. le photon d'énergie  $h\nu - 1.022$  MeV et un des photons venant d'une annihilation électron positon interagissent avec le détecteur, on détecte une énergie  $h\nu - 0.511$  MeV,
4. les deux photons provenant des interactions électrons-positons interagissent avec le détecteur, on enregistre la somme des énergies  $1.022$  MeV,
5. un photon provenant d'une interaction électron-positon interagit avec le détecteur, on enregistre alors  $0.511$  MeV.

La production de paires est donc susceptible de rajouter dans les spectres en énergie des raies supplémentaires d'énergies inférieures à  $E_\gamma$ . Il n'existe pas de relation simple pour exprimer un coefficient de production de paires, mais il est approximativement proportionnel au carré du nombre atomique  $Z$  de la matière avec laquelle le photon incident interagit.

### Prépondérance des effets

Les photons interagissent par effet photoélectrique, diffusion Compton ou production de paires. Suivant l'énergie  $E_\gamma$  d'un photon incident considéré, certains effets sont prépondérants par rapport à d'autres dans un détecteur considéré. Nous décrivons brièvement ici les différents cas.

**Si  $E < 1.022$  MeV :** Un photon ne peut dans ce cas interagir que par effet photoélectrique ou diffusion Compton. Dans le cas d'un effet photoélectrique, le photon dépose toute son énergie dans le détecteur. Dans le cas d'une diffusion Compton, ce dépôt est partiel. Comme indiqué précédemment, la diffusion Compton s'accompagne de l'ajout d'une composante continue dans le spectre.

**Si  $E > 1.022$  MeV :** A des énergies plus élevées, il peut également y avoir production de paires en plus de l'effet photoélectrique et de la diffusion Compton.

La prépondérance des effets quantiques est résumée en Figure 1.5. Il existe d'autres types d'effets, tels que la rétrodiffusion ou la diffusion Auger, qui dépendent d'un grand nombre de paramètres : la taille du détecteur, sa forme, son type, les dimensions de la pièce où la mesure est faite, l'activité de la source, etc... Nous détaillons à présent un autre type de distortion, liée cette au caractère non-idéal de la chaîne d'instrumentation utilisée.

### 1.2.3 Distortions du spectre liées à la physique du détecteur

Comme nous l'avons vu dans la partie 1.2.2, un photon incident d'énergie  $E_\gamma$  produit en interagissant avec le détecteur des paires électrons-trous. Ces porteurs de charge migrent sous l'effet de la tension appliquée au détecteur. Cette migration induit un courant qui est mesuré. L'électronique de mesure comprend les éléments suivants :

- le détecteur à proprement parler,
- un préamplificateur pour la minimisation du bruit,
- un amplificateur,
- un convertisseur analogique-numérique
- un analyseur multicanaux.

La Figure 1.6 est le schéma-bloc type d'une chaîne d'instrumentation de spectrométrie, correspondant à la description ci-dessus. On pourra trouver dans [Tsoulfanidis, 1995] ou [ANSI, 1999] une description plus détaillée de ce type d'instrumentation.

Chaque élément de la chaîne de la Figure 1.6 possède ses propres limitations, et donc est susceptible d'introduire des perturbations au niveau du signal temporel observé. Afin de mieux comprendre

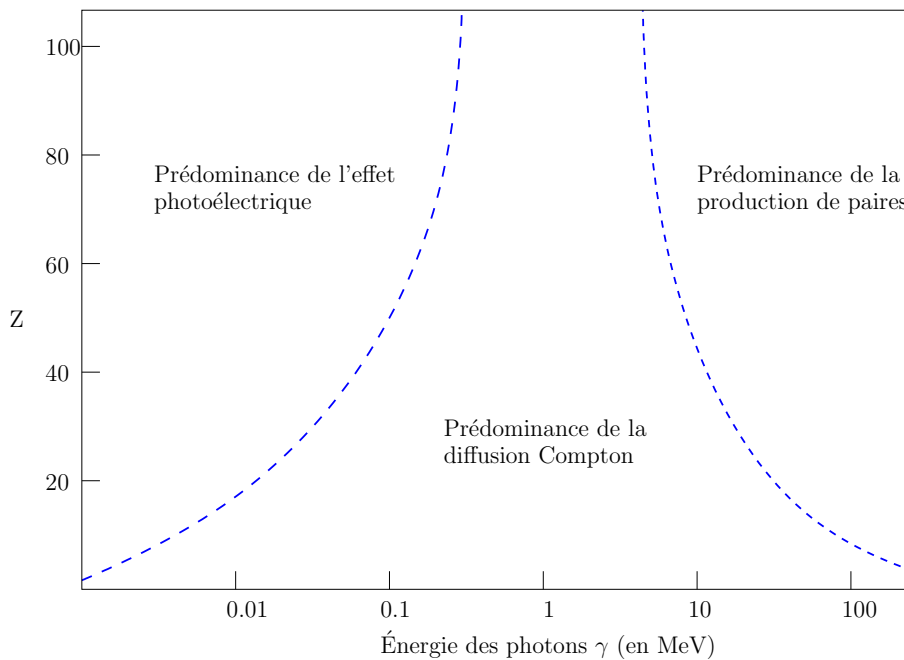


FIG. 1.5 – Prépondérance des différentes perturbations physiques.

l'origine des distortions dues au système d'acquisition, ainsi que les méthodes proposées par les métrologues pour le traitement du signal spectrométrique, il est nécessaire de connaître les limitations de chaque élément qui compose la chaîne d'instrumentation.

1. **Le détecteur** : Cet élément est celui sur lequel on a le moins de contrôle, et la plupart des limitations liées à cet élément sont d'ordre quantique. Ces limitations ont été décrites dans la partie 1.2.2.
2. **Le préamplificateur** : il peut être soit résistif, soit à reset. Cette partie de la chaîne est sensible au bruit, ce qui explique pourquoi, dans le cas des préamplificateurs à reset par exemple, elle est soit refroidie à l'azote. En outre, le préamplificateur est limité par sa dynamique, et peut saturer si l'énergie de ce qu'il traite dépasse un certain seuil. Les préamplificateurs usuels peuvent traiter des taux de comptage de 200 à 1000 kcps.
3. **L'amplificateur** : cet élément est souvent le facteur limitant de la chaîne d'instrumentation, ceci étant essentiellement dû à la nature aléatoire du signal incident et à la largeur des impulsions photoniques générées. Les méthodes utilisées pour traiter ce problème seront décrites dans le paragraphe 1.4.
4. **Le convertisseur analogique-numérique et l'analyseur multi-canaux** : les limitations de ces éléments sont essentiellement internes (temps de conversion, temps de stockage des données), et ne sont en général pas des facteurs limitants.

La Figure 1.7 donne un exemple de signal temporel observé en sortie d'une chaîne pourvue d'un détecteur HPGe refroidi. On observe au niveau de la ligne de base un faible bruit additif. L'ensemble de la chaîne d'instrumentation introduit donc au niveau du spectre en énergie des distortions une convolution, comme indiqué dans la Figure 1.8.

#### 1.2.4 Premier bilan

Nous avons introduit dans les paragraphes précédents deux types de phénomènes distincts qui peuvent interférer avec la bonne identification des radio-nucléides, et qui nous permettent de mieux comprendre la forme des spectres en énergie observés en pratique. Ces deux types de distortions présentent le point commun d'avoir leur origine à l'intérieur de la chaîne d'acquisition du signal, à

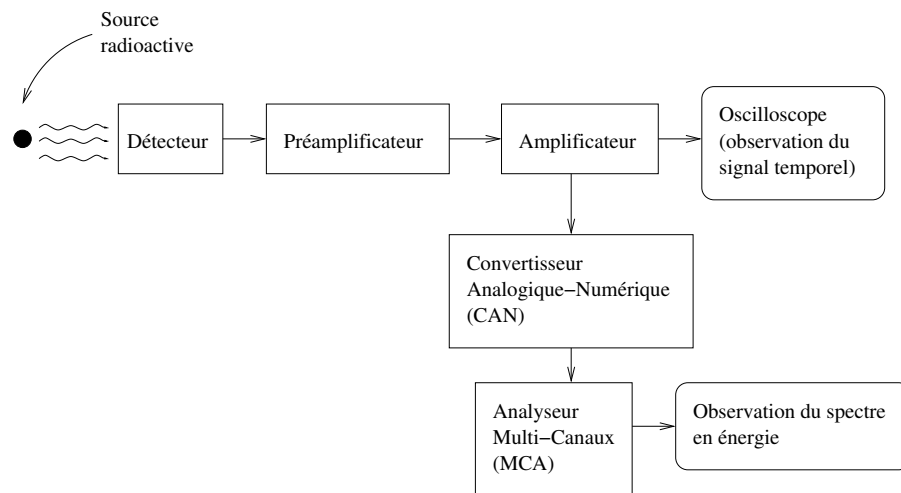


FIG. 1.6 – Schéma-bloc d'une chaîne d'instrumentation de spectrométrie.

savoir que les phénomènes d'origine physique décrits en 1.2.2 prennent source dans le détecteur à proprement parler, tandis que les perturbations liées au bruit de mesure décrites dans 1.2.3 prennent source dans les préamplificateurs et amplificateurs de la chaîne d'acquisition. Ces perturbations sont donc susceptibles de varier suivant la chaîne d'acquisition utilisée, notamment le type de détecteur. Pour un photon incident, à la place d'une impulsion de Dirac, on observe donc une courbe étalée comme le montre la Figure 1.8, présentant un pic ; à noter qu'il n'existe aucune forme analytique simple pour décrire la forme d'une impulsion photonique prenant en compte ces différents types de perturbation.

Ces premières considérations donnent d'ores et déjà un point de départ pour le choix de la méthode d'estimation des spectres en énergie : au vu du grand nombre de paramètres physiques extérieurs pour modéliser les distortions dues aux effets quantiques,

**il paraît extrêmement difficile d'utiliser des modèles paramétriques pour modéliser les spectres en énergie observés en pratique.**

Une telle approche supposerait l'utilisation d'outils de simulation numérique extrêmement lourds, et le trop grand nombre de paramètres à faire varier d'une acquisition à l'autre rend rapidement cette approche rédhitoire. Ceci justifie notre choix d'une approche non-paramétrique pour traiter ce problème.

Il existe également un troisième type de perturbation, en partie dûe à la durée non nulle des impulsions électriques observées en sortie de la chaîne d'acquisition<sup>3</sup>, mais dont l'origine essentielle est l'aspect aléatoire du signal photonique. Il s'agit du phénomène d'empilements d'impulsions, qui est maintenant détaillé.

### 1.3 Le problème des empilements d'impulsions

Du fait du temps non nul de la collection de charges, le signal temporel dû à un seul photon, i.e. l'impulsion électrique qui lui est associée, est d'une durée courte mais non nulle, tout juste inférieure à la micro-seconde pour les détecteurs Germanium par exemple. Cela signifie que deux photons peuvent être émis à des instants suffisamment proches pour que leurs signaux respectifs se superposent partiellement ou en totalité. En réalité, comme les instants d'arrivée des photons dans le détecteur forment un processus de Poisson, la probabilité qu'un empilement se produise n'est presque sûrement jamais nulle.

<sup>3</sup>On peut le constater au vu de la Figure 1.7.

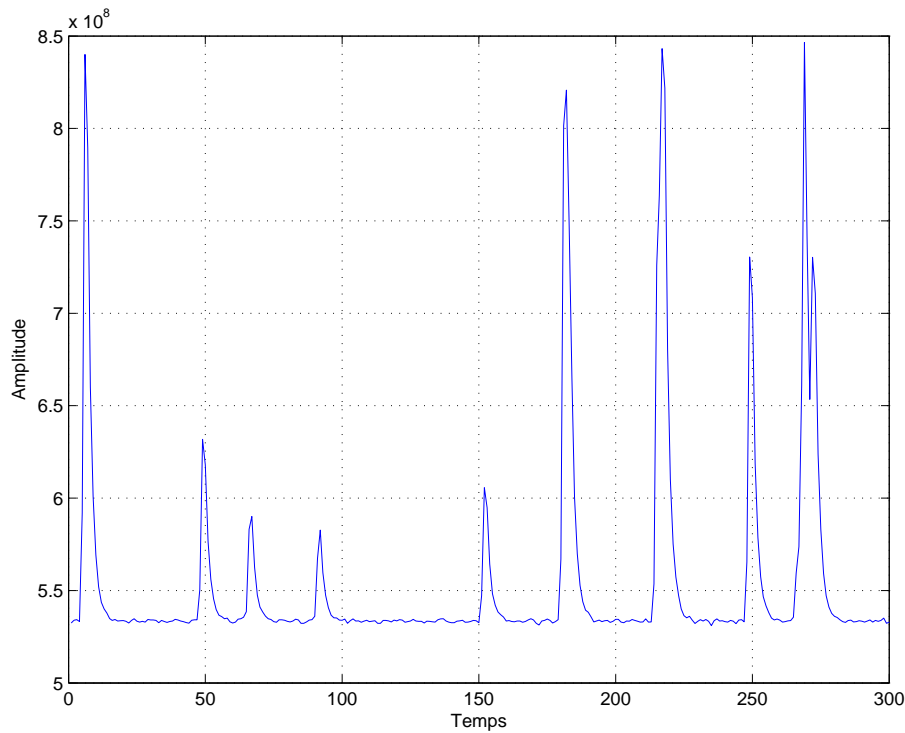


FIG. 1.7 – Exemple de signal temporel observé (unités arbitraires).

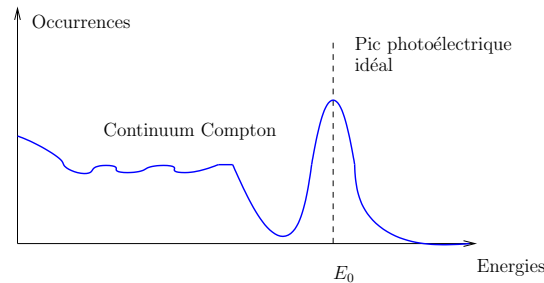


FIG. 1.8 – Modèle prenant en compte les perturbations physiques liées au détecteur et à la chaîne d'instrumentation.

Face à ce phénomène, l'approche peut différer suivant le type de détecteur : dans le cas le plus simple, le détecteur reste bloqué (temps mort), et n'enregistre aucune autre impulsion photonique tant que l'impulsion photonique en cours n'est pas terminée ; on parle alors de compteur paralysable, ou compteur de type I ; les compteurs Geiger utilisés pour les mesures de radioactivité sont un exemple de compteurs paralysables. Dans ce cadre, le phénomène d'empilements n'apparaît pas. L'étude théorique de ce type compteur est traitée par le biais de processus ponctuels effacés dans [Snyder, 1975] et ne fait pas intervenir le phénomène auquel nous nous intéressons, par conséquent nous ne la détaillerons pas ici.

Dans le cadre des compteurs non-paralysables ou compteurs de type II, en revanche, chaque impulsion arrivant pendant une impulsion en cours de détection la prolonge d'autant.

La Figure 1.9 illustre le problème rencontré dans le cas des compteurs de type II, et représente une portion de signal temporel schématisé après détection ; supposons que pour  $k = n, n + 1, n + 2$ ,  $T_k$  est le temps d'arrivée du  $k$ -ième photon,  $X_k$  la durée de l'impulsion électrique qu'il génère au sein du détecteur et  $Y_k$  l'énergie de cette même impulsion électrique. Dans cet exemple, lorsque le  $n$ -ième

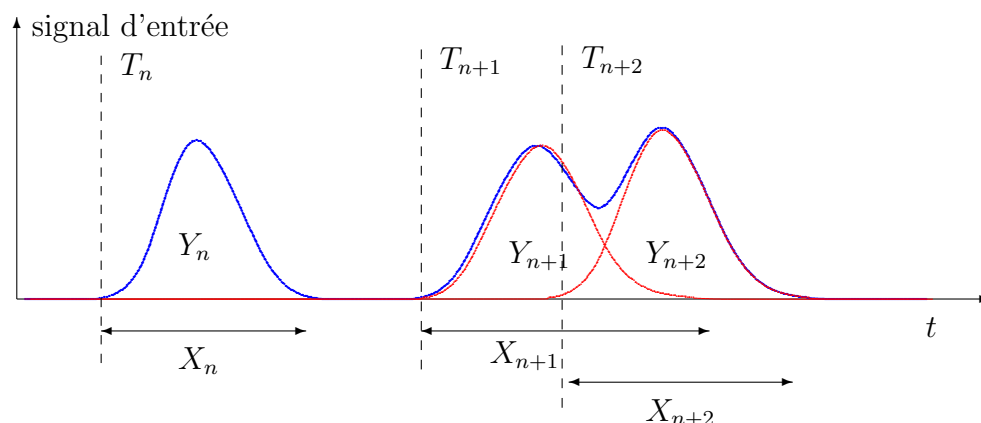


FIG. 1.9 – Illustration du problème des compteurs de type II : signal d'entrée avec  $T_k$  le  $k$ -ième temps d'arrivée,  $X_k$  la  $k$ -ième durée and  $Y_k$   $k$ -ième énergie,  $k = n, \dots, n + 2$ .

photon arrive, son énergie est enregistrée et l'on observe  $Y_n$ . En revanche, le  $n + 2$ -ième photon est arrivé alors que la  $(n + 1)$ -ième impulsion électrique n'est pas terminée ; dans ce cas, nous n'observons ni  $Y_{n+1}$  ni  $Y_{n+2}$ , mais  $Y_{n+1} + Y_{n+2}$ . Dans toute la suite, nous suivrons la terminologie utilisée en physique et appellerons ce phénomène un *empilement*. Ce phénomène est d'autant plus fréquent que l'activité globale de la source est plus forte et le détecteur plus lent (impulsion longue). L'empilement d'impulsions a deux conséquences :

1. Cela se traduit concrètement par un déplacement erroné d'une partie du spectre vers les fortes énergies, ce qui peut gêner considérablement l'identification des radio-nucléides. Les empilements entraînent en particulier l'apparition de pics « sommes ». En effet, supposons que la source émette des photons à deux énergies  $Y$  et  $Y'$ . Un spectre mesuré à faible taux de comptage (un petit détecteur placé loin de la source par exemple) fera apparaître deux pics. En revanche, à fort taux de comptage les impulsions s'empilent fortement (qu'elles correspondent au fond Compton ou à un pic photoélectrique) et on voit apparaître des pics parasites aux énergies  $2Y$ ,  $Y + Y'$ ,  $2Y'$ ,  $2Y + Y'$ ,  $Y + 2Y'$ ,  $3Y$ , et d'une manière générale aux énergies correspondant à toutes les combinaisons linéaires de  $Y$  et  $Y'$ . On comprend aisément que ces pics parasites risquent de passer pour des radio-nucléides par la suite. On pourra également remarquer que le fond continu montré dans la Figure 1.8 s'empile également avec lui-même.
2. Le phénomène d'empilements « cache » l'arrivée de certains photons, par conséquent le nombre apparent de photons incidents est plus petit que le nombre réel. Par conséquent, cela se traduit par une sous-estimation de l'activité de la source, si on la mesure naïvement<sup>4</sup>.

La Figure 1.10 illustre la distortion du spectre en énergie apporté par le phénomène des empilements d'impulsions ; dans cette simulation, nous avons tiré les durées des impulsions électriques suivant une loi Gamma incomplète, et leurs énergies suivant le spectre simulé de la Figure 1.1-(a), et nous avons associé ces marques aux points d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda = 0.04$ . Nous pouvons constater que le fond Compton s'empile avec lui-même, ce qui peut s'avérer gênant si l'on cherche à retrouver au niveau des hautes énergies des pics du même ordre de grandeur que le fond empilé ; plus gênant encore, on observe dans le spectre en énergie des pics ne correspondant à aucun élément physique, qui nuisent à l'identification de radio-nucléides.

L'objectif de cette thèse est de développer des méthodes de correction concernant ce problème. Dans le prochain paragraphe, nous présentons les méthodes ayant déjà été développées pour corriger ces différents types de perturbations.

<sup>4</sup>C'est-à-dire en faisant le rapport du nombre apparent de photons sur la durée de l'acquisition.

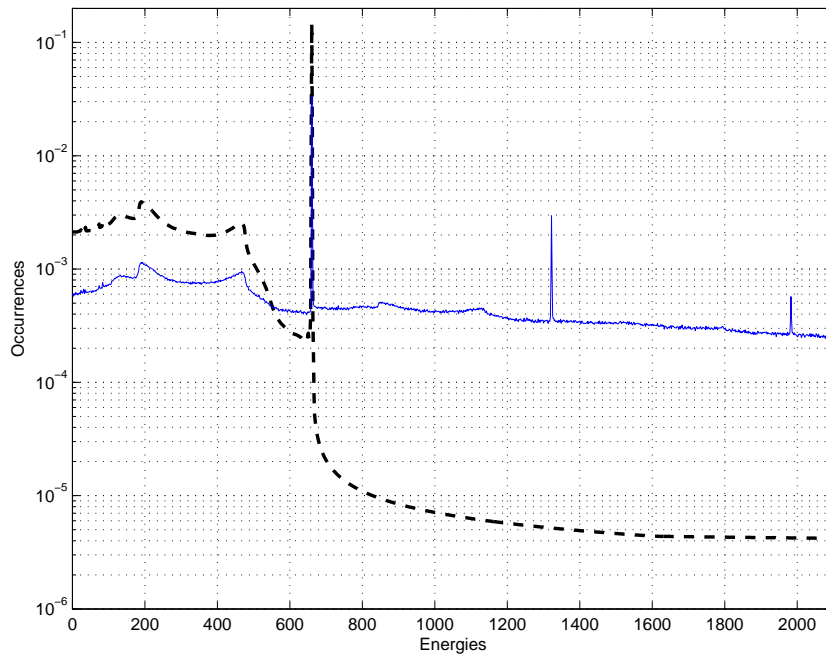


FIG. 1.10 – Comparaison entre un spectre de Césium 137 à bas taux de comptage (pointillés) et à taux de comptage élevé (phénomène d'empilements).

## 1.4 État de l'art

Comme nous l'avons dit précédemment, le phénomène des empilements d'impulsions photoniques introduit l'apparition de pics multiples dans l'histogramme des énergies, et également un biais au niveau de l'estimation de l'activité de la source. Dans cette partie, nous présentons brièvement les méthodes existant pour traiter ces deux types de perturbations décrites dans 1.1. L'objectif de cette thèse étant de proposer des méthodes de correction pour le problème des empilements d'impulsions photoniques, nous insisterons en particulier sur l'état de l'art dans ce domaine. Nous verrons dans ce paragraphe les méthodes proposées par les métrologues, qui reposent essentiellement sur l'amélioration de la chaîne d'acquisition, ainsi qu'une description des outils mathématiques proches de notre problème.

### 1.4.1 Méthodes physiques proposées pour le traitement d'empilements

Classiquement, un spectromètre effectue les opérations suivantes :

- Un filtrage linéaire qui minimise le bruit,
- Une détection des maxima du signal temporel mis en forme<sup>5</sup>,
- Une classification des valeurs de ces maxima dans un histogramme.

Cette approche est décrite par exemple dans [Knoll, 1989].

Cette approche conduit à un compromis qui lui est spécifique. En effet, le filtrage est d'autant plus efficace (et donc la résolution d'autant meilleure) qu'il opère sur un long horizon du fait de la nature du bruit et donc augmente la durée des impulsions. Lorsque l'activité de la source est faible, on peut donc effectuer un filtrage optimal qui augmente la durée des impulsions avec un faible risque de créer des empilements. En revanche, lorsque l'activité de la source est plus forte, l'horizon de filtrage doit être raccourci pour limiter la proportion des empilements (on parle de *correction du temps actif*), ce qui a pour conséquence de réduire l'efficacité du débruitage et donc la résolution de spectre finalement obtenu. En résumé, la résolution de ce type de spectromètre se dégrade donc lorsque l'activité de la source augmente. Nous verrons dans ce paragraphe que si la correction du temps actif a été souvent

<sup>5</sup>si la forme des impulsions est constante, le maximum d'une impulsion est proportionnel à son intégrale.

étudiée, celle du traitement des empilements d'impulsions photoniques reste à notre connaissance assez sommaire.

### Méthodes empiriques et analogiques

De nombreuses méthodes ont été proposées dans le cadre de l'instrumentation de physique nucléaire afin d'atténuer ou de corriger le phénomène des empilements d'impulsions. Ce problème a été tout d'abord introduit dans le cadre de l'étude de la mesure des demi-vies des éléments radioactifs. En effet, le phénomène d'empilements d'impulsions photoniques « cache » les instants d'arrivée de certains photons, ce qui se traduit par une mauvaise estimation de l'intensité du processus de Poisson sous-jacent. L'utilisation de sources moins radioactives, comme cela est suggéré dans [ANSI, 1999], peut dans ce cas être une alternative dans le cadre de l'étude des demi-vies des éléments radioactifs, mais qui accroît considérablement le temps de mesure d'une part, et d'autre part sort du cadre de la spectrométrie  $\gamma$  (il ne s'agit plus ici d'identification de radio-nucléides inconnus), et ne sera pas détaillée ici.

On appelle *temps mort* le temps nécessaire à un système de comptage pour discriminer deux photons, c'est-à-dire l'intervalle de temps tel que deux photons incidents produisent deux pics électriques non empilés. Ce temps mort, dans le cas des compteurs de type II, est dû à l'aspect stochastique des temps d'interarrivée et à l'électronique associée au détecteur. Les méthodes proposées par les métrologues cherchent usuellement à rejeter les portions de signal correspondant à des empilements d'impulsions photoniques, et apparaissent dans la littérature sous l'appellation de « *dead-time correction* » (correction de temps-mort) ou « *pile-up rejection* » (rejet d'empilement). On distingue en physique les méthodes de correction en fonction de l'instant où l'empilement se produit, représenté dans la Figure 1.11. Un premier traitement à envisager peut être de nature empirique, et consiste par

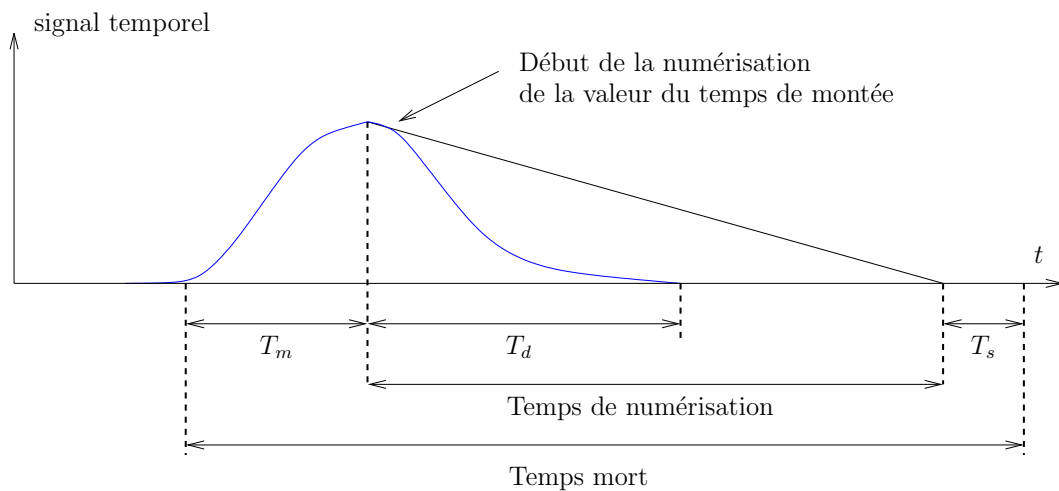


FIG. 1.11 – Représentation du temps-mort ; le temps mort est donnée par le temps de montée  $T_m$ , le temps de numérisation du convertisseur analogique-numérique et le temps de stockage des données  $T_s$  par le MCA.

exemple à calibrer le système de détection à l'aide de sources radioactives dont l'activité est connue, puis estimer la répartition de la durée des empilements, puis utiliser cette information pour des tests d'hypothèse sur le signal inconnu ; une telle approche peut par exemple être trouvée dans [Helmer, 1982]. Une procédure de calibration pour cette méthode est indiquée dans [ANSI, 1999].

Une deuxième méthode de correction des pertes de comptage repose sur l'amélioration de l'électronique du détecteur ; de nombreux réglages peuvent être faits dans la chaîne de détection au niveau de l'amplificateur, l'idée étant de faire une mise en forme courte de l'impulsion électrique générée par un photon incident. Cette mise en forme peut se faire :

- de façon analogique, à l'aide de circuits RC/CR, ou par réglage du pôle zéro « PZ »,
- à l'aide de filtres actifs ou digitaux de type circuit inhibiteur (voir par exemple [Davis and King, 1970] pour le cas des compteurs de type I),
- en combinant ces deux approches.

### Méthodes liées à l'électronique numérique

Initialement, le traitement du signal spectrométrique a été purement analogique et montre ses limites à des taux de comptage importants. L'utilisation de DSPs pour le traitement du signal échantillonné et numérisé a permis d'implémenter de nouvelles méthodes de correction d'empilements, qui sont maintenant détaillées.

Dans la plupart des convertisseurs analogiques-numériques, une porte coupe le signal temporel après le temps de montée, ce qui limite les empilements d'impulsions photoniques. Toutefois, les empilements peuvent se produire pendant le temps de montée  $T_m$  indiqué en Figure 1.11. Les méthodes dites « de correction du temps actif », dont un exemple est donné dans [Andai and Jedlovsky, 1983], consistent en un circuit réjecteur d'empilements, typiquement à l'aide d'un canal d'acquisition rapide et d'un discriminateur capable d'opérer sur des durées beaucoup plus petites que  $T_m$ . Ainsi l'apparition d'un pic pendant  $T_m$  déclenche un inhibiteur qui empêche l'acquisition des valeurs au niveau du CAN. Cette méthode présente certaines limitations : tout d'abord, le canal rapide a également un temps mort caractéristique, ce qui implique que tous les empilements ne sont pas rejetés. Cette méthode augmente ensuite le temps d'acquisition nécessaire à l'obtention d'un spectre. Enfin, le circuit réjecteur peut être plus efficace à certaines énergies qu'à d'autres, car en spectrométrie  $\gamma$  la largeur d'un pic est fonction de l'énergie photonique associée, en conséquence le temps de montée  $T_m$  est plus important aux énergies élevées.

Le développement de composants électroniques numériques très rapides élargit notablement la gamme des outils disponibles pour traiter les signaux temporels. De nombreux fabricants comme Canberra/Eurisys, Ortec ou Xia développent des spectromètres numériques. Mais les techniques de traitements des impulsions restent conceptuellement proches des méthodes classiques, car leurs approches reposent toujours sur un filtrage linéaire non récursif de type RIF (Réponse Impulsionnelle Finie). Ainsi, le « Digital Gamma Finder » de Xia repose sur ces bases. On pourra se référer pour plus de détails aux brevets [Warburton and Hubbard, 1997], [Warburton, 1998] et [Warburton and Zhou, 1999] de Xia, ou au brevet [Gehrk *et al.*, 1993] de Canberra/Eurisys.

Différentes méthodes d'élimination des pics multiples ont été proposées : elles peuvent se baser sur l'analyse de la forme du signal détecté (on pourra par exemple se référer au brevet [Jorion and Stoller, 1999] et au papier de [Bamford *et al.*, 1991]), sur la comparaison de l'énergie cumulée par rapport à un seuil déterminé (voir par exemple les brevets [Seeman and Bronislaw, 1991] et [Mott *et al.*, 1994]). Néanmoins, ces méthodes dépendent fortement du type de détecteur utilisé, et sont finalement peu robustes à des taux de comptage élevés.

#### 1.4.2 Méthodes physiques proposées pour la correction du taux de comptage

Le LFC (*Loss Free Counting*) est le terme employé usuellement en spectrométrie pour décrire les compensations du temps mort. L'objectif est ici de s'assurer que, à la fin de chaque intervalle d'acquisition de données, tous les événements ont bien été comptés indépendamment du temps mort et des événements rejetés car correspondant à des empilements. Toutes les méthodes développées dans ce cadre reposent sur le principe suivant : lorsqu'un événement est recensé dans un canal du MCA, on compte un événement supplémentaire dans le canal associé et l'on rajoute un facteur de poids représentant le nombre d'événements perdus depuis la dernière acquisition dans ce canal. L'objectif de ces méthodes est donc de corriger le biais qu'apportent les phénomènes de temps mort et d'empilements dans l'estimation du taux de comptage d'une source.

Une des premières méthodes introduite dans ce cas est appelée « pulser method ». Dans ce cadre, un train d'impulsions tests connu est envoyé dans le préamplificateur. Le terme correctif évoqué au

paragraphe précédent s'obtient en comparant le nombre d'impulsions rejetées et le nombre d'impulsions traitées pour ce train d'impulsions. Cette méthode peut s'implémenter en utilisant un train périodique d'impulsions de forme et d'amplitude connues (voir par exemple [Bolotin *et al.*, 1970] et [Johnson *et al.*, 1981]), un train non-périodique (voir [Wiernik, 1971]) ou un train d'impulsions correspondant à des énergies d'éléments radioactifs connus, comme dans [Hartwell and Goodwin, 1989]. Les problèmes que l'on rencontre lors de l'application de cette méthode sont de plusieurs ordres :

1. les impulsions générées peuvent interférer avec des pics photoélectriques,
2. tous les événements générés sont distordus par l'amplificateur, qui n'est pas adapté pour ces impulsions,
3. les impulsions générées modifient par essence le taux de comptage.

C'est afin de pallier ces trois problèmes cités que la méthode VPG (*Virtual Pulse Generator*) a été introduite dans [Westphal, 1982] et [Westphal, 1984]. Cette méthode est efficace à des taux de comptage de l'ordre de  $10^5$  coups/seconde, et peut en outre servir par extension pour le rejet d'empilements d'impulsions photoniques, couplé avec un circuit inhibiteur du type de [Andai and Jedlovsky, 1983]. L'idée principale consiste à augmenter artificiellement le temps d'occupation du MCA par le temps de montée d'un pic photoélectrique avant de faire le rapport des deux compteurs toutes les dizaines de microsecondes pour obtenir les termes correctifs.

On peut noter aussi l'existence d'une technique récente qui apparaît dans le brevet [De Antoni *et al.*, 1998] pour corriger les distorsions apportées par certains types détecteurs (Tellure de Cadmium ou CdTe). Ces détecteurs ne fournissent pas des impulsions dont la surface est proportionnelle à l'énergie déposée par le photon incident. La surface de l'impulsion dépend aussi du point d'interaction dans le détecteur. Les inventeurs ont remarqué expérimentalement que l'énergie déposée par le photon pouvait être estimée à partir de la mesure de la surface et du temps de montée de l'impulsion. Ils proposent donc d'estimer le spectre gamma à partir de l'histogramme à deux dimensions surface/temps de montée des impulsions. Nous insistons toutefois sur le fait que cette méthode repose sur des résultats expérimentaux et non théoriques. Néanmoins, ces résultats expérimentaux peuvent être utilisés pour une modélisation jointe forme-énergie, ainsi qu'on peut par exemple la retrouver dans [Montémont *et al.*, 2000] qui propose une estimation conjointe de la forme d'un pic photonique et de son amplitude via une méthode bayésienne.

Enfin, une autre piste qui a été explorée sur le LFC repose sur des méthodes dites « analytiques », c'est-à-dire cherchant une relation explicite entre les observations et la probabilité pour qu'une énergie soit enregistrée dans un canal du MCA. Ces méthodes, qui sont détaillées dans [Coates, 1972] et [Coates, 1992], reposent sur des approximations (notamment des troncatures de sommes infinies pour simplifier certains calculs) et ne seront pas détaillées ici ; toutefois, [Coates, 1992] note que les méthodes analytiques présentent de nombreux avantages ; tout d'abord, il n'est pas besoin dans ce type de correction de faire des *a priori* sur la loi des durées des impulsions, ce qui rend ce type de méthodes applicable dans un grand nombre d'expériences métrologiques. Ensuite, les méthodes analytiques ne nécessitent pas de composants électroniques de pointe, puisqu'elle peuvent être implémentées sur un ordinateur, et peuvent servir en complément des techniques instrumentales pour les valider. Enfin, ce type de traitement des données peut être fait hors-ligne en post-traitement, contrairement aux méthodes temps-réel de type VPG, ce qui peut être un avantage pour le traitement de données anciennes.

### Limitations des méthodes proposées

Les méthodes proposées par les métrologues sont efficaces à des taux de comptage modérés, bien que certaines méthodes de correction de temps actif (telles que la méthode VPG) soient efficaces à des taux de comptage élevés, de l'ordre de  $10^5$  coups / seconde (les limites précises en terme de taux de comptage sont détaillées dans [ANSI, 1999]). Elles présentent toutefois des limitations lorsque l'activité de la source radioactive devient plus importante. Nous détaillons à présent les causes de ces limitations, qui sont à la base de notre étude et des méthodes proposées dans cette thèse.

Tout d’abord, il est important de constater que les méthodes précédemment décrites se bornent à rejeter les événements correspondant à des empilements de pics photoniques. Il s’agit ici d’un traitement rudimentaire, basé sur l’*a priori* que les événements prépondérants sont les pics photoniques simples. Cette heuristique est évidemment fautive lorsque le taux de comptage devient important, et rallonge dans ce cas considérablement le temps d’acquisition du signal. De même, les méthodes de correction de temps actif cherchent à rajouter un terme correctif, sans véritablement chercher à traiter le signal photonique plus en amont.

Il convient également de souligner que les méthodes de rejet proposées sont dépendantes de la chaîne d’acquisition, car elles consistent le plus souvent en une amélioration de l’électronique au niveau de l’amplificateur, et du détecteur. Considérons par exemple le rejet d’événements par une analyse de forme de type décrit par exemple dans [Bamford *et al.*, 1991] : la méthode proposée dans cet article peut être utilisée pour rejeter les empilements (voir par exemple le brevet [Jorion and Stoller, 1999] pour une application), mais elle nécessite un apprentissage préliminaire et par conséquent ne peut être appliquée pour tout type de détecteur. En outre, la forme d’une impulsion photonique dépend d’un certain nombre de paramètres physiques : citons par exemple le point d’interaction du photon avec le détecteur et la géométrie du détecteur. Ces paramètres physiques peuvent être difficiles à modéliser, il apparaît donc délicat d’utiliser des méthodes qui en dépendent. Un exemple de paramètre physique négligé, dans le cas des détecteurs HPGe, est la durée d’une impulsion photonique, car énergie et durée sont corrélées pour ce type de détecteur.

Enfin, il faut remarquer que les méthodes proposées pour la correction de temps mort sont pour la plupart déterministes : les aspects les plus importants du signal photonique sont en effet stochastiques (temps d’interarrivées exponentiels, énergie suivant une variable aléatoire), et ne peuvent par nature être pris en compte lors de l’amélioration de l’électronique de la chaîne d’acquisition. Dans le cadre du rejet des empilements d’impulsions photoniques, l’aspect stochastique est lui faiblement pris en compte dans l’apprentissage de la forme de l’impulsion, dont on a vu qu’elle dépendait d’un grand nombre de paramètres physiques. Or, puisque l’on peut modéliser les temps d’arrivée des photons dans le détecteur par un processus de Poisson, l’utilisation des propriétés probabilistes d’un tel modèle permettrait sans doute d’améliorer l’état de l’art.

Récemment, les physiciens se sont interrogés sur l’influence des circuits rejeteurs d’empilements sur le processus de Poisson incident d’un point de vue plus théorique. On peut par exemple insister sur les articles de Pommé, qui couvrent l’ensemble du problème et se rapprochent de l’état de l’art en mathématique sur ce problème, qui sera développé dans le paragraphe suivant. Comme le remarque en effet Pommé dans [Pommé *et al.*, 1999a], si un grand travail a été accompli vis-à-vis de la correction de temps mort, le phénomène des empilements n’a pas fait l’objet d’études aussi approfondies. Tout d’abord en se basant sur des simulations dans [Pommé, 1998], puis sur des considérations théoriques détaillées dans [Pommé *et al.*, 1999b; Pommé, 1999a; Pommé, 1999b], Pommé établit en se basant sur des calculs dans le domaine symbolique des transformées de Laplace de nouvelles formules pour calculer l’incertitude sur la mesure du taux de comptage dans le cas d’une utilisation de circuit rejeteur d’empilements. En tant que telles, ces contributions montrent la nécessité d’utiliser d’autres outils que ceux de l’état de l’art pour mieux appréhender le phénomène des empilements d’impulsions photoniques.

Au terme de la revue des méthodes existant dans le cadre de la spectrométrie  $\gamma$ , nous avons pu constater que le problème des empilements n’a pas été traité en tant que tel, bien qu’il soit une des principales causes de distortion de spectre dans les chaînes de spectrométrie rapides actuelles. Il apparaît également que l’utilisation d’outils mathématiques plus fins permettrait une meilleure compréhension de ce problème. Le problème des compteurs de type I et II a par ailleurs été étudié d’un point de vue probabiliste et statistique comme étant un problème de déconvolution de densité particulier, ce qui a permis l’émergence d’autres types de méthodes dont on retrouve l’ébauche dans [Pommé, 1999b]. Cet autre point de vue est décrit dans le paragraphe suivant.

### 1.4.3 Cadre mathématique du problème : l'analogie avec la théorie des files d'attente

Les modèles des compteurs de type I et de type II ont été étudiés du point de vue des processus ponctuels dès le début des années 1950 ; ainsi, Albert et Nelson se sont intéressés dans [Albert and Nelson, 1953] à l'estimation du taux de comptage  $\lambda$  du processus de Poisson sous-jacent du signal photonique, et ont proposé une estimation de  $\lambda$  à partir d'un modèle général dont les compteurs de type I et II sont des cas particuliers. A partir de ce modèle, Takacs établit dans [Takacs, 1958] une relation entre la transformée de Laplace de la mesure de probabilité associée aux séquences *busy* et celle associée à la durée des temps de service. Ces résultats peuvent être utilisés pour obtenir des estimateurs de  $\lambda$ . Plus récemment, Dvurecenskij et Ososkov ont établi dans [Dvurecenskij and Ososkov, 1984] et [Dvurecenskij and Ososkov, 1985] des relations permettant de déterminer dans le cas des compteurs de type II la loi du nombre de photons dans une séquence *busy*, ce qui apporte une première réponse au problème de l'estimation du taux de comptage.

Le problème des empilements d'impulsions photoniques présente également une très forte analogie avec les problèmes d'estimation du temps de service des files M/G/ $\infty$ , et de nombreuses méthodes ont été proposées dans ce cadre. Nous décrivons dans ce paragraphe ce problème relié à la théorie des files d'attente, ainsi que les solutions apportées.

On considère en théorie des files d'attente les problèmes liés au temps d'occupation des serveurs. Chaque client est caractérisé par son instant d'arrivée et le temps de service (le temps d'occupation du serveur par ce client). On pourra se référer à [Baccelli and Brémaud, 2002] pour une étude exhaustive de ce cadre, lié à l'étude des processus ponctuels. On appelle file d'attente M/G/ $\infty$  une file d'attente caractérisée par :

- des instants d'interarrivée entre clients successifs indépendants et suivant une loi exponentielle (le « M » de la dénomination pour Markov),
- une loi de temps de service quelconque (le « G » de la dénomination pour General),
- un nombre infini de serveurs (à savoir qu'il n'y a pas de temps d'attente entre l'arrivée d'un client et le traitement de sa requête, le «  $\infty$  » de la dénomination).

Le problème qui se pose ici est de retrouver, à partir d'observations des séquences d'occupation de la file d'attente (ou séquences *busy*), la loi du temps de service. Ce problème, initialement traité par [Pyke, 1958] dans le cas de processus ponctuels quelconques, permet d'établir dans le cas des compteurs de type II une relation entre la transformée de Laplace de la loi des temps de service et celle de la loi des séquences d'occupation de la file d'attente. Le résultat suivant, qui est un cas particulier, est dû à Takacs [Takacs, 1962] :

**Théorème 1.4.1 (Relation sur les durées dans le problème des compteurs de type II).**

Soit  $(N_t)$  un processus de Poisson homogène marqué, d'intensité associée  $\lambda$ , de marque associée  $X$  représentant le temps de service d'un client. On note  $P$  la mesure de probabilité associée à  $X$ , et l'on note  $X'$  la variable aléatoire symbolisant la durée des séquences d'occupation de mesure de probabilité associée  $P'$ , alors on a l'égalité suivante pour tout complexe  $s$  tel que  $\text{Re}(s) > 0$  :

$$\int_0^{+\infty} e^{-s\tau} \exp\left(-\lambda\tau + \lambda \int_0^\tau \left\{ \int_0^u P(dx) \right\} du\right) d\tau = \frac{1}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s)},$$

où  $\mathcal{L}P'(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left(e^{-sX'}\right)$  est la transformée de Laplace associée à la mesure  $P'$ .

Une démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [Hall, 1988, Chapitre 2]. Le théorème 1.4.1 permet donc d'avoir une relation fonctionnelle entre les observations  $X'$  et la loi de la variable aléatoire d'intérêt  $X$ . En ce basant sur ce résultat, le problème peut être formulé comme un problème inverse non-linéaire, à savoir qu'il existe deux fonctionnelles  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  telles que :

$$\mathcal{F}(P) = \mathcal{G}(P') ;$$

l'objectif est alors de retrouver  $P$  à partir de cette relation et d'un échantillon de  $X'$ . Dans ce cadre, le problème a fait l'objet d'études statistiques plus approfondies. Dans le cadre de l'étude de signaux biologiques, [Bingham and Pitts, 1999] se sont ainsi intéressés à l'estimation non-paramétrique de la fonction de répartition de  $X$ , à partir des observations de  $X'$ , et Hall et Park ont proposé dans [Hall and Park, 2004], dans le cas où la variable  $X$  admet une densité de probabilité, une méthode d'estimation non-paramétrique de la densité de  $X$ .

Remarquons finalement que le problème du traitement des empilements d'impulsions présente une forte analogie avec l'étude de la file d'attente  $M/G/\infty$ , au sens où l'infinité de serveurs peut être comparé au détecteur, les photons aux clients de la file d'attente et la durée des impulsions électriques à la durée des temps de service ; ceci donne des indications sur la façon de traiter le problème, mais il existe toutefois deux différences fondamentales. Tout d'abord, dans le cadre de la théorie des files d'attente, on s'intéresse uniquement à la durée des séquences *busy*, tandis que dans notre cas durées et énergies des impulsions photoniques sont corrélées. Plus important, l'information d'intérêt se trouve plutôt dans l'énergie du photon, notre problème est donc plutôt d'estimer la densité de probabilité associée à la distribution des énergies.

## 1.5 Apports de la thèse

### 1.5.1 Problématique

Ainsi que nous l'avons vu dans la partie 1.4, des améliorations au niveau de l'instrumentation ont été proposées par les physiciens pour prendre en compte le phénomène des empilements d'impulsions photoniques. D'autre part, sous réserve que nous nous intéressions uniquement aux durées de ces impulsions, ce problème a été étudié de manière exhaustive du point de vue probabiliste et statistique. Néanmoins, le problème associé à l'énergie des photons, qui est l'information la plus importante pour l'identification des radionucléides, n'a à notre connaissance pas été abordé. Nous pouvons toutefois retenir de l'existant que l'utilisation plus poussée des propriétés stochastiques du signal permettraient de mieux appréhender le problème, et que l'obtention d'une méthode analytique permettrait de traiter *a posteriori* des ensembles de données.

L'objectif que nous nous fixons dans cette thèse est par conséquent d'apporter une réponse aux questions suivantes :

- Q1 Existe-t-il un modèle prenant en compte les aspects stochastiques du signal photonique plus adapté au traitement du problème des empilements, et prenant en compte un minimum de paramètres physiques ?**
- Q2 Existe-t-il une méthode analytique basée sur ce modèle qui permette, non pas de rejeter les empilements d'impulsions photoniques, mais de les traiter ?**
- Q3 Quelles sont les performances d'une telle méthode ?**

### 1.5.2 Méthodes proposées et résultats obtenus

Afin de traiter le problème des empilements, en nous basant sur l'analogie existant entre ce problème et l'estimation de la loi de temps de service pour une file d'attente  $M/G/\infty$ , nous cherchons à modéliser le signal avec un minimum de variables aléatoires dépendant de paramètres physiques. Nous proposons un modèle basé sur deux processus ponctuels :

- un processus de Poisson sur  $\mathbb{R}_+$  homogène d'intensité  $\lambda$  (inconnue) marqué  $\{T_n, (X_n, Y_n)\}_{n \in \mathbb{N}_+}$  non directement observable, où  $T_n$  est l'instant d'arrivée du  $n$ -ième photon,  $X_n$  est la durée de l'impulsion électrique associée à ce photon et  $Y_n$  son énergie intégrale (ce qui correspond en pratique à l'utilisation d'un détecteur HPGe), sous les hypothèses d'indépendance de  $(X, Y)$  par rapport aux  $\{T_k, k \in \mathbb{N}_+\}$  et des  $(X_k, Y_k)$  entre eux,

- un processus ponctuel marqué  $\{T'_n, (X'_n, Y'_n)\}_{n \in \mathbb{N}_+}$  observé, où  $T'_n$  est l'instant d'arrivée du  $n$ -ième empilement<sup>6</sup>,  $X'_n$  est la durée de cet empilement et  $Y'_n$  son énergie intégrale. On note également  $Z_n$  la durée de la  $n$ -ième séquence *idle*. On construit de la sorte un processus de renouvellement.

L'objectif est ici de déterminer un estimateur de la loi de  $Y$ . Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'aspect probabiliste du problème ; en introduisant la fonction auxiliaire :

$$\rho(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(S_x = 0, \bar{E}_x \leq y) ,$$

avec

$$\bar{E}_x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} Y_n \mathbb{1}_{[0; x]}(T_n) ,$$

et  $S_x$  le signal temporel à l'instant  $x$ , nous montrons le résultat suivant sous des hypothèses peu restrictives détaillées dans le Chapitre 2 :

Pour tout  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \text{Re}(z_1) > 0, \text{Re}(z_2) \geq 0\}$  :

$$\int_{x=0}^{+\infty} e^{-sx} e^{-\lambda x} \left[ \exp \left( \lambda \int_{y=0}^{\infty} \left\{ \int_{\tau=0}^x (x-\tau) f(\tau, y) d\tau \right\} e^{-py} dy \right) - 1 \right] dx = \frac{1}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s, p)} \frac{\mathcal{L}P'(s, p)}{(s + \lambda)} , \quad (1.2)$$

où  $f$  est la densité de probabilité associée à  $(X, Y)$  et  $\mathcal{L}P'$  est la transformée de Laplace de la mesure de probabilité associée à  $(X', Y')$ . La relation (1.2) permet par conséquent de relier la loi de nos observations à la loi des énergies photoniques que l'on cherche à estimer. Dans le cas de signaux échantillonnés à une fréquence  $T_e^{-1}$  et quantifiés, les hypothèses que nous faisons concernant  $f$  ne tiennent plus (on ne peut plus dire que  $(X, Y)$  admet une densité), mais en adaptant le modèle, nous obtenons la relation suivante :

Pour tout  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \text{Re}(z_1) > 0, \text{Re}(z_2) \geq 0\}$  :

$$\sum_{m \geq 0} s^m \exp \left( -\lambda T_e \left( m - \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{m-j} f(i, n) \right) p^n \right) \right) = \frac{1}{1 - (e^{-\lambda T_e} s + (1 - e^{-\lambda T_e}) s \mathcal{T}Z(P'))(s, p)} , \quad (1.3)$$

où  $f$  et  $P'$  désignent cette fois des lois discrètes et  $\mathcal{T}Z(P')$  la transformée en  $Z$  de  $P'$ .

Les relations (1.2) et (1.3) permettent de concevoir le problème de la correction d'empilements comme un problème de déconvolution de densité dans un cadre non-linéaire, ce qui nous pousse dans la suite à utiliser une approche par inversion directe de ces relations. Nous nous intéressons à l'estimation non-paramétrique de la densité marginale  $m$  des  $Y$ , étant donné un  $N$ -échantillon de  $\{(X'_k, Y'_k, Z_k)\}_{1 \leq k \leq N}$ . Comme l'inversion directe débouche sur un problème numériquement mal conditionné, nous proposons l'estimateur  $\hat{m}_{T, h, n}(y)$  suivant :

<sup>6</sup>Qui peut éventuellement correspondre à une impulsion électrique individuelle...

$$\hat{m}_{T,h,n}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\hat{I}_{1,n}(T, i\nu) + \hat{I}_{2,n}(T, i\nu)}{\hat{a}_n(T, i\nu)} \right] K^*(h\nu) e^{i\nu y} d\nu, \quad (1.4)$$

avec

$$\hat{\lambda}_n = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k \right)^{-1}$$

$$\mathcal{L}\hat{P}'_n(c + i\omega, i\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-(c+i\omega)X'_k - i\nu Y'_k}$$

$$\hat{a}_n(T, i\nu) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\lambda}_n \mathcal{L}\hat{P}'_n(c + i\omega, i\nu)}{c + i\omega + \hat{\lambda}_n} \frac{e^{(\lambda+c+i\omega)T}}{c + i\omega + \hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_n \mathcal{L}\hat{P}'_n(c + i\omega, i\nu)} d\omega$$

$$\hat{I}_{1,n}(T, i\nu) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X'_k \leq T\}} e^{\hat{\lambda}_n X'_k - i\nu Y'_k}$$

$$\hat{I}_{2,n}(T, i\nu) = \frac{\hat{\lambda}_n e^{(c+\hat{\lambda}_n)T}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{L}\hat{P}'_n(c + i\omega, i\nu))^2}{c + i\omega + \hat{\lambda}_n} \frac{e^{i\omega T}}{c + i\omega + \hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_n \mathcal{L}\hat{P}'_n(c + i\omega, i\nu)} d\omega$$

La dérivation d'un tel estimateur permet donc de traiter en pratique à partir d'observations de  $(X', Y')$  le problème de l'estimation de la loi des énergies  $Y$ . Nous avons également vérifié que cet estimateur était consistant, et nous avons établi sous certaines hypothèses qui seront détaillées dans le Chapitre 3 un résultat sur la vitesse de convergence de l'estimateur  $\hat{m}_{T,h,n}$ , à savoir :

$$\forall \alpha > 0, \quad \|m - \hat{m}_{T_n, h_n, n}\|_2^2 = O_{\mathbb{P}} \left( n^{-\frac{2\beta}{2\beta+1} + \alpha} \right) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (1.5)$$

La relation 1.5 montre que la vitesse de convergence de notre estimateur est aussi proche qu'on le souhaite de la vitesse minimax  $n^{-\beta/(2\beta+1)}$  que l'on obtiendrait si l'on estimait directement la loi de  $Y$  dans le cadre de l'estimation non-paramétrique standard. Sous des hypothèses un peu plus restrictives mais physiquement plausibles, on peut montrer que le terme  $n^\alpha$  peut être remplacé par  $\ln n$ , ce qui rapproche encore de la vitesse optimale.

### 1.5.3 Plan de la thèse

Le Chapitre 2 est consacré à la question Q1 ; en introduisant un nouveau modèle basé sur l'étude de deux processus ponctuels marqués, nous établissons des équations pouvant être utilisées pour relier la loi des énergies des impulsions et la loi des énergies des séquences *busy* associées, dans le cas de signaux à temps continu et à temps discret, en se basant uniquement sur les informations de durée et d'énergie des impulsions photoniques et sur les temps de non-occupation ou *idle* du détecteur, montrant ainsi que le Théorème 1.4.1 peut être étendu pour être appliqué à la spectrométrie. Ceci va permettre d'établir, dans le Chapitre 3, un estimateur de la densité de probabilité associée aux énergies des photons, et d'étudier ainsi ses performances, ce qui permettra de répondre aux questions Q2 et Q3. Les résultats, tant sur des données simulées que sur des données réelles, sont présentés dans le Chapitre 4.

Les annexes développent des aspects connexes au modèle proposé et à la démarche adoptée. L'Annexe A présente un algorithme permettant de construire un estimateur de la loi des énergies discrétisées. L'annexe B présente un certain nombre de résultats sur la transformée de Laplace et sur son inversion théorique et pratique, qui seront utilisés pour la construction de notre estimateur. D'autre part, nous verrons que la problématique du choix de l'estimateur diffère sensiblement suivant que l'on considère un modèle continu ou discret, le problème étant mieux conditionné dans ce dernier cas. Dans l'annexe C, nous discutons de l'influence du bruit additif dans notre modèle et proposons une méthode de

débruitage pouvant être utilisée en prétraitement des algorithmes utilisés pour la correction d'empilements. Enfin, l'Annexe D étend certains résultats du Chapitre 3 pour atteindre la vitesse optimale de convergence dans des espaces de Sobolev.

## 1.6 Publications

Le contenu des chapitres de cette thèse a fait l'objet d'articles publiés ou bien en cours de publication. Nous donnons les titres de ces publications ci-dessous, ainsi qu'une brève description de leur contenu et les Chapitres qui leur sont associés.

### 1.6.1 Articles de revue — Articles de journaux

1. **Nonparametric Inference about Photon Energy from Indirect Measurements** (T. Trigano, F. Roueff, E. Moulines et A. Souloumiac) — Soumis à *Bernoulli* : cet article traite du modèle continu, dont l'étude probabiliste et détaillée dans la deuxième partie du Chapitre 2, et couvre dans un cadre un peu plus général l'ensemble des résultats statistiques obtenus dans le Chapitre 3. Cet article est reproduit en Annexe D.
2. **Analytical Pileup Correction Method for HPGe Detectors** (T. Trigano, A. Souloumiac, T. Montagu, E. Barat, T. Dautremer, F. Roueff et E. Moulines) — En cours d'écriture pour soumission à *Inverse Problems* : cet article détaille l'utilisation de l'estimateur introduit au Chapitre 3 sur des signaux réels obtenus par le système ADONIS du CEA Saclay, partie détaillée au Chapitre 4.

### 1.6.2 Brevet

1. **Mesure et Traitement d'un Signal Comprenant des Empilements d'Impulsions Élémentaires** (T. Trigano, E. Barat, T. Dautremer et T. Brisset) — Brevet Français 2 870 603, extension européenne en cours, 2005 : ce brevet a pour base le modèle à temps discret et la formule établie pour ce modèle au Chapitre 2. Il détaille un algorithme pratique lié à cette formule. Le texte de ce brevet est reproduit en Annexe A.

### 1.6.3 Articles de conférence avec comité de lecture

1. **Pileup Correction Algorithms for Nuclear Spectrometry** (T. Trigano, E. Barat, T. Dautremer et A. Souloumiac) — in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2005 : cet article compare les performances de l'algorithme de désempilement à temps discret introduit en Annexe A à l'algorithme dérivant de l'estimateur "naïf" introduit au Chapitre 3. Cette problématique est détaillée au Chapitre 4.
2. **Nonparametric Inference for Pileup Correction in Nuclear Spectrometry** (T. Trigano, A. Souloumiac, E. Moulines et F. Roueff) — in *IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, 2005 : cet article introduit l'estimateur  $\hat{m}_{T,h,n}$  défini au Chapitre 3 et étudie numériquement ses performances sur des simulations. Cette partie est détaillée au Chapitre 4.
3. **Analytical Energy Spectrum Reconstruction for HPGe Detectors in Gamma Spectrometry** (T. Trigano, F. Roueff, E. Moulines, T. Montagu et A. Souloumiac) — in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2006 : Ce papier décrit des résultats sur données réelles obtenus en utilisant l'estimateur  $\hat{m}_{T,h,n}$ . Ces résultats sont redonnés au Chapitre 4

### 1.6.4 Rapports Techniques

1. **Étude Probabiliste de Signaux Spectrométriques : Méthode de désempilement de spectre en énergie pour la spectrométrie  $\gamma$**  (T. Trigano, E. Barat et T. Dautremer) —

Rapport Technique CEA n° 03 – 018, 2003 : ce rapport présente les modèles introduits au Chapitre 2, et les performances de l'algorithme dérivant du modèle discret pour des données simulées et des données réelles, que l'on retrouve au Chapitre 4.

2. **Étude de l'Inversion Numérique de la Transformée de Laplace : Applications à un algorithme de désempilement à temps continu pour la spectrométrie  $\gamma$**  (T. Trigano) — Rapport Technique CEA n° 04 – 015, 2004 : ce rapport justifie le choix de l'algorithme associé à l'estimateur  $\hat{m}_{T,h,n}$  défini au Chapitre 3. Ces justifications sont détaillées en Annexe B.
3. **Méthodes de déconvolution de densités discrètes : Applications d'algorithmes à gradient multiplicatif pour la spectrométrie  $\gamma$**  (T. Trigano) — Rapport Technique CEA n°05 – 031, 2005 : ce rapport s'intéresse au bruit additif et aux moyens de réduire les nuisances qu'il apporte. Nous proposons une méthode améliorant sensiblement les performances de nos algorithmes, qui est décrite en Annexe C.

## Chapitre 2

# Traitement probabiliste des empilements d'impulsions

« *Le phénomène passe. Je cherche les lois.* »

LAUTREAMONT, « *Poésies* », 1870.

### Sommaire du chapitre

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Description du modèle — Premières propriétés</b>        | <b>23</b> |
| 2.1.1      | Modélisation d'une impulsion photonique                    | 24        |
| 2.1.2      | Modélisation d'une séquence d'occupation                   | 25        |
| 2.1.3      | Premières propriétés                                       | 26        |
| <b>2.2</b> | <b>Formule de désempilement à temps continu</b>            | <b>33</b> |
| 2.2.1      | Choix de la grandeur d'intérêt                             | 33        |
| 2.2.2      | Détermination de la loi d'un cycle                         | 33        |
| 2.2.3      | Calcul de $\rho(x, y)$ à l'aide des séquences <i>busy</i>  | 35        |
| 2.2.4      | Calcul de $\rho(x, y)$ à l'aide des impulsions photoniques | 36        |
| <b>2.3</b> | <b>Formule de désempilement à temps discret</b>            | <b>39</b> |
| 2.3.1      | Description du modèle discret                              | 39        |
| 2.3.2      | Établissement de la formule de désempilement discret       | 42        |
| <b>2.4</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>46</b> |

---

LE CHAPITRE 1 établit la nécessité d'introduire un nouveau modèle du signal photonique, prenant davantage en compte son aspect stochastique, ce qui est l'objectif de ce chapitre. La première partie de ce chapitre introduit le modèle et les hypothèses faites, en considérant une impulsion comme un couple énergie-durée, basé sur deux processus ponctuels marqués, dont nous dégageons également certaines propriétés; nous introduisons également la terminologie qui sera utilisée dans la suite. En nous basant sur [Takacs, 1962, Chapitre 3] et [Bingham and Pitts, 1999], qui ont fait l'étude d'un signal similaire mais en ne considérant que les durées des impulsions, nous en déduisons ensuite, dans la deuxième partie, une formule de désempilement sur le signal à temps continu qui peut être vue comme une extension du Théorème 1.4.1. En pratique, les signaux spectrométriques actuels sont souvent échantillonnés et numérisés, les durées et énergies des impulsions photoniques n'ont donc plus une densité de probabilité; nous proposons donc également dans la troisième partie de ce chapitre une adaptation de la formule précédente à temps discret.

## 2.1 Description du modèle — Premières propriétés

Les photons  $\gamma$  interagissant avec le semi-conducteur d'un détecteur créent des milliers de paires électron-trou, qui en migrant provoquent une variation de tension. Cette variation, de forme impulsionnelle, est enregistrée par le détecteur. En pratique, comme indiqué dans [Knoll, 1989] une impulsion

peut être de forme variable, car elle dépend de l'interaction du photon avec le détecteur ; la source radioactive émettant aléatoirement ses photons, le temps d'arrivée sur le détecteur est également aléatoire. Enfin, la durée de ces impulsions peut également être considérée comme aléatoire.

Une première modélisation de la réponse d'un détecteur spectrométrique peut être trouvée dans [Snyder, 1975, Chapitre 4], où la forme d'onde est prise fixe, et le signal photonique est modélisé par un processus de Poisson marqué et filtré. Ce modèle, également appelé « Shot-Noise », a fait l'objet d'études approfondies dans [Snyder, 1975] et [Gubner, 1996]. Toutefois, cette approche suppose connue la réponse impulsionnelle du système d'instrumentation, ce qui sort de notre cadre d'étude. Nous proposons par conséquent une autre modélisation de ce signal.

### 2.1.1 Modélisation d'une impulsion photonique

Dans toute la suite nous définissons une impulsion comme étant le signal engendré par l'arrivée d'un seul photon dans le détecteur.

Dans le cadre du problème du traitement des empilements, nous modélisons la  $n$ -ième impulsion par un triplet  $(T_n, X_n, Y_n)$ , où  $T_n$  est l'instant d'arrivée de l'impulsion,  $X_n$  sa durée,  $Y_n$  son énergie intégrale<sup>1</sup>. La Figure 2.1 montre graphiquement à quoi correspondent les grandeurs ainsi définies.

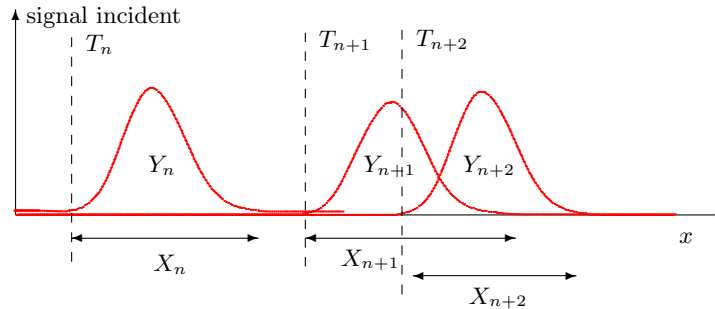


FIG. 2.1 – Représentation graphique des impulsions photoniques

Nous pouvons faire une hypothèse supplémentaire concernant les temps d'arrivée  $\{T_n\}_{n \geq 1}$ . Par construction, nous savons déjà que  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  est un processus ponctuel simple, mais la loi d'émission des photons étant connue (comme indiqué dans [Knoll, 1989] ou [Tsoulfanidis, 1995]), nous pouvons faire l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2.1.1.**  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda > 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Nous définissons le compteur associé à ce processus  $\mathcal{N}_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{[0;t]}(T_n)$ .

Dans certaines applications pratiques, ce processus de Poisson ne peut être considéré comme étant non homogène (par exemple dans le cas de mesures sur des éléments de demi-vie très courte) ; dans ce cas, sa mesure de contrôle sera notée  $\mu_T$ .

Les variables aléatoires  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  correspondent à la durée d'une impulsion, elles ne dépendent que de l'endroit du détecteur avec lequel chaque photon interagit et de l'énergie du photon, elles sont donc indépendantes du temps d'arrivée sur le détecteur. Les  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  correspondent à l'énergie d'une impulsion, elles ne dépendent *a priori* que du photon incident ; néanmoins, cette énergie est directement reliée à la durée de l'impulsion ; aucune de ces deux grandeurs ne peut être nulle. Enfin, les pics des spectres en énergie observés ont une résolution finie. Ces considérations physiques justifient les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 2.1.2.**  $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$  forme une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de même densité de probabilité  $f$ . On suppose que le support de  $f$  est inclus dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

<sup>1</sup>En toute rigueur, il faudrait en outre rajouter à cela une « forme d'onde »  $f_n$  également aléatoire pour caractériser pleinement une impulsion. Néanmoins, ce rajout alourdit considérablement l'étude et n'est pas utile pour notre problème.

**Hypothèse 2.1.3.**  $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$  et  $\{T_m\}_{m \geq 1}$  sont des suites indépendantes.

Comme nous nous plaçons dans un cadre non paramétrique, nous ne faisons aucune hypothèse quant à la densité de probabilité associée à  $Y$ . Nous nous contentons donc pour l'instant de considérer le signal photonique comme un processus de Poisson marqué  $\{T_n, (X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$  avec des marques *i.i.d.* et indépendantes des  $T_n$ . Une première innovation par rapport à l'état de l'art de la spectrométrie  $\gamma$  est ici de ne pas séparer durée et énergie des impulsions photoniques, mais de considérer leur loi jointe associée. Une dernière hypothèse est faite sur les moments de  $X$  et  $Y$ , qui a également un sens physiquement :

**Hypothèse 2.1.4.** On suppose que  $\mathbb{E}(X) < \infty$  et que  $\mathbb{E}(Y) < \infty$ .

Nous introduisons à présent un deuxième processus ponctuel afin de mieux décrire le signal observé, correspondant à des empilements.

### 2.1.2 Modélisation d'une séquence d'occupation

Ainsi que nous l'avons décrit au chapitre précédent, lorsque plusieurs photons arrivent sur un détecteur à intervalles relativement courts, les impulsions enregistrées peuvent se cumuler. Il y a *empilement* des impulsions. En pratique, ce sont ces empilements d'impulsions que nous observons, et nous souhaitons retrouver la loi des impulsions, c'est-à-dire la loi de  $Y$  ou la loi jointe du couple  $(X, Y)$ . Nous introduisons donc, afin de différencier le signal temporel sans empilements du signal temporel observé comportant des empilements, la notion de séquence d'occupation.

**Définition 2.1.1.** On appelle séquence d'occupation ou séquence busy toute restriction du signal photonique à un segment  $[a; b]$  où le signal photonique est strictement positif, et nul en  $a^-$  et  $b^+$ . On appelle séquence de non-occupation ou séquence idle toute restriction maximale du signal photonique à un segment  $[a; b]$  où le signal photonique est nul, et strictement positif en  $a^-$  et  $b^+$ . On appellera cycle une séquence idle immédiatement suivie d'une séquence busy.

Avec cette définition, il est aisé de voir qu'une impulsion simple est une séquence d'occupation, et que nous pouvons décrire un empilement de plusieurs impulsions comme étant une séquence d'occupation. Dans toute la suite, nous utiliserons indifféremment les terminologies busy / occupation ou idle / non-occupation.

#### Modélisation d'une séquence d'occupation

De même que nous avons modélisé une impulsion par trois variables aléatoires, nous modélisons la  $n$ -ième séquence d'occupation par la donnée de trois variables aléatoires  $(T'_n, X'_n, Y'_n)$  où  $T'_n$  est l'instant d'arrivée d'une séquence d'occupation,  $X'_n$  sa durée,  $Y'_n$  l'énergie associée. La Figure 2.2 montre graphiquement à quoi correspondent les grandeurs ainsi définies. On notera également dans toute la suite  $Z_n$  la durée de la  $n$ -ième séquence idle.

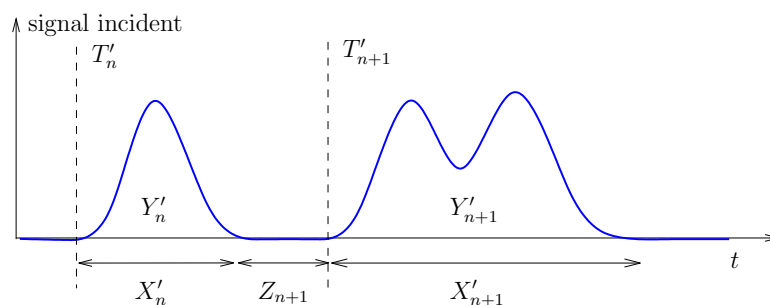


FIG. 2.2 – Représentation graphique des séquences d'occupation

Notre étude porte à la fois sur les signaux à temps continu et à temps discret, nous définissons par conséquent le processus on-off à temps continu  $\{S_x\}_{x \geq 0}$  (égal à 0 dans une séquence idle et à 1 dans une séquence busy) :

$$S_x = \begin{cases} 1 & \text{si } T'_k \leq x < T'_k + X'_k \text{ pour } k \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et nous adoptons la même définition pour le processus on-off associé au signal à temps discret, à savoir si l'on note  $T_e$  la période d'échantillonnage et  $s(nT_e)$  le signal temporel incident

$$S_k = \begin{cases} 1 & \text{si } s(kT_e) > 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 1.** *En toute rigueur, nous n'avons pas défini ainsi une suite de cycles ; en effet, rien n'empêche a priori une séquence d'occupation d'être de durée infinie, ce qui ne définit pas ainsi la suite des séquences idle et busy. Cette ambiguïté est levée dans le Corollaire 2.1.2 énoncé au paragraphe suivant.*

Cette modélisation étant faite, nous énonçons quelques premières propriétés pour caractériser les séquences d'occupation en fonction des impulsions. Ces propriétés seront utilisées dans le chapitre suivant pour l'étude théorique des estimateurs proposés.

### 2.1.3 Premières propriétés

Dans cette partie, nous établissons quelques propriétés relatives au modèle qui a été décrit précédemment. Ces résultats pourront être utiles pour l'étude du problème de désempliment qui a été évoqué brièvement au début de 2.1.2.

La Proposition 2.1.1 permet de faire le lien entre les deux processus ponctuels introduits, et montre l'aspect non-poissonien du processus ponctuel  $\{T'_n\}_{n \geq 1}$ .

**Proposition 2.1.1 (Expression de  $T'_n$ ).** *Avec les notations ci-dessus, nous avons :*

$$T'_n = \inf \left\{ T_i : T_i > \left( T'_{n-1} \vee \max_{j \leq i-1} (T_j + X_j) \right) \right\}. \quad (2.1)$$

*Démonstration :* La suite de terme général  $T_m \mathbb{1}_{\{T_m > \max_{j \leq m-1} (T_j + X_j)\}}$  vaut  $T_n$  pour chaque début de séquence d'occupation, 0 sinon ; en effet, le début d'impulsion  $T'_n$  correspond à un début de séquence d'occupation si et seulement si il est plus grand que la plus grande des  $n-1$  fins d'impulsion précédentes.  $T'_n$  correspond au début de la  $n$ -ième séquence d'occupation, et donc au  $n$ -ième élément non nul de la suite  $\{T_m \mathbb{1}_{\{T_m > \max_{j \leq m-1} (T_j + X_j)\}}\}$  ; Ceci montre par récurrence la relation 2.1.  $\square$

Le Corollaire 2.1.1 permet de relier les variables aléatoires caractérisant les impulsions et les séquences d'occupation.

**Corollaire 2.1.1 (Expression de  $X'_n$  et  $Y'_n$ ).** *Nous avons :*

$$\begin{aligned} X'_n &= \max_{T_i \in [T'_n; T'_{n+1}[} \{T_i + X_i - T'_n\} \\ Y'_n &= \sum_{i \geq 1} Y_i \mathbb{1}_{[T'_n; T'_{n+1}[}(T_i) \end{aligned}$$

La démonstration de ce corollaire découle immédiatement de la définition de  $X'_n$  et  $Y'_n$  et de la Proposition 2.1.1. La Proposition 2.1.1 et son corollaire n'ont pas une grande importance théorique, mais ils seront utilisés en pratique pour un algorithme récursif de simulation de couples  $(X', Y')$  dérivant de ce modèle. La proposition qui va suivre a en revanche une grande importance à la fois théorique et pratique pour la détermination et l'étude de nos estimateurs.

La Proposition 2.1.2 montre que sous les hypothèses faites précédemment, on observe au moins un cycle et que le point de retour à 0 est un point de régénération du processus.

**Proposition 2.1.2.** On note  $N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 1} \delta_{T_k, (X_k, Y_k)}$ ,  $W_x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}(T_k < x \leq T_k + X_k)$  le nombre de photons interagissant avec le détecteur à l'instant  $x$ ,  $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{x > T_1 ; W_x = 0\}$  le premier temps de retour à zéro et  $(\mathcal{F}_x)_{x>0}$  la filtration définie par

$$\mathcal{F}_x \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(N(A) ; A \in \mathcal{B}([0; x] \times \mathbb{R}_+^2)) .$$

On note également pour tout réel  $t \geq 0$  le décalage :

$$\theta_t N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 1} \delta_{T_k - t, (X_k, Y_k)} .$$

Alors, sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 et 2.1.4 :

- (i)  $\tau$  est un  $(\mathcal{F}_x)$ -temps d'arrêt.
- (ii)  $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ .
- (iii) Pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{B}([0; \infty[ \times \mathbb{R}_+^2)^n$ , pour tout  $\{j_i\}_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n$  et pour tout  $B \in \mathcal{F}_\tau$  :

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{\theta_\tau N(A_i) = j_i\} \cap B \right) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{\theta_\tau N(A_i) = j_i\} \right) \mathbb{P}(B) . \quad (2.2)$$

*Démonstration :* On suppose toutes les Hypothèses vérifiées.

**Preuve de (i) :** comme  $\{W_t\}_{t>0}$  est presque sûrement cadlag, on a

$$\{\tau \leq x\} = \{\exists (u, t) \in \mathbb{Q}_+^2 ; u < t \leq x, W_u > 0, W_t = 0\} \in \mathcal{F}_x ,$$

donc (i) est vérifiée.

**Preuve de (ii) :** supposons  $\tau$  infini ; alors il existe  $\delta' > 0$  tel que pour tout  $\delta > \delta'$  on a  $W_\delta > 0$ . Soit  $\{\delta_k\}_{k \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^+}$  croissante, on note  $A_k$  le domaine suivant (voir Figure 2.3) :

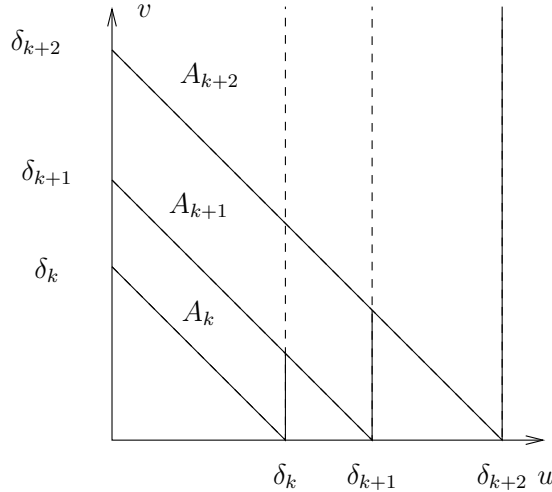


FIG. 2.3 – Représentation graphique des  $A_k$

$$A_k \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 ; u \leq \delta_k, \delta_k - u \leq v\} .$$

Remarquons que l'on a  $W_{\delta_k} = N(A_k)$ , d'où

$$\mathbb{P}(W_{\delta_k} > 0 ; k \geq 1) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{k \geq 1} \{N(A_k) > 0\} \right) , \quad (2.3)$$

et que l'on a l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(N(A_k) > 0 ; k \geq n) \leq \mathbb{P}(N(A_n \setminus A_{n+1})) \mathbb{P}(N(A_k) > 0 ; k \geq n + 1) + \mathbb{P}(N(A_n \cap A_{n+1}) > 0) . \quad (2.4)$$

Nous avons pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}(N(A_k \setminus A_{k+1})) \leq 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}(X)) < 1$$

et

$$\mathbb{P}(N(A_k \cap A_{k+1}) > 0) \leq 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}[(X - (\delta_{k+1} - \delta_k))_+]) ;$$

on note, dans la suite  $\rho \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}(X))$ . On a en choisissant  $\{\delta_k\}_{k \geq 1}$  telle que pour tout entier  $k$ ,  $1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}[(X - (\delta_{k+1} - \delta_k))_+]) \leq 2^{-k}$ , on a d'après (2.4) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(A_k) > 0 ; k \geq n) &\leq \rho \mathbb{P}(N(A_k) > 0 ; k \geq n + 1) + 2^{-n} \\ &\leq 2^{-n} \sum_{j=0}^m \rho^j + \rho^{m+1} \text{ pour tout entier } m \\ &\leq 2^{-n} \frac{1}{1 - \rho} . \end{aligned} \quad (2.5)$$

D'autre part, nous avons :

$$\forall m \in \mathbb{N}_+, \quad \{\tau = \infty\} \subset \bigcup_{n \geq m} \{W_{\delta_k} > 0 ; \forall k \geq n\} ,$$

par conséquent d'après (2.3) et (2.5), pour tout entier  $m$  :

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) \leq \frac{1}{1 - \rho} \sum_{n \geq m} 2^{-n} , \quad (2.6)$$

ce qui montre que  $\tau$  est presque sûrement fini en faisant tendre  $m$  vers l'infini dans (2.6).

**Preuve de (iii) :** il suffit de démontrer (2.2) pour  $A_i = ]a_i; b_i] \times C_i$  et  $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_n < b_n$ , ce qui suffit à caractériser le processus. Nous détaillons la démonstration pour  $n = 1$ , la démonstration dans le cas général s'effectuant de manière analogue.

Soit  $A = ]a; b] \times C$  fixé, avec  $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$ . Par stationnarité du processus de Poisson marqué  $N$ , pour tout  $t \geq 0$  déterministe,  $\theta_t N(A)$  a même loi que  $N(A)$  et est indépendante de  $\mathcal{F}_t$ . Par conséquent, pour tout  $B \in \mathcal{F}_t$  :

$$\mathbb{P}(\{\theta_t N(A) = j\} \cap B) = \mathbb{P}(\{N(A) = j\}) \mathbb{P}(B) \quad (2.7)$$

Reste à vérifier que la relation (2.7) est vraie si l'on remplace  $t$  par le temps d'arrêt  $\tau$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $\tau^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} n 2^{-k}$  où  $n$  est l'unique entier vérifiant  $(n - 1) 2^{-k} < \tau \leq n 2^{-k}$ . Il s'ensuit que  $\tau^{(k)}$  est un  $(\mathcal{F}_{n 2^{-k}})_{n \geq 1}$ -temps d'arrêt, et que  $\tau^{(k)}$  tend en décroissant vers  $\tau$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . D'autre part, nous pouvons écrire d'après (2.7) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\theta_{\tau^{(k)}} N(A) = j\} \cap B) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(\{\theta_{n 2^{-k}} N(A) = j\} \cap B \cap \{\tau^{(k)} = n 2^{-k}\}) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(\{N(A) = j\} \cap B \cap \{\tau^{(k)} = n 2^{-k}\}) \\ &= \mathbb{P}(\{N(A) = j\}) \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(B \cap \{\tau^{(k)} = n 2^{-k}\}) \\ &= \mathbb{P}(\{N(A) = j\}) \mathbb{P}(B) \end{aligned} \quad (2.8)$$

A  $\omega$  fixé, la fonction  $t \mapsto \mathbb{1}_A(T_k - t, X_k, Y_k)$  est continue à droite. Par conséquent, comme pour tout  $t > 0$ , on a  $\theta_t N(A) = \sum_{k=1}^{N(]0;t[ \times C)} \mathbb{1}_A(T_k - t, X_k, Y_k)$ , la fonction  $t \mapsto \theta_t N(A)$  est continue à droite. Nous avons donc par un argument de convergence dominée, pour tout  $B \in \mathcal{F}_\tau$  :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}(\theta_{\tau(k)} N(A) = j) \mathbb{1}(B)) \longrightarrow \mathbb{E}(\mathbb{1}(\theta_\tau N(A) = j) \mathbb{1}(B)) \text{ quand } k \rightarrow +\infty. \quad (2.9)$$

Par conséquent, en faisant tendre  $k$  vers l'infini dans (2.9) et en utilisant (2.8), nous obtenons bien (2.2), ce qui achève la démonstration de (iii).  $\square$

**Corollaire 2.1.2.** *Sous les hypothèses précédentes :*

- (i)  $\{(X'_k, Y'_k, Z_k)\}_{k \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de  $\mathbb{R}_+^3$ .
- (ii) Les variables  $Z_k$  suivent une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .
- (iii)  $\{Z_k\}_{k \geq 1}$  et  $\{(X'_k, Y'_k)\}_{k \geq 1}$  sont deux suites indépendantes.

*Démonstration.* On remarque que  $\tau = Z_1 + X'_1$ , donc d'après la Proposition 2.1.2  $X'_1 < \infty$  p.s. De même, si  $Y'_1 = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_\tau} Y_k$  était infinie, le processus de Poisson des arrivées aurait un point d'accumulation, ce qui est impossible. Par conséquent  $Y'_1 < \infty$  p.s. D'après les Hypothèses 2.1.1 et 2.1.3,  $Z_1 = T_1 \sim \mathcal{E}_\lambda$  et  $Z_1$  est indépendante de  $(X'_1, Y'_1)$ . Comme pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$  :

$$\{Z_1 \leq a, X'_1 \leq b, Y'_1 \leq c\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

alors  $(Z_1, X'_1, Y'_1)$  est  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable. Par récurrence et en utilisant la Proposition 2.1.2, on obtient le corollaire.  $\square$

**Remarque 2.** *Le Corollaire 2.1.2 est très important : il indique que les durées des séquences idle, c'est-à-dire les variables aléatoires  $Z_n$  sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . De fait, nous pouvons estimer l'intensité du processus de Poisson  $\lambda$  à l'aide des durées des séquences idle dans le cas où ce processus peut être considéré comme homogène, ce qui se présente en pratique dans de nombreux cas. D'autre part, il entraîne que la suite de variables  $\{(X'_n, Y'_n)\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  est i.i.d., de mesure de probabilité commune  $P'$ .*

Le résultat suivant caractérise le processus ponctuel des fins d'impulsion, à savoir  $\{T_n + X_n\}_{n \geq 1}$ . Il fait appeler à une propriété classique, qui est une caractérisation nécessaire et suffisante des processus de Poisson à l'aide de la transformée de Laplace. La démonstration complète de cette propriété peut être trouvée dans [Resnick, 1992] :

**Proposition 2.1.3 (Caractérisation des processus de Poisson).** *Soit  $(T_n)_{n \geq 1}$  un processus ponctuel et soit  $\mathcal{N}_t$  le compteur associé à ce processus. Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $E$ . On définit pour toute fonction borélienne (ou positive)  $g : \mathcal{N}(g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} g(T_n)$ . Alors  $\mathcal{N}_t$  est un processus de Poisson de mesure de contrôle  $\mu$  si et seulement si :*

$$\mathbb{E} \left[ e^{-\mathcal{N}(g)} \right] = \exp \left( - \int_E (1 - e^{-g(x)}) \mu(dx) \right)$$

*Éléments de preuve :* La démonstration se fait rapidement si  $f$  est une fonction indicatrice. On l'étend alors aux fonctions étagées, puis aux fonctions positives ou boréliennes à l'aide du théorème de convergence monotone.  $\square$

Nous pouvons maintenant, à l'aide de la Proposition 2.1.3, caractériser le processus des fins d'impulsion :

**Proposition 2.1.4 (Processus des fins d'impulsion).** Soient  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  les points d'un processus de Poisson de mesure de contrôle  $\mu_T$  et  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de mesure de probabilité associée  $\mu_X$ , indépendante de  $\{T_n\}_{n \geq 1}$ . On suppose que  $\mu_T$  et  $\mu_X$  sont à support dans  $\mathbb{R}_+$ , alors le processus des fins d'impulsions  $\{T_n + X_n\}_{n \geq 1}$  est un processus de Poisson non homogène de mesure de contrôle  $\mu_T * \mu_X$ , où  $*$  est l'opérateur de convolution usuel.

*Démonstration :* Soit  $\mathcal{N}'_t$  le compteur associé au processus ponctuel  $\{T_n + X_n\}_{n \geq 1}$  et  $f$  une fonction borélienne positive. On définit  $\mu_T * \mu_X$  de la manière suivante :

$$\int f(x) \mu_T * \mu_X(dx) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{x \geq 0, y \geq 0} f(x+y) \mu_T(dx) \mu_X(dy) ;$$

remarquons dans un premier temps que pour tout réel  $M > 0$ ,

$$\mu_T * \mu_X (\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 ; x + y \leq M\}) < \infty ,$$

ce qui garantit bien la définition de  $\mu_T * \mu_X$ . En raison de l'indépendance des  $X_n$ , nous pouvons écrire pour toute suite croissante  $(x_n)_{n \geq 1}$  :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ e^{-\sum_{n \geq 1} f(x_n + X_n)} \right] = \prod_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[ e^{-f(x_n + X_n)} \right] \\ &= \prod_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}} e^{-f(x_n + v)} \mu_X(dv) \\ &= \exp \left( - \sum_{n \geq 1} g(x_n) \right) , \end{aligned}$$

où l'on pose  $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\ln \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-f(u+x)} \mu_X(du) \right)$ . D'après l'indépendance de  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  et de  $\{X_n\}_{n \geq 1}$ , nous avons d'après la Proposition 2.1.3 :

$$\mathbb{E} \left[ e^{-\mathcal{N}'(f)} \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \sum_{n \geq 1} g(T_n) \right) \right] = \mathbb{E} [\exp(-\mathcal{N}(g))] = \exp \left( - \int_{\mathbb{R}_+} (1 - e^{g(x)}) \mu_T(dx) \right) \quad (2.10)$$

D'autre part, nous avons, comme  $\mu_X$  est une mesure de probabilité :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-g(x)}) \mu_T(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \left( 1 - \int_{\mathbb{R}} e^{-f(x+y)} \mu_X(dy) \right) \mu_T(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-f(x+y)}) \mu_X(dy) \mu_T(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-f(z)}) \mu_T * \mu_X(dz) , \end{aligned} \quad (2.11)$$

donc d'après (2.10) et (2.11) :

$$\mathbb{E} \left[ e^{-\mathcal{N}'(f)} \right] = \exp \left( \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-f(z)}) \mu_T * \mu_X(dz) \right) .$$

$\mathcal{N}'_t$  est donc bien le compteur associé à un processus de Poisson de mesure de contrôle  $\mu_T * \mu_X$  en vertu de la Proposition 2.1.3.  $\square$

Nous énonçons à présent une autre proposition qui montre que sous l'Hypothèse 2.1.4,  $\mathbb{E}(X') < \infty$  et  $\mathbb{E}(Y') < \infty$ , et que ces espérances peuvent être calculées explicitement.

**Proposition 2.1.5.** *Supposons l'Hypothèse 2.1.4 vérifiée, alors :*

- (i)  $\mathbb{E}[X'] = \{\exp(\lambda\mathbb{E}[X]) - 1\}/\lambda$ .
- (ii)  $\mathbb{E}(Y') = \mathbb{E}[Y] \exp(\lambda\mathbb{E}[X])$ .

*Démonstration.* On considère le processus *on-off*  $S_x$  introduit précédemment, à savoir :

$$S_x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } T'_k \leq x < T'_k + X'_k \text{ pour } k \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

soit :

$$S_x = \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{[T'_i; T'_i + X'_i]}(x). \quad (2.12)$$

Remarquons que ce processus peut également être défini par :

$$S_x = \mathbb{1}(Y_x > 0) \text{ avec } Y_x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \geq 1} \mathbb{1}_{[T_i; T_i + X_i]}(x), \quad (2.13)$$

où l'indicatrice dans (2.13) vient du fait que certains  $T_k$  ne sont pas observés, et que :

$$\begin{aligned} Y_x &= \# \{k \in \mathbb{N} ; T_k \leq x \leq T_k + X_k\} \\ &= \# \{k \in \mathbb{N} ; T_k \leq x, T_k + X_k \geq x\} \\ &= \# \{k \in \mathbb{N} ; (T_k, X_k) \in A_x\} \text{ avec } A_x \stackrel{\text{def}}{=} \{(\tau, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2 ; \tau \leq x, \varepsilon \geq x - \tau\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Notons  $\mu_X$  la mesure de probabilité associée à  $X$ . D'après (2.14), comme  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  est un processus de Poisson marqué par  $X$ ,  $Y_x$  suit une loi de Poisson de paramètre déterminé :

$$Y_x \sim \mathcal{P} \left( \lambda \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_{\{\tau \leq x\}} \mathbb{1}_{\{\varepsilon \leq x - \tau\}} d\tau \mu_X(d\varepsilon) \right), \quad (2.15)$$

et l'on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_{\{\tau \leq x\}} \mathbb{1}_{\{\varepsilon \leq x - \tau\}} d\tau \mu_X(d\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}_+} (x - (x - \varepsilon)_+) \mu_X(d\varepsilon) = \mathbb{E}(X \wedge x).$$

Finalement, d'après (2.15) :

$$Y_x \sim \mathcal{P}(\lambda \mathbb{E}(X \wedge x)). \quad (2.16)$$

Nous avons donc, d'après (2.13) et (2.16) :

$$\mathbb{P}(S_x = 0) = \mathbb{P}(Y_x = 0) = \exp(-\lambda \mathbb{E}(X \wedge x)),$$

et donc, comme l'Hypothèse 2.1.4 est vérifiée et que  $(x - (x - X)_+) \leq X$ , nous avons d'après le théorème de convergence dominée :

$$\mathbb{P}(S_x = 0) \rightarrow \exp(-\lambda \mathbb{E}(X)) \text{ quand } x \rightarrow +\infty. \quad (2.17)$$

On cherche maintenant à calculer  $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_x = 0)$  en utilisant les séquences *busy* et *idle*. On note  $\mathcal{N}'_x$  le nombre de cycles s'étant terminés avant la date  $x$ ; on a :

$$\frac{1}{\mathcal{N}'_x} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}'_x} (T'_i + X'_i) \leq \frac{x}{\mathcal{N}'_x} \leq \frac{1}{\mathcal{N}'_x} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}'_x+1} (T'_i + X'_i),$$

nous avons donc la convergence presque sûre suivante :

$$\frac{x}{\mathcal{N}'_x} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X') + \frac{1}{\lambda} \text{ quand } x \rightarrow +\infty . \quad (2.18)$$

D'autre part, on a également :

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}'_x} Z_i \leq \int_0^x \mathbb{1}(S_\tau = 0) d\tau \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{N}'_x+1} Z_i . \quad (2.19)$$

On conclut par conséquent de (2.19) que :

$$\frac{1}{\mathcal{N}'_x} \int_0^x \mathbb{1}(S_\tau = 0) d\tau \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\lambda} \text{ quand } x \rightarrow +\infty . \quad (2.20)$$

Par conséquent, d'après (2.18) et (2.20), nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathcal{N}'_x}{x} \frac{1}{\mathcal{N}'_x} \int_0^x \mathbb{1}(S_\tau = 0) d\tau \xrightarrow{p.s.} \frac{\lambda^{-1}}{\lambda^{-1} + \mathbb{E}(X')} . \quad (2.21)$$

D'autre part, on peut remarquer que :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{x} \int_0^x \mathbb{1}(S_\tau = 0) d\tau \right] = \frac{1}{x} \int_0^x \mathbb{P}(S_\tau = 0) d\tau = \frac{1}{x} \int_0^x \exp(-\lambda \mathbb{E}(X \wedge \tau)) d\tau , \quad (2.22)$$

et cette dernière intégrale tend vers  $\exp(-\lambda \mathbb{E}(X))$  quand  $x \rightarrow +\infty$  d'après (2.17). Finalement, en utilisant (2.21), (2.22) et le théorème de convergence dominée, on a bien l'égalité des limites :

$$\frac{\lambda^{-1}}{\lambda^{-1} + \mathbb{E}(X')} = \exp(-\lambda \mathbb{E}(X)) ,$$

ce qui achève la démonstration de (i).

Montrons à présent (ii). Soit la variable aléatoire  $N_k$  représentant le nombre d'impulsions élémentaires dans la  $k$ -ième séquence *busy*. D'après le théorème de Blackwell, nous pouvons écrire, puisque  $Y' = Y_1 + \dots + Y_N$  :

$$\mathbb{E}(Y') = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Y) . \quad (2.23)$$

Il suffit donc de montrer que  $\mathbb{E}(N) = \exp(\lambda \mathbb{E}(X))$ . On remarque là encore que  $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}'_x} N_k$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda x$ , par conséquent

$$\frac{1}{x} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}'_x} N_i \xrightarrow{p.s.} \lambda \text{ quand } x \rightarrow +\infty . \quad (2.24)$$

D'autre part, d'après (2.18) :

$$\frac{1}{x} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}'_x} N_i = \frac{\mathcal{N}'_x}{x} \frac{1}{\mathcal{N}'_x} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}'_x} N_i \xrightarrow{p.s.} \frac{\mathbb{E}(N)}{\mathbb{E}(X') + \lambda^{-1}} \text{ quand } x \rightarrow +\infty , \quad (2.25)$$

et donc d'après (2.24) et (2.25) :

$$\mathbb{E}(N) = \exp(\lambda \mathbb{E}(X)) ,$$

ce qui achève la démonstration de (ii). □

Nous avons, au terme de cette partie, dégagé quelques propriétés importantes de notre modélisation à temps continu. Nous conservons ce modèle pour établir une formule de désempliment, c'est-à-dire une relation fonctionnelle entre la loi de  $(X', Y')$ , observée, et la loi de  $(X, Y)$  qui nous intéresse.

## 2.2 Formule de désempilement à temps continu

Nous nous intéressons maintenant au problème du désempilement d'impulsions photoniques proprement dit : d'un point de vue formel, nous cherchons une relation fonctionnelle entre la distribution de  $(X, Y)$  et celle de  $(X', Y')$ . Dans cette partie, nous établissons une telle relation susceptible de mener à une implémentation de l'inversion directe. Nous supposons dans toute la suite que le processus de Poisson  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  est homogène d'intensité  $\lambda$ .

### 2.2.1 Choix de la grandeur d'intérêt

On cherche ici à trouver un lien entre le signal idéal non observable et le signal observé. A un instant  $x$  donné, si l'on se trouve dans une séquence *busy*, on ne peut rien retirer comme information concernant l'énergie, car, avec la modélisation de la partie 2.1, il est impossible de savoir combien d'impulsions se trouvent dans une séquence *busy*, ni quand cette séquence *busy* se termine. En revanche, lorsqu'on se trouve dans une séquence *idle*, nous pouvons connaître l'énergie qui a été emmagasinée dans le détecteur jusqu'à la date  $x$  sans qu'elle soit modifiée immédiatement après ; en outre, il s'agit du seul « état » où le nombre d'impulsions, c'est-à-dire de photons qui ont frappé le détecteur, soit observable. L'énergie étant l'information la plus importante en spectrométrie, il semble par conséquent légitime d'étudier la répartition de cette grandeur lorsque nous nous trouvons dans une séquence *idle*, i.e. à une date  $x$  où  $S_x = 0$  ; on constate alors que l'on peut calculer cette énergie de deux manières différentes, suivant que l'on compte les impulsions photoniques individuellement ou les séquences *busy* qui ont eu lieu avant la date  $x$ . Nous appellerons dans toute la suite  $\bar{E}_x$  l'énergie emmagasinée jusqu'à l'instant  $x$ , c'est-à-dire si  $x$  est dans une séquence *idle* :

$$\bar{E}_x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} Y_n \mathbb{1}_{[0;x]}(T_n) \text{ quand } S_x = 0, \quad (2.26)$$

et pour toute mesure de probabilité  $\tilde{P}'$  de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$ , on définit la transformée de Laplace  $\mathcal{L}\tilde{P}'$  pour tout couple complexe  $(s, p)$  tel que  $\text{Re}(s) \geq 0$  et  $\text{Re}(p) \geq 0$  :

$$\mathcal{L}\tilde{P}'(s, p) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} e^{-s\tau} e^{-p\varepsilon} \tilde{P}'(d\tau, d\varepsilon).$$

On définit par conséquent  $\rho(x, y)$  par la probabilité qu'on se trouve à la date  $x$  dans une séquence *idle* et que l'énergie totale enregistrée à cette date soit inférieure ou égale à  $y$  :

$$\rho(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(S_x = 0, \bar{E}_x \leq y). \quad (2.27)$$

Suivant que l'on considère pour calculer cette grandeur les séquences *busy* ou les impulsions, nous connaissons cette probabilité en fonction de  $P'$  ou en fonction de  $f$  ; ainsi, il semble possible de lier ces deux distributions.

### 2.2.2 Détermination de la loi d'un cycle

L'objectif de cette partie est de montrer que la loi du couple  $(X', Y')$  obéit à une équation qui peut être explicitée grâce à la théorie du renouvellement ; on pourra se référer à [Resnick, 1992, chapitre 3] ou à [Lacroix, 2000] pour des précisions concernant cette théorie. Nous savons d'après la Proposition 2.1.2 que la loi des séquences *idle* est exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Dans toute la suite de cette partie, nous noterons  $\mathcal{E}_\lambda$  la mesure de probabilité associée à la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Nous nous intéressons tout d'abord à la loi d'un cycle d'une séquence *busy* et d'une séquence *idle*. Nous serons amenés dans la suite à faire des produits de convolution sur des composantes de vecteur ; l'opérateur de convolution usuel, dont on peut trouver une définition dans [Brezis, 1983], n'est définie que pour des fonctions opérant sur le même espace. Nous commençons donc par introduire un opérateur spécifique, afin de clarifier les notations.

**Définition 2.2.1.** Soient  $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n$  une mesure de probabilité sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  et  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ; nous appelons  $\overset{(i)}{*}$  l'opérateur de convolution partielle défini par :

$$\mu \overset{(i)}{*} \nu \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_{i-1} \otimes \mu_i * \nu \otimes \mu_{i+1} \otimes \dots \otimes \mu_n,$$

où  $*$  est l'opérateur de convolution usuel sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 3.** L'opérateur de la Définition 2.2.1 correspond en fait à une marginalisation de la convolution suivant une dimension; cet opérateur possède par conséquent les mêmes propriétés que la convolution usuelle, notamment concernant la transformée de Laplace, la commutativité, etc...

Cet opérateur va nous permettre de caractériser la loi d'un cycle, c'est-à-dire d'une séquence *busy* et de la séquence *idle* qui la suit :

**Proposition 2.2.1 (Loi d'un cycle).** Avec les notations de la Définition 2.2.1 et sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.2 et 2.1.3, la loi d'un cycle est caractérisée par la mesure :

$$P' \overset{(1)}{*} \mathcal{E}_\lambda.$$

*Démonstration :* Nous avons en utilisant l'indépendance de  $Z_n$  avec  $(X'_n, Y'_n)$  et le théorème de Tonelli-Fubini :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X'_n + Z_n \leq x; Y'_n \leq y) &= \int_{\tau=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X'_n \leq x - \tau; Y'_n \leq y) \mathcal{E}_\lambda(d\tau) \\ &= \int_{\tau=0}^{+\infty} \int_{u=0}^{x-\tau} \int_{\varepsilon=0}^y P'(du, d\varepsilon) \mathcal{E}_\lambda(d\tau) \\ &= \int_{u=0}^x \int_{\varepsilon=0}^y \int_{\tau=0}^{+\infty} P'(d(u - \tau), d\varepsilon) \mathcal{E}_\lambda(d\tau) \\ &= \int_{\tau=0}^x \int_{\varepsilon=0}^y P' \overset{(1)}{*} \mathcal{E}_\lambda(d\tau, d\varepsilon). \end{aligned}$$

La loi d'un cycle est donc bien donnée par la mesure  $P' \overset{(1)}{*} \mathcal{E}_\lambda$ . □

La Proposition 2.2.1 donne une information importante concernant la loi d'un cycle. D'autre part, nous pouvons considérer le signal photonique reçu comme une suite de séquences *busy* et *idle* indépendantes comme en 2.1, soit encore comme une suite de cycles indépendants. Il paraît alors intéressant d'utiliser les calculs usuels du renouvellement pour en tirer des propriétés sur la mesure  $P'$ . Nous introduisons les variables aléatoires  $R_n$  et  $A_n$  définies de la manière suivante :

$$R_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n (X'_k + Z_k) ; A_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n Y'_k, \quad n \geq 1, \quad (2.28)$$

La proposition suivante, dont la démonstration repose sur un argument de renouvellement classique, donne une relation entre la mesure associée à  $(R_n, A_n)$ , que nous noterons  $\mu_{(R_n, A_n)}$ , et  $P'$  :

**Proposition 2.2.2.** Avec les notations précédentes et sous les Hypothèses 2.1.1, 2.1.2 et 2.1.3, nous avons :

$$\mu_{(R_n, A_n)} = (P' \overset{(1)}{*} \mathcal{E}_\lambda)^{*n}.$$

*Démonstration :* Il suffit de remarquer que  $R_n = R_{n-1} + X'_n + Z_n$  et  $A_n = A_{n-1} + Y'_n$ . L'indépendance des  $Z_n$  avec les  $X'_n$  et entre eux et l'indépendance des  $Y'_n$  entre eux permet de conclure en appliquant la Proposition 2.2.1. □

### 2.2.3 Calcul de $\rho(x, y)$ à l'aide des séquences *busy*

On s'intéresse tout d'abord à  $\rho(x, y)$  ou, ce qui revient au même, à

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} \rho(x, y) e^{-sx} e^{-py} dx dy ,$$

et l'on cherche à calculer ces deux quantités en utilisant la processus de renouvellement alterné défini par  $\{(R_n, A_n)\}_{n \geq 1}$  introduit dans le paragraphe précédent.

**Proposition 2.2.3** ( $\rho(x, y)$  en fonction des séquences *busy*). *Sous les hypothèses 2.1.1, 2.1.2 et 2.1.3, nous avons pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  :*

$$\rho(x, y) = e^{-\lambda x} + \sum_{n \geq 1} \left( (P' \overset{(1)}{*} \mathcal{E}_\lambda)^{*n} - \mathcal{E}_\lambda \overset{(1)}{*} (P' \overset{(1)}{*} \mathcal{E}_\lambda)^{*n} \right) ([0; x] \times [0; y]), \quad (2.29)$$

et nous avons pour tout  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \operatorname{Re}(z_1) > 0, \operatorname{Re}(z_2) > 0\}$  :

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} \rho(x, y) e^{-sx} e^{-py} dx dy = \frac{1}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s, p)} \times \frac{\mathcal{L}P'(s, p)}{p(s + \lambda)} + \frac{1}{p(s + \lambda)}. \quad (2.30)$$

*Démonstration.* La démonstration se base sur des arguments classiques de la théorie du renouvellement (que l'on peut retrouver dans [Cocozza-Thivent, 1997]) et la Proposition 2.1.2. L'événement  $\{S_x = 0, \bar{E}_x \leq y\}$  peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \{S_x = 0, \bar{E}_x \leq y\} &= \{x < T'_1\} \cup \left( \bigcup_{n \geq 1} \left\{ T'_n + X'_n \leq x < T'_{n+1}, \sum_{k=1}^n Y'_k \leq y \right\} \right) \\ &= \{x < Z_1\} \cup \left( \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \sum_{i=1}^n (X'_i + Z_i) \leq x < \sum_{i=1}^n (X'_i + Z_i) + Z_{n+1}, \sum_{i=1}^n Y'_i \leq y \right\} \right) \\ &= \{x < T_1\} \cup \left( \bigcup_{n \geq 1} \{R_n \leq x < R_n + Z_{n+1}, A_n \leq y\} \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

où  $A_n$  et  $R_n$  ont été introduits par (2.28). En conditionnant par rapport à  $Z_n$  et en utilisant l'indépendance des  $Z_n$  entre eux et avec les  $X'_n$ , nous avons d'après la Proposition 2.2.2 et (2.31) :

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= e^{-\lambda x} + \lambda \int_{\tau=0}^{+\infty} \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\tau - x < R_n < x, A_n \leq y) e^{-\lambda \tau} d\tau \\ &= e^{-\lambda x} + \sum_{n \geq 1} \left\{ \mathbb{P}(R_n \leq x, A_n \leq y) - \lambda \int_{\tau=0}^{+\infty} \mathbb{P}(R_n \leq \tau - x, A_n \leq y) e^{-\lambda \tau} d\tau \right\}, \end{aligned}$$

ce qui prouve (2.29) d'après la Proposition 2.2.2.

D'autre part, la transformée de Laplace d'une mesure de probabilité suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  est donnée pour tout complexe  $s$  tel que  $\operatorname{Re}(s) > -\lambda$  par :

$$\mathcal{L}\mathcal{E}_\lambda(s) = \int_{\tau=0}^{+\infty} e^{-s\tau} \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau = \frac{\lambda}{s + \lambda}.$$

D'après la Proposition 2.2.3 et les théorèmes classiques d'intégration pour les transformées de Laplace (cf. Annexe B), nous avons :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(R_n \leq x, A_n \leq y) e^{-sx} e^{-py} dx dy = \frac{1}{sp} \left( \frac{\lambda}{s + \lambda} \mathcal{L}P'(s, p) \right)^n. \quad (2.32)$$

$P'$  étant une mesure de probabilité, on a pour tout  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \operatorname{Re}(z_1) > 0, \operatorname{Re}(z_2) > 0\}$  :

$$\left| \frac{\lambda}{s + \lambda} \mathcal{L}P'(s, p) \right| < 1 ,$$

ce qui montre la sommabilité de la série de terme général (2.32), et entraîne (2.30). □

**Remarque 4.** Cette probabilité trouve son pendant en théorie de la fiabilité des systèmes. De manière non rigoureuse, en prenant le cas particulier d'une densité en énergie égale à un Dirac, on retrouve les formules déduites de la Proposition 6.12 de [Cocozza-Thivent, 1997, Chapitre 6], ce qui tend à valider notre calcul. En utilisant la Proposition 2.2.3, nous obtenons en outre une formule similaire à la Proposition 2.2 de [Bingham and Pitts, 1999].

### 2.2.4 Calcul de $\rho(x, y)$ à l'aide des impulsions photoniques

Comme nous l'avons souligné, il est possible de calculer de deux manières différentes la grandeur d'intérêt  $\rho(x, y)$  et sa grandeur associée dans l'espace symbolique ; nous cherchons maintenant à calculer cette probabilité en considérant les impulsions, et non plus les séquences *busy*, qui sont arrivées avant la date  $x$ . Nous nous inspirons du calcul de [Takacs, 1962, Chapitre 3] et de [Pyke, 1958] en prenant en compte l'énergie des impulsions en plus des durées. Nous commençons cette étude avec un lemme qui sera utilisé dans la démonstration de la Proposition 2.2.4 :

**Lemme 2.2.1.** Soient trois variables aléatoires de  $\mathbb{R}^n$   $U, V, W$  telles que  $V$  soit indépendante du couple  $(U, W)$ . On note  $\mu_{(U, W)}$  et  $\mu_V$  les mesures de probabilité associées à  $(U, W)$  et  $V$ . Soit  $\phi$  une fonction mesurable dans  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , alors :

$$\mathbb{E}(\phi(U, V)|V, W) \stackrel{p.s.}{=} h(V, W) ,$$

avec  $h(x, W) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\phi(U, x)|W)$ .

*Démonstration :* Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables, on a d'après la propriété d'orthogonalité de l'espérance conditionnelle et l'indépendance de  $V$  par rapport à  $(U, W)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\phi(U, V)|V, W)f(V)g(W)) &= \mathbb{E}(\phi(U, V)f(V)g(W)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}(\phi(U, v)f(v)g(W))\mu_V(dv) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\phi(U, v)|W)f(v)g(W))\mu_V(dv) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}(h(v, W)f(v)g(W))\mu_V(dv) \\ &= \mathbb{E}(h(V, W)f(V)g(W)) \end{aligned}$$

Nous avons donc bien  $\mathbb{E}(\phi(U, V)|V, W) \stackrel{p.s.}{=} h(V, W)$ . □

La Proposition suivante permet de lier les deux grandeurs

$$\rho(x, y) \quad \text{et} \quad \iint_{\mathbb{R}_+^2} \rho(x, y)e^{-sx}e^{-py} dx dy$$

à la densité  $f$ .

**Proposition 2.2.4.** *On pose*

$$k(x, \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau=0}^x (x - \tau) f(\tau, \cdot) d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau=0}^x \left\{ \int_{u=0}^{\tau} f(u, \cdot) du \right\} d\tau. \quad (2.33)$$

*Sous les Hypothèses 2.1.2 et 2.1.3, nous avons pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  :*

$$\rho(x, y) = e^{-\lambda x} + \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda x} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbb{1}_{\{y_1 + \dots + y_n \leq y\}} \prod_{k=1}^n k(x, y_k) dy_k \right), \quad (2.34)$$

*et pour tout  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \operatorname{Re}(z_1) > 0, \operatorname{Re}(z_2) > 0\}$  :*

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} \rho(x, y) e^{-sx} e^{-py} dx dy = \frac{1}{p} \int_{x=0}^{+\infty} e^{-sx} e^{-\lambda x} \left[ \exp \left( \lambda \int_{y=0}^{\infty} k(x, y) e^{-py} dy \right) - 1 \right] dx + \frac{1}{p(s + \lambda)}. \quad (2.35)$$

*Démonstration.* On rappelle que  $\{\mathcal{N}_x\}_{x \geq 0}$  est le compteur associé au processus de Poisson homogène, à savoir le nombre de points  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  plus petits que  $x$ . En fonction du nombre d'impulsions dans l'intervalle  $[0; x]$ , nous écrivons l'événement  $\{S_x = 0, \bar{E}_x \leq y\}$  comme le fait que  $x$  doit être avant la  $(n + 1)$ -ième impulsion et après toutes les fins des  $n$  premières impulsions<sup>2</sup>, et nous avons :

$$\begin{aligned} & \{S_x = 0, \bar{E}_x \leq y\} \\ &= \{x \leq T_1\} \cup \left( \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} (T_i + X_i) \leq x, \mathcal{N}_x = n, \sum_{i=1}^n Y_i \leq y \right\} \right) \\ &= \{x \leq Z_0\} \cup \left( \bigcup_{n \geq 1} \left\{ T_1 + X_1 \leq x, T_2 + X_2 \leq x, \dots, T_n + X_n \leq x, \mathcal{N}_x = n, \sum_{i=1}^n Y_i \leq y \right\} \right) \end{aligned}$$

En conditionnant l'événement  $\{S_x = 0, \bar{E}_x \leq y\}$  par  $\{\mathcal{N}_x = n\}$ , nous pouvons donc écrire :

$$\rho(x, y) = e^{-\lambda x} + \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\mathcal{N}_x = n) \times \mathbb{P} \left( T_1 + X_1 \leq x, \dots, T_n + X_n \leq x, \sum_{k=1}^n Y_k \leq y \mid \mathcal{N}_x = n \right) \quad (2.36)$$

$\mathcal{N}_x$  étant le compteur associé à un processus de Poisson homogène, il suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda x$ , comme indiqué dans [Cocozza-Thivent, 1997, Chapitre 2]), nous avons donc :

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_x = n) = \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x}.$$

Soit  $A$  la deuxième probabilité à calculer dans (2.36) ; nous avons en utilisant les espérances conditionnelles :

$$\begin{aligned} A & \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P} \left( T_1 + X_1 \leq x, T_2 + X_2 \leq x, \dots, T_n + X_n \leq x, \sum_{i=1}^n Y_i \leq y \mid \mathcal{N}_x = n \right) \\ &= \mathbb{E} (\phi_x(T_1, X_1, Y_1) \dots \phi_x(T_n, X_n, Y_n) \psi_y(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n) \mid \mathcal{N}_x = n), \end{aligned}$$

en posant  $\phi_x(z_1, z_2, z_3) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{\{z_1 + z_2 \leq x\}}$  et  $\psi_y(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{\{y_1 + y_2 + \dots + y_n \leq y\}}$ . En conditionnant par une tribu plus grande, nous avons :

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \psi_y(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n) \prod_{i=1}^n \phi_x(T_i, X_i, Y_i) \mid \mathcal{N}_x = n, (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \right) \mid \mathcal{N}_x = n \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \psi_y(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n) \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^n \phi_x(T_i, X_i, Y_i) \mid \mathcal{N}_x = n, (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \right) \mid \mathcal{N}_x = n \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

<sup>2</sup>En effet, contrairement aux débuts d'impulsion, les fins d'impulsion sont non ordonnées.

D'après le Lemme 2.2.1, on peut récrire la deuxième espérance conditionnelle de (2.37) de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(\phi_x(T_1, X_1, Y_1) \dots \phi_x(T_n, X_n, Y_n) | \mathcal{N}_x, (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)) \stackrel{p.s.}{=} h(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n, \mathcal{N}_x),$$

avec

$$h(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n, \mathcal{N}_x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(T_1 + X_1 \leq x, \dots, T_n + X_n \leq x | \mathcal{N}_x = n).$$

On sait que la loi de  $(T_1, \dots, T_n)$  sachant  $\{\mathcal{N}_x = n\}$  est celle des statistiques d'ordres de  $n$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées uniformes sur  $[0, x]$ , comme indiqué dans [Resnick, 1992, Chapitre 4]; Soient  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$   $n$  variables aléatoires uniformes sur  $[0, x]$  et  $U_{(i)}$  la  $i$ -ème statistique d'ordre de cet échantillon, on a pour tout  $n$ -uple  $(x_1, \dots, x_n)$  de réels positif :

$$\mathbb{P}(T_1 \leq x_1, \dots, T_n \leq x_n | \mathcal{N}_x = n) = \mathbb{P}(U_{(1)} \leq x_1, \dots, U_{(n)} \leq x_n), \quad (2.38)$$

Par conséquent, en utilisant (2.36), (2.37) et (2.38), on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbb{P}(T_1 \leq x - x_1, \dots, T_n \leq x - x_n | \mathcal{N}_x = n) \mathbb{1}_{\{y_1 + \dots + y_n \leq e\}} \prod_{k=1}^n f(x_k, y_k) dx_k dy_k \\ &= \frac{1}{x^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_{[0; x]^n} \mathbb{1}_{\{y_1 + \dots + y_n \leq y\}} \prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{u_k \leq x - x_k, x_k \leq x\}} f(x_k, y_k) du_k dx_k dy_k, \end{aligned}$$

car l'intégrale considérée est invariante par permutation des indices des  $(x_k, y_k)$ . D'après le théorème de Tonelli-Fubini, nous avons donc :

$$A = \frac{1}{x^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbb{1}_{\{y_1 + \dots + y_n \leq y\}} \int_{[0; x]^n} \prod_{k=1}^n (x - x_k) f(x_k, y_k) dx_k dy_k = \frac{1}{x^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbb{1}_{\{y_1 + \dots + y_n \leq y\}} \prod_{k=1}^n k(x, y_k) dy_k \quad (2.39)$$

où  $k(x, y)$  est définie dans (2.33). On obtient donc bien (2.34) d'après (2.36) et (2.39).

Nous pouvons calculer la transformée de Laplace de  $\rho(x, y)$  en utiliser les propriétés de la transformée de Laplace décrites en Annexe B. Nous avons par conséquent pour tout  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \text{Re}(z_1) > 0, \text{Re}(z_2) > 0\}$  :

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{\infty} \rho(x, y) e^{-py} dy &= \frac{e^{-\lambda x}}{p} + \frac{1}{p} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda x} \left[ \int_{y=0}^{\infty} k(x, y) e^{-py} dy \right]^n \\ &= \frac{e^{-\lambda x}}{p} + \frac{e^{-\lambda x}}{p} \left[ \exp \left( \lambda \int_{y=0}^{\infty} k(x, y) e^{-py} dy \right) - 1 \right], \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} \rho(x, y) e^{-sx} e^{-py} dx dy = \frac{1}{p(s + \lambda)} + \frac{1}{p} \int_{x=0}^{+\infty} e^{-sx} e^{-\lambda x} \left[ \exp \left( \lambda \int_{y=0}^{\infty} e^{-py} k(x, y) dy \right) - 1 \right] dx,$$

soit (2.35). □

Finalement, on montre qu'il est possible de lier  $f$  à  $P'$  par une relation fonctionnelle, à la fois dans l'espace direct et dans l'espace symbolique, par le théorème suivant :

**Théorème 2.2.1 (Formule de désempilement à temps continu).** *Sous les mêmes hypothèses et notations que pour les Propositions 2.2.3 et 2.2.4 et en conservant les notations précédentes, nous*

avons pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda x} \left( \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbb{1}_{\{y_1 + \dots + y_n \leq y\}} \prod_{k=1}^n k(x, y_k) dy_k \right) \\ = \sum_{n \geq 1} \left( (P' \stackrel{(1)}{*} \mathcal{E}_\lambda)^{*n} - \mathcal{E}_\lambda \stackrel{(1)}{*} (P' \stackrel{(1)}{*} \mathcal{E}_\lambda)^{*n} \right) ([0; x] \times [0; y]), \end{aligned} \quad (2.40)$$

et nous avons pour tout  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \operatorname{Re}(z_1) > 0, \operatorname{Re}(z_2) \geq 0\}$  :

$$\int_{x=0}^{+\infty} e^{-sx} e^{-\lambda x} \left[ \exp \left( \lambda \int_{y=0}^{\infty} k(x, y) e^{-py} dy \right) - 1 \right] dx = \frac{1}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s, p)} \times \frac{\mathcal{L}P'(s, p)}{(s + \lambda)}. \quad (2.41)$$

*Démonstration* : La démonstration de (2.40) découle directement de la Proposition 2.2.3 et de la Proposition 2.2.4 ; en utilisant ces deux Propositions et le fait que toutes les fonctions complexes considérées ici sont continues sur l'ouvert  $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \operatorname{Re}(z_1) > 0, \operatorname{Re}(z_2) > 0\}$  et prolongeables par continuité sur  $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \operatorname{Re}(z_1) > 0, \operatorname{Re}(z_2) \geq 0\}$ , on montre de même (2.41).  $\square$

**Remarque 5.** *Il est important de voir qu'un point crucial de la démonstration de la Proposition 2.2.4 est que les variables aléatoires  $Y$  sont additives, à savoir qu'un empilement de  $n$  impulsions élémentaires a pour énergie totale  $Y' = Y_1 + \dots + Y_n$ . Ceci est le cas dans le cas des compteurs de Type II qui nous intéresse, mais par exemple le cas des compteurs de Type I n'est pas couvert par cette étude.*

Au terme de cette partie, nous avons montré que le théorème obtenu dans [Takacs, 1962] pouvait être étendu au modèle proposé. Il est donc possible, en vertu des relations (2.40) et (2.41) de déterminer un estimateur de la densité  $f$  à partir d'observations indirectes suivant la loi  $P'$ . Néanmoins, dans les systèmes d'instrumentation récents utilisés en spectrométrie, le signal est échantillonné et numérisé. Dans ce cas, nous ne sommes plus dans le cadre du modèle introduit dans la partie 2.1<sup>3</sup>, il est donc nécessaire de refaire l'étude dans ce cas de figure.

## 2.3 Formule de désempilement à temps discret

Dans ce chapitre, nous chercherons à étendre la formule de désempilement continue au cas discret ; en effet, les systèmes de spectrométrie numérique travaillent sur des signaux photoniques échantillonnés et quantifiés en énergie. Nous proposons tout d'abord une modélisation à temps discret du signal photonique ; nous adaptons la définition des séquences *busy* et *idle*. Dans toute la suite nous notons  $T_e$  la période d'échantillonnage temporelle et  $T_q$  le pas de quantification en énergie.

### 2.3.1 Description du modèle discret

Dans un premier temps, il est nécessaire de modifier la modélisation des impulsions et l'Hypothèse 2.1.2. En effet, dans le cas du modèle précédent, les variables  $X$  et  $Y$  sont à densité, il n'y a p.s. jamais d'impulsions de durée ou d'énergie nulles. Ceci peut arriver si l'on considère sous les mêmes hypothèses des lois discrètes pour les variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .

#### Modélisation des impulsions

Que l'on soit dans le cas d'un signal échantillonné ou d'un signal continu, il est en pratique impossible de détecter toutes les impulsions directement : on n'observe que les séquences *busy* ou *idle*. Par

<sup>3</sup>Par exemple,  $f$  n'existe pas et on n'a pas accès directement aux variables  $(X', Y')$ ...

conséquent, on peut modéliser une impulsion dans le cas discret de la même manière qu'on la modélisait en continu, à savoir comme une arrivée d'un processus de Poisson marqué. Nous continuerons d'adopter cette modélisation dans la suite.

Comme la modélisation est la même, les propriétés qui en découlaient et qui ont été démontrées dans le partie 2.1 restent également transposables. Nous pourrions donc nous en servir le cas échéant.

En revanche, il apparaît impossible en pratique de retrouver les caractéristiques d'une impulsion à partir du signal échantillonné, on définit donc les impulsions discrètes de façon à approcher le mieux possible par nos signaux observés les impulsions continues :

**Définition 2.3.1.** *On appelle instant d'arrivée discret de la  $n$ -ième impulsion la variable aléatoire  $T_m^{(d)}$  telle que :*

$$T_m^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \left\lfloor \frac{T_m}{T_e} \right\rfloor + 1 \right) \times T_e ,$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

On appelle durée discrète de la  $n$ -ième impulsion la variable aléatoire  $X_m^{(d)}$  telle que :

$$T_m^{(d)} + X_m^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \left\lfloor \frac{T_m + X_m}{T_e} \right\rfloor + 1 \right) \times T_e .$$

On appelle énergie discrète de la  $n$ -ième impulsion la variable aléatoire  $Y_m^{(d)}$  telle que :

$$Y_m^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=\left\lfloor \frac{T_m}{T_e} \right\rfloor + 1}^{\left\lfloor \frac{T_m + X_m}{T_e} \right\rfloor + 1} \left( \left\lfloor \frac{s(i \times T_e)}{T_q} \right\rfloor + 1 \right) \times T_q ,$$

où  $s(m)$  désigne la valeur du signal temporel à la date  $m$ .  $Y_m^{(d)}$  est donc la somme des échantillons du signal discret de la  $n$ -ième impulsion.

On modifie par conséquent l'Hypothèse 2.1.2 pour la rendre conforme à ce modèle.

**Hypothèse 2.3.1 (Transposition de l'Hypothèse 2.1.2).**  $\{(X_n^{(d)}, Y_n^{(d)})\}_{n \geq 1}$  forme une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de même loi de probabilité discrète  $f$ . On suppose que le support de  $f$  est inclus dans  $\mathbb{R}_+^2$  et que l'on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}, f(m, 0) = f(0, m) = 0 .$$

### Modélisation des séquences *busy* et *idle*

Dans le cas du signal échantillonné, on observe également des séquences *idle* et des séquences *busy*, mais on ne connaît pas l'instant exact de leur occurrence. Nous n'observons donc plus exactement  $T'_m$ ,  $X'_m$  ou  $Y'_m$ , car l'échantillonnage ne nous permet pas de mesurer exactement ces grandeurs. Néanmoins, la Définition 2.1.1 du partie 2.1 reste valable. Il suffit donc de redéfinir les séquences *busy* et *idle* de la manière suivante :

**Définition 2.3.2.** *On appelle instant d'arrivée discret de la  $n$ -ième séquence busy la variable aléatoire  $T'_m^{(d)}$  telle que :*

$$T'_m^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \left\lfloor \frac{T'_m}{T_e} \right\rfloor + 1 \right) \times T_e .$$

On appelle durée discrète de la  $n$ -ième séquence busy la variable aléatoire  $X'_m^{(d)}$  telle que :

$$X'_m^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} T_e \times \min_{kT_e \geq T'_m^{(d)}} \{i \in \mathbb{N} ; S_{iT_e} = 0\} .$$

On appelle **énergie discrète de la  $n$ -ième séquence busy** la variable aléatoire  $Y_m'^{(d)}$  telle que :

$$Y_m'^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=\lceil \frac{T_m'}{T_e} \rceil + 1}^{\frac{X_m'^{(d)} + T_m'^{(d)}}{T_e}} \left( \left\lfloor \frac{s(i \times T_e)}{T_q} \right\rfloor + 1 \right) \times T_q .$$

$Y_m'^{(d)}$  est donc la somme des échantillons du signal discret de la  $n$ -ième séquence busy.

On appelle **durée discrète de la  $n$ -ième séquence idle** la variable aléatoire  $Z_m'^{(d)}$  telle que :

$$Z_m'^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} T_{m+1}'^{(d)} - (T_m'^{(d)} + X_m'^{(d)}) .$$

### Notations

Pour des raisons de commodité, nous prendrons dans toute la suite une période d'échantillonnage en temps  $T_e$  et en énergie  $T_q$  égale à 1, en temps et en énergie, mais les calculs et les définitions qui suivent peuvent se déduire sans problème avec une autre période d'échantillonnage.

On pose  $\alpha = e^{-\lambda T_e} = \mathbb{P}(S_m = 0, m \in [nT_e ; (n+1)T_e])$ . On note  $s(m)$  le signal échantillonné en temps et en énergie, afin de simplifier les notations de la Définition 2.3.2. Il peut être montré facilement à partir de la Définition 2.3.2 que :

$$\begin{aligned} T_m'^{(d)} &= \sum_{i=1}^m Z_i'^{(d)} + \sum_{i=1}^{m-1} X_i'^{(d)} \\ Z_m'^{(d)} &= \max_{i \in \mathbb{N}} \left\{ s(T_m'^{(d)} + X_m'^{(d)} + j) = 0, \forall j \in [0 ; i - 1] \right\} \\ X_m'^{(d)} &= \max_{i \in \mathbb{N}} \left\{ s(T_m'^{(d)} + j) > 0, \forall j \in [0 ; i - 1] \right\} \\ Y_m'^{(d)} &= \sum_{i=0}^{X_m'^{(d)} - 1} s(T_m'^{(d)} + i) \end{aligned}$$

Afin d'avoir des notations similaires à celles de la partie 2.1, on note  $P'$  la loi jointe du couple  $(X_m'^{(d)}, Y_m'^{(d)})$ , et  $\mathcal{TZ}(P')$  la transformée en  $Z$  bidimensionnelle associée à  $P'$  dans le disque unité. On note  $f$  la loi jointe du couple  $(X_m^{(d)}, Y_m^{(d)})$ . On suppose que le modèle continu sous-jacent vérifie toutes les hypothèses introduites dans la partie 2.1. Il est alors aisé de vérifier que si les variables aléatoires du modèle à temps continu vérifient les Hypothèses 2.1.2 et 2.1.3, alors les variables discrètes engendrées vérifient les Hypothèses 2.3.1 et 2.1.3. En revanche, le processus  $\{T_m^{(d)}\}_{m \geq 1}$  n'est plus poissonnien.

Le Tableau 2.1 résume les notations utilisées et les relations entre elles. La Figure 2.4 montre graphiquement à quoi correspondent les grandeurs ainsi définies dans notre modèle discret. Ces grandeurs sont définies pour tout  $(m, n, i) \in \mathbb{N}^3$ , et pour tout  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$ .

$$\begin{aligned} P'(m, n) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X_i'^{(d)} = m \cap Y_i'^{(d)} = n) , \\ f(m, n) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X_i^{(d)} = m \cap Y_i^{(d)} = n) , \\ \mathcal{TZ}(P')(s, p) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} P'(m, n) s^m p^n . \end{aligned}$$

TAB. 2.1 – Résumé des principales notations

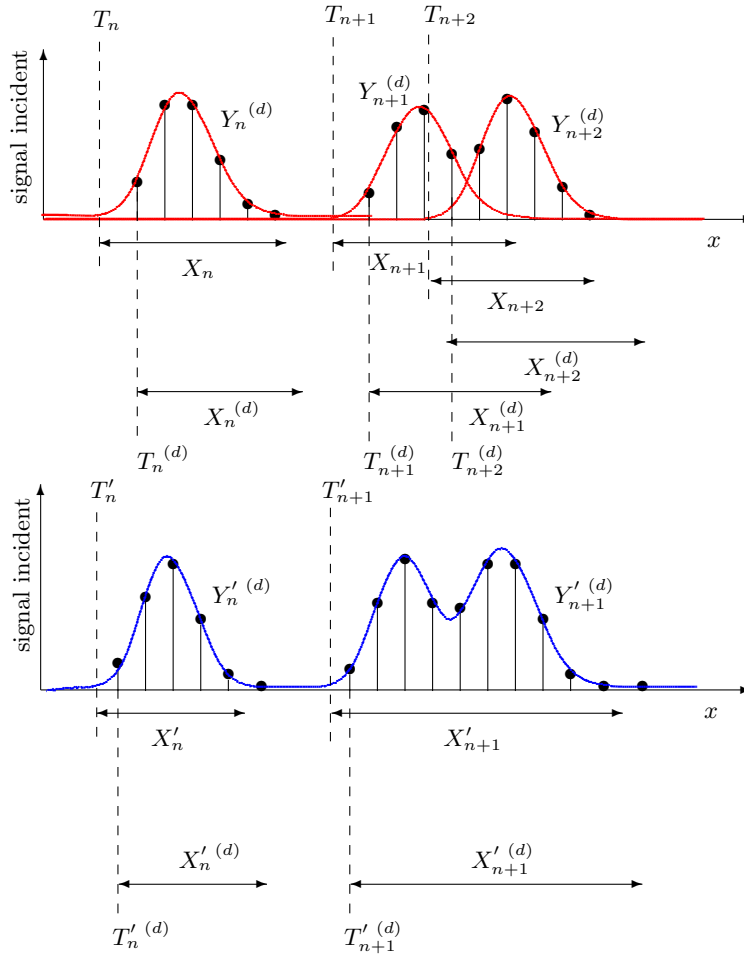


FIG. 2.4 – Représentation graphique des notations

### 2.3.2 Établissement de la formule de désempilement discret

On cherche dans cette partie à trouver une relation entre les termes de l'histogramme discret obtenu par  $P'$  et l'histogramme sans empilement donné par  $f$ .

#### Calcul de la grandeur d'intérêt à l'aide des impulsions d'impulsion

L'objectif est de trouver une fonction permettant de caractériser la fin des séquences *busy*, connaissant l'instant de début de ces séquences du fait du caractère poissonnien du processus. Nous noterons dans toute la suite, comme dans l'étude du cas continu,  $\rho(m, n)$  la probabilité qu'il y ait une fin d'impulsion avant la date discrète  $m$  et que l'énergie totale détectée auparavant soit égale<sup>4</sup> à  $n$  :

$$\rho(m, n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P} \left( s(m) = 0 \cap \sum_{i=1}^{m-1} s(i) = n \right), \quad (m, n) \in \mathbb{N}^2.$$

et on note pour tout  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$  :

$$\mathcal{TZ}(\rho)(s, p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \rho(m, n) s^m p^n \quad (m, n) \in \mathbb{N}^2$$

<sup>4</sup>Dans le cas continu, il était nécessaire de considérer des inégalités ; cette contrainte disparaît dans le cas discret.

la transformée en  $Z$  à deux dimensions associée à  $\rho$ . Là encore nous cherchons à exprimer ces deux grandeurs, d'une part en fonction d'une fonctionnelle de  $f$ , d'autre part à l'aide d'une fonctionnelle de  $P'$ .

Nous donnons maintenant le lien existant entre la grandeur d'intérêt  $\rho(m, n)$  et la loi des impulsions  $f$ ; la démonstration de la propriété suivante est faite de manière analogue à celle de la Proposition 2.2.4.

**Proposition 2.3.1.** *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, nous avons pour tout  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$  :*

$$\mathcal{TZ}(\rho)(s, p) = \sum_{m \geq 0} \left( \alpha^{m - \sum_{n=0}^{+\infty} k(m, n) p^n} \right) s^m - \frac{1}{1 - \alpha s}, \quad (2.42)$$

où

$$k(m, n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{m-j} f(i, n).$$

*Démonstration :* Comme les instants de début d'impulsion forment un processus de Poisson, on montre que le nombre d'impulsions dans le segment  $[0; m]$  est une variable aléatoire poissonnienne de paramètre  $\lambda m$ ; en utilisant cette propriété, nous avons donc :

$$\begin{aligned} \rho(m, n) &= \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(\mathcal{N}_m = i) \times \mathbb{P}(T_1^{(d)} + X_1^{(d)} \leq m, \dots, T_i^{(d)} + X_i^{(d)} \leq m, Y_1^{(d)} + \dots + Y_i^{(d)} = e | \mathcal{N}_m = i) \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{(\lambda m)^i}{i!} e^{-\lambda m} \times \mathbb{P} \left( T_1^{(d)} + X_1^{(d)} \leq m, \dots, T_i^{(d)} + X_i^{(d)} \leq m, \sum_{j=1}^i Y_j^{(d)} = n \middle| \mathcal{N}_m = i \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Calculons  $\mathbb{P}(T_1^{(d)} + X_1^{(d)} \leq m, Y_1^{(d)} = n | \mathcal{N}_m = 1)$ ; cette probabilité est égale à :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(T_1^{(d)} + X_1^{(d)} \leq m, Y_1^{(d)} = n | \mathcal{N}_m = 1) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(T_1 \in [i-1; i] | \mathcal{N}_m = 1) \times \mathbb{P}(T_1^{(d)} + X_1^{(d)} \leq m, Y_1^{(d)} = n | T_1 \in [i-1; i], \mathcal{N}_m = 1). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Les instants de début d'impulsion formant un processus de Poisson, ils sont distribués selon un tirage uniforme ordonné sur  $[0; m]$ , nous avons :  $\mathbb{P}(T_1 \in [i-1; i] | \mathcal{N}_m = 1) = \frac{1}{m}$ . Par ailleurs, sachant qu'une impulsion débute dans  $[i-1; i]$  :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(T_1^{(d)} + X_1^{(d)} \leq m, Y_1^{(d)} = n | T_1 \in [i-1; i], \mathcal{N}_m = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_1^{(d)} \leq m - i, Y_1^{(d)} = n | \mathcal{N}_m = 1, T_1 \in [i-1; i]) \\ &= \sum_{j=1}^{m-i} f(j, n), \end{aligned} \quad (2.45)$$

où  $f$  est défini conformément au Tableau 2.1. Par conséquent, d'après (2.44) et (2.45) :

$$\mathbb{P}(T_1^{(d)} + X_1^{(d)} \leq m, Y_1^{(d)} = n | \mathcal{N}_m = 1) = \frac{1}{m} k(m, n). \quad (2.46)$$

Remarquons que la probabilité

$$\mathbb{P} \left( T_1^{(d)} + X_1^{(d)} \leq m, \dots, T_i^{(d)} + X_i^{(d)} \leq m, \sum_{j=1}^i Y_j^{(d)} = n \middle| \mathcal{N}_m = i \right)$$

est invariante par permutation des triplets  $(T_m^{(d)}, X_m^{(d)}, Y_m^{(d)})$ , ce qui permet d'écrire pour tout  $m$  fixé, en utilisant cette égalité avec (2.43) et le fait que la loi d'une somme de  $n$  variables indépendantes et identiquement distribuées est donnée par la convolution  $n$ -ième de la loi de ces variables :

$$\mathbb{P} \left( T_1^{(d)} + X_1^{(d)} \leq m, \dots, T_i^{(d)} + X_i^{(d)} \leq m, \sum_{j=1}^i Y_j^{(d)} = n \mid \mathcal{N}_m = i \right) = \frac{k^{(2)*i}(m, n)}{m^i},$$

où  $\overset{(2)}{*}$  définit ici l'opération de convolution discrète suivant la deuxième composante ; par conséquent :

$$\rho(m, n) = \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda i} k^{(2)*i}(m, n). \quad (2.47)$$

En utilisant (2.47) pour calculer  $\mathcal{TZ}(\rho)(s, p)$  la transformée en  $Z$  à deux dimensions de  $\rho$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{TZ}(\rho)(s, p) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \rho(m, n) s^m p^n \\ &= \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{n \geq 0} \rho(m, n) p^n \right) s^m \\ &= \sum_{m \geq 0} \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda n} \left( \sum_{j \geq 1} k(m, j) p^j \right)^n \right\} s^m \\ &= \sum_{m \geq 0} \left( e^{-\lambda m + \lambda \sum_{j \geq 1} k(m, j) p^j} - e^{-\lambda m} \right) s^m \\ &= \sum_{m \geq 0} \left( \alpha^{m - \sum_{j \geq 1} k(m, j) p^j} \right) s^m - \frac{1}{1 - \alpha s}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

d'où (2.42). □

**Remarque 6 (Concernant la discrétisation).** *La démonstration précédente repose sur le fait que les temps d'arrivée des impulsions sont poissonniens : or, du fait de la discrétisation en temps des signaux, le début exact d'une impulsion n'est p.s. jamais détecté. Cela ne gêne en rien le raisonnement, car le fait qu'il y ait  $n$  impulsions dans  $[0; m]$  se terminant toutes avant  $m$  correspond effectivement à  $n$  transitions dans cet intervalle ; l'hypothèse poissonnienne peut donc être maintenue dans la démonstration précédente.*

Nous cherchons à présent à lier (2.42) avec les séquences *busy* discrètes.

### Calcul de la grandeur d'intérêt à l'aide des séquences *busy* discrètes

Nous donnons tout d'abord une définition.

**Définition 2.3.3.** *On dit qu'il y a une transition montante à la date  $m$  si et seulement si  $s(m-1) = 0$  et  $s(m) > 0$ .*

On s'intéresse à la probabilité qu'il y ait une transition montante à la date  $m$ , et que l'énergie totale emmagasinée avant cette date soit égale à  $n$ , soit  $\mathbb{P}(s(m-1) = 0, s(m) > 0, \sum_{i=1}^{m-1} s(i) = n)$ . Cette probabilité est nulle quand  $m \in \{0, 1\}$  ou  $n = 0$ , et un calcul immédiat montre que cette probabilité peut être exprimée en fonction de  $\rho(m, n)$ , et nous avons pour tout  $m \geq 2$  et  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( s(m-1) = 0, s(m) > 0, \sum_{i=1}^{m-1} s(i) = n \right) &= \rho(m-1, n) \times \mathbb{P}(s(m-1) = 0, s(m) > 0) \\ &= \rho(m-1, n) \times (1 - \alpha). \end{aligned}$$

La proposition suivante permet de relier  $\rho$  à la loi des séquences *busy*  $P'$ .

**Proposition 2.3.2.** Avec la notation précédente, en notant  $g(m) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(Z'_n{}^{(d)} = m)$ , on a pour tout  $m \geq 2$  et  $n \geq 1$  :

$$\rho(m-1, n) \times (1 - \alpha) = \left[ g \stackrel{(1)}{*} \sum_{i \geq 1} (P' \stackrel{(1)}{*} g)^{*i} \right] (m, n), \quad (2.49)$$

où  $*$  désigne l'opérateur de convolution usuel et  $\stackrel{(1)}{*}$  est l'opérateur de convolution partiel défini en 2.2.1.

*Démonstration :* En décomposant suivant les séquences *busy*, nous pouvons écrire :

$$\mathbb{P} \left( s(m-1) = 0, s(m) > 0, \sum_{i=1}^{m-1} s(i) = n \right) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P} \left( T'_i{}^{(d)} = m, \sum_{j=1}^{i-1} Y'_j{}^{(d)} = n \right)$$

Le premier terme de la série entière étant nul, on a par conséquent :

$$\mathbb{P} \left( s(m-1) = 0, s(m) > 0, \sum_{i=1}^{m-1} s(i) = n \right) = \sum_{i \geq 2} \mathbb{P} \left( T'_i{}^{(d)} = m, \sum_{j=1}^{i-1} Y'_j{}^{(d)} = n \right) \quad (2.50)$$

Calculons pour  $m \geq 2$  la probabilité  $\mathbb{P} \left( T'_i{}^{(d)} = m, \sum_{j=1}^{i-1} Y'_j{}^{(d)} = n \right)$ ; par définition des  $T'_m{}^{(d)}$ , nous pouvons écrire :

$$\mathbb{P} \left( T'_i{}^{(d)} = m, \sum_{j=1}^{i-1} Y'_j{}^{(d)} = n \right) = \mathbb{P} \left( \sum_{j=1}^i Z'_k{}^{(d)} + \sum_{j=1}^{i-1} X'_k{}^{(d)} = m, \sum_{j=1}^{i-1} Y'_j{}^{(d)} = n \right).$$

D'après l'indépendance de  $Z'_1{}^{(d)}$  et  $X'_1{}^{(d)}$ , nous avons pour un cycle d'une séquence *idle* suivi d'une séquence *busy*, en adaptant la démonstration de la Proposition 2.2.1, pour tout  $m \geq 2$  et pour tout  $n \geq 1$  :

$$\mathbb{P} \left( Z'_1{}^{(d)} + X'_1{}^{(d)} = m, Y'_1{}^{(d)} = n \right) = (P'(\cdot, \stackrel{(1)}{*} g))(m, n),$$

soit finalement d'après (2.3.2) :

$$\mathbb{P} \left( T'_i{}^{(d)} = m, \sum_{j=1}^{i-1} Y'_j{}^{(d)} = n \right) = \left[ g \stackrel{(1)}{*} (P' \stackrel{(1)}{*} g)^{* (m-1)} \right] (m, n). \quad (2.51)$$

En égalant (2.3.2) et (2.51), nous obtenons bien (2.49).  $\square$

### Formule de désempilement à temps discret

Nous donnons à présent, en utilisant les propriétés précédentes, l'égalité liant  $f$  à  $P'$ .

**Théorème 2.3.1 (Formule de désempilement à temps discret).** En gardant les notations et les hypothèses utilisées précédemment, on a pour tout couple  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$  :

$$\sum_{m \geq 0} \left( \alpha^{m - \sum_{n=0}^{+\infty} k(m, n) p^n} \right) s^m = \frac{1}{1 - (\alpha s + (1 - \alpha) s \mathcal{TZ}(P')(s, p))}. \quad (2.52)$$

*Démonstration :* En utilisant le théorème du retard pour la transformée en  $Z$  et la Proposition 2.3.2, nous avons :

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) s \mathcal{TZ}(\rho)(s, p) &= \mathcal{TZ}(g)(s) \times \sum_{i \geq 1} (\mathcal{TZ}(P')(s, p) \cdot \mathcal{TZ}(g)(s))^i \\ &= \mathcal{TZ}(g)(s) \left( \frac{1}{1 - \mathcal{TZ}(P')(s, p) \mathcal{TZ}(g)(s)} - 1 \right), \end{aligned} \quad (2.53)$$

et la transformée en  $Z$  de  $g$ , notée  $\mathcal{TZ}(g)$  ci-dessus, est donnée par  $\mathcal{TZ}(g)(s) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(Z'_m{}^{(d)} = i) s^i = \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha s}$ . En remplaçant dans (2.53), nous obtenons :

$$(1-\alpha)s\mathcal{TZ}(\rho)(s,p) = \frac{(1-\alpha)}{1-\alpha s - (1-\alpha)s\mathcal{TZ}(P')(s,p)} - \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha s}. \quad (2.54)$$

En utilisant les relations (2.42) et (2.54), la Proposition 2.3.1 et la Proposition 2.3.2 permettent d'obtenir l'égalité (2.52).  $\square$

**Remarque 7.** *De même que dans le cas des signaux à temps continu, il existe une relation dans le domaine réel liant une fonctionnelle de  $f$  à une fonctionnelle de  $P'$ . Cette relation étant assez lourde à expliciter, nous ne la détaillerons pas ici. Toutefois, elle présente l'avantage dans le cas discret de relier récursivement les coefficients de la loi de  $f$  à ceux de la loi de  $P'$ . Un algorithme récursif présentant la relation dans l'espace réel est détaillé dans [Trigano et al., 2004] et présenté dans l'annexe A.*

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi un modèle basé sur deux processus ponctuels marqués pour modéliser le signal temporel photonique, ce modèle étant adapté pour traiter le problème des empilements d'impulsions pour les compteurs de type II. Les relations entre ces deux processus étant complexes, nous avons cherché à partir d'observations limitées (dans notre cas, uniquement la durée et l'énergie des impulsions photoniques et des séquences *busy* et *idle* associées) d'établir des relations analytiques entre la densité  $f$  qui nous intéresse et la mesure de probabilité  $P'$  qui est observable.

A l'aide des Théorèmes 2.2.1 et 2.3.1, nous avons établi dans l'espace symbolique et dans l'espace direct des relations fonctionnelles entre ces deux lois de probabilité. Il est important que remarquer que ceci n'est rendu possible que parce que l'on considère les lois jointes durée-énergie des impulsions, et que ces relations ne reposent sur aucune approximation physique ou hypothèse d'allure du signal. En cela, elles sont à rapprocher des contributions de [Coates, 1992] pour les formules analytiques de correction de temps-mort, mais elles vont plus loin car elles permettent de retrouver une information sur l'énergie photonique, grandeur d'importance en spectrométrie  $\gamma$ . De plus ces relations ne reposent sur aucune approximation liée à la physique ou au détecteur.

Les relations entre ces deux densités nous permettent de considérer le problème du désempilement des impulsions photoniques comme un problème d'inférence non-paramétrique à partir de mesures indirectes, car les observations ne sont pas tirées suivant le densité  $f$  à estimer ; on peut également le voir comme un problème de déconvolution de densités de probabilité, les dites densités étant reliés par une équation non-linéaire. Dans le chapitre suivant, nous nous attacherons à ces considérations pour développer des estimateurs et étudier leurs performances.

## Chapitre 3

# Estimation non-paramétrique à partir de mesures indirectes pour le désempilement

*« Commissaire, le type qui a fait ça est un maniaque, j'espère que vous avez le coeur bien accroché parce que c'est une véritable boucherie à l'intérieur. »*

Lieutenant GRIMALDI, « La Cité de la Peur », 1994.

### Sommaire du chapitre

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Rappel et nouvelles hypothèses</b>                 | <b>48</b> |
| 3.1.1      | Modèle pour le désempilement à temps continu          | 48        |
| 3.1.2      | Notations et hypothèses supplémentaires               | 48        |
| <b>3.2</b> | <b>Lemmes techniques</b>                              | <b>49</b> |
| <b>3.3</b> | <b>Description des estimateurs</b>                    | <b>51</b> |
| 3.3.1      | Description de l'estimateur « naïf »                  | 51        |
| 3.3.2      | Problèmes liés à l'estimateur naïf                    | 52        |
| 3.3.3      | Méthodologie — Description de l'estimateur final      | 54        |
| 3.3.4      | Remarques finales sur la construction de l'estimateur | 58        |
| <b>3.4</b> | <b>Etude théorique de l'estimateur</b>                | <b>58</b> |
| 3.4.1      | Etude des termes aléatoires                           | 58        |
| 3.4.2      | Performances de l'estimateur final au sens de l'ISE   | 60        |
| 3.4.3      | Consistance et vitesses de convergence                | 65        |
| <b>3.5</b> | <b>Conclusion</b>                                     | <b>68</b> |

---

**A** PARTIR de l'étude faite dans le Chapitre 2, nous disposons d'un modèle probabiliste et de relations fonctionnelles entre  $f$  et  $P'$ . L'information sur la mesure de probabilité  $P'$  est accessible à partir de  $m$  observations indépendantes et identiquement distribuées  $\{(X'_i, Y'_i)\}_{1 \leq i \leq m}$ . Dans le cadre de la spectrométrie  $\gamma$ , l'information d'intérêt porte davantage sur l'énergie que sur les durées des impulsions photoniques. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au désempilement à temps continu, et nous cherchons par conséquent un estimateur de la densité de probabilité marginale associée à la loi en énergie des photons.

Nous pouvons rapprocher notre problème de celui détaillé dans [Hall and Park, 2004] qui considère le cas des files d'attente  $M/G/\infty$  : dans le cas où la loi des temps de service admet une densité de probabilité, Hall et Park proposent un estimateur de cette densité à partir d'observations des durées des séquences *busy*. En s'inspirant de la méthodologie décrite dans [Hall and Park, 2004], il est également possible de construire un estimateur de la densité de la loi des énergies photoniques.

Après avoir rappelé le modèle étudié et introduit des hypothèses supplémentaires qui seront utilisées dans la suite de ce chapitre, nous énonçons deux lemmes qui seront utilisés pour l'étude théorique de l'estimateur proposé, puis nous détaillons la construction de notre estimateur. Les aspects théoriques sont développés dans une troisième partie.

### 3.1 Rappel et nouvelles hypothèses

Nous rappelons ici les hypothèses faites dans le cadre du modèle que nous étudions, et nous introduisons des hypothèses supplémentaires qui seront utilisées pour l'étude théorique faite dans la partie 3.4.

#### 3.1.1 Modèle pour le désempilement à temps continu

On modélise le signal photonique incident par un processus de Poisson  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  homogène d'intensité  $\lambda$ , avec  $T_n > 0$  pour tout  $n$ , marqué par le couple  $(X_n, Y_n)$  où  $X_n$  représente la durée d'une impulsion photonique et  $Y_n$  l'énergie du  $n$ -ième photon. Les hypothèses faites sur ce modèle sont :

**Hypothèse 2.1.2 (rappel) :**  $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$  forme une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de même densité de probabilité  $f$ . On suppose que le support de  $f$  est inclus dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

**Hypothèse 2.1.3 (rappel) :**  $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$  et  $\{T_m\}_{m \geq 1}$  sont mutuellement indépendantes.

**Hypothèse 2.1.4 (rappel) :** On suppose que  $\mathbb{E}(X) < \infty$ . On suppose également que  $\mathbb{E}(Y) < \infty$ .

On modélise également la suite de séquences *busy* et *idle* par un processus ponctuel  $\{T'_n\}_{n \geq 1}$  marqué par les couples  $\{(X'_n, Y'_n)\}_{n \geq 1}$ , où  $X'_n$  définit la durée et  $Y'_n$  l'énergie de la  $n$ -ième séquence *busy*, ces variables aléatoires étant déduites de la Proposition 2.1.1 et du Corollaire 2.1.1. Les variables aléatoires de la suite  $\{(X'_n, Y'_n)\}_{n \geq 1}$  sont indépendantes et identiquement distribuées d'après la Proposition 2.1.2 et de mesure de probabilité commune  $P'$ . La suite des durées des séquences *idle* est notée  $\{Z_n\}_{n \geq 1}$ , et est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi commune exponentielle de paramètre  $\lambda$ , d'après la même proposition.

On définit par  $m$  la densité de probabilité marginale de  $f$  suivant la deuxième dimension, soit pour tout réel positif ou nul  $y$  :

$$m(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx .$$

Enfin, pour toute fonction à valeurs réelles  $g$  de  $L^1(\mathbb{R})$ , on définit  $g^*$  sa transformée de Fourier de la manière suivante :

$$g^*(\nu) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-i\nu y} dy .$$

#### 3.1.2 Notations et hypothèses supplémentaires

Ainsi que nous l'avons écrit précédemment, le problème que nous cherchons à traiter est à rapprocher à la fois des problèmes d'estimation non-paramétrique de densité de probabilité et de la déconvolution de densités dans un cadre linéaire. Les méthodes classiques reposent sur des estimateurs à noyau, introduits dans [Rosenblatt, 1956] et [Parzen, 1962], et sur les méthodes d'inversion de transformées de Fourier, que l'on peut retrouver dans [Devroye, 1989], [Fan, 1991] et [Zhang, 1990].

Il peut paraître surprenant de choisir de telles méthodes pour la déconvolution de densités, alors que des méthodes plus récentes permettraient de prendre en compte les irrégularités du spectre en énergie apportées par les pics photoniques, notamment dans le cadre de l'analyse multirésolution par

transformée en ondelettes ; on pourra par exemple se référer aux articles [Pensky and Vidakovic, 1999] pour un exemple d'estimation par ondelettes, ou [Johnstone *et al.*, 2004] qui introduit la décomposition dans une base d'ondelettes dans l'espace symbolique, mélangeant ainsi la déconvolution standard et les résultats théoriques existant sur les ondelettes (notamment les propriétés d'adaptivité). Rappelons encore une fois que le problème que nous étudions dans cette thèse, bien que présentant des similarités avec l'estimation de densité et la déconvolution de densités, sort de ces deux cadres pour deux raisons :

1. Contrairement au cas standard de l'estimation non-paramétrique de densités, nous ne disposons pas d'un échantillon *i.i.d.* de la densité à estimer, mais de mesures indirectes.
2. Nous sortons du cadre standard de la déconvolution de densités, car  $f$  et  $P'$  ne sont pas reliées linéairement.

Par conséquent, nous ne pouvons *a priori* utiliser aucun résultat établi dans ces cadres, mais plutôt adapter les méthodes utilisées. Il semble donc légitime d'essayer d'adapter dans un premier temps les méthodes d'estimation par noyau et de déconvolution par transformée de Fourier. L'utilisation de méthodes plus élaborées, et qui seraient plus à même de modéliser les données, feront l'objet de travaux futurs.

Dans toute la suite, nous considérons un noyau  $K$  que l'on suppose intégrable, et nous notons  $K^* : \nu \mapsto K^*(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} K(y)e^{-i\nu y} dy$  sa transformée de Fourier, de telle sorte que  $K^*(0) = 1$ . On note  $h$  la largeur de bande associée au noyau  $K$ . Pour disposer de résultats de convergence sur les estimateurs introduits, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires de régularité sur  $f$  et  $K$ , ou sur leurs transformées de Fourier respectives. Dans ce sens, on suppose :

**Hypothèse 3.1.1.**  $m \in \mathcal{W}(\beta)$ , où  $\mathcal{W}(\beta)$  est l'espace de Sobolev d'exposant  $\beta$ .

$$\mathcal{W}(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) ; \int (1 + |\nu|)^{2\beta} |g^*(\nu)|^2 d\nu < \infty \right\} ,$$

où  $g^*$  est la transformée de Fourier de  $g$ .

**Hypothèse 3.1.2.**  $K^*$  est à support compact, et il existe  $C_K > 0$  et  $l \geq \beta$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$|1 - K^*(z)| \leq C_K \frac{|z|^l}{(1 + |z|)^l} .$$

L'Hypothèse 3.1.1 est classique en estimation non-paramétrique de densités, tandis que l'Hypothèse 3.1.2 porte sur le comportement en 0 de  $K^*$ , et est finalement peu contraignante ; à titre indicatif, cette hypothèse est vérifiée si  $K^*$  est une gaussienne centrée et tronquée sur un segment centré.

La partie suivante introduit deux lemmes qui seront utilisés fréquemment dans la suite pour la démonstration des résultats énoncés.

## 3.2 Lemmes techniques

D'un point de vue purement formel, nous avons établi dans le Théorème 2.2.1 une relation fonctionnelle entre deux fonctions à valeurs complexes dans 2.41. Le Lemme 3.2.1 porte sur l'étude des fonctions complexes du type introduit en 2.41.

**Lemme 3.2.1.** Soient  $c > 0$  et  $\eta_0 > 0$  deux réels. Soient deux fonctions à valeurs complexes  $z_1$  and  $z_2$  quelconques vérifiant

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}, i=1,2} |z_i(\omega)| \leq 1 , \tag{3.1}$$

on note  $z = (z_1, z_2)$  et  $\Psi_z$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  de la manière suivante :

$$\Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z_1(\omega)}{(c + i\omega + \tilde{\lambda})(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}z_2(\omega))} .$$

Alors :

(i) La fonction  $\tilde{\lambda} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) d\omega$  est continuellement différentiable sur  $\mathbb{R}_+$  et de dérivée bornée indépendamment de  $z$  pour tout  $\tilde{\lambda} \in [0; \eta_0]$ .

(ii) Il existe un réel  $K > 0$  dépendant de  $c$  and  $\eta_0$  tel que, pour tout  $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  vérifiant également (3.1) et pour tout  $W \geq 1$  ou  $W = \infty$

$$\sup_{\tilde{\lambda} \in [0; \eta_0]} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega) d\omega \right| \leq K \left( \max_{i=1,2} \sup_{\omega \in [-W; W]} |z_i(\omega) - \tilde{z}_i(\omega)| + \frac{1}{W} \right).$$

*Démonstration.* Soient  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $\tilde{\lambda} \in [0; \eta_0]$  quelconques, on a d'après (3.1) et la concavité de la fonction racine carrée :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) \right| \leq \frac{3(c + |\omega|) + 4\eta_0}{(c^2 + \omega^2) \left( \sqrt{(c + \tilde{\lambda})^2 + \omega^2} - \tilde{\lambda} \right)^2}. \quad (3.2)$$

Soit  $\alpha \in [0; 1]$  fixé quelconque, nous pouvons écrire en utilisant l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} \sqrt{(c + \tilde{\lambda})^2 + \omega^2} &\geq \sqrt{\alpha (c + \tilde{\lambda})^2 + (1 - \alpha) \omega^2} \\ &\geq (c + \tilde{\lambda})\sqrt{\alpha} + |\omega|\sqrt{1 - \alpha}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En choisissant  $\alpha$  proche de 1 de telle sorte que  $(\sqrt{\alpha} - 1)\eta_0 + c\sqrt{\alpha} > 0$ , nous obtenons d'après (3.2) et (3.3)

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) \right| \leq \frac{3(c + |\omega|) + 4\eta_0}{(c^2 + \omega^2) \left( (\sqrt{\alpha} - 1)\eta_0 + c\sqrt{\alpha} + |\omega|\sqrt{1 - \alpha} \right)^2},$$

On remarque que le terme de droite de l'inégalité précédente ne dépend pas de  $\tilde{\lambda}$ , et est intégrable sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction de  $\omega$ , ce qui montre (i). Nous avons d'autre part pour tout  $\tilde{\lambda} \in [0, \eta_0]$  :

$$\begin{aligned} \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega) &= \frac{1}{c + i\omega + \tilde{\lambda}} \frac{(z_1(\omega) - \tilde{z}_1(\omega))(c + i\omega + \tilde{\lambda}) + \tilde{\lambda}(\tilde{z}_1(\omega)z_2(\omega) - \tilde{z}_2(\omega)z_1(\omega))}{(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}z_2(\omega))(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}\tilde{z}_2(\omega))} \\ &= \frac{(z_1(\omega) - \tilde{z}_1(\omega))}{(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}z_2(\omega))(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}\tilde{z}_2(\omega))} \\ &\quad + \frac{\tilde{\lambda}(\tilde{z}_1(\omega)z_2(\omega) - \tilde{z}_2(\omega)z_1(\omega))}{(c + i\omega + \tilde{\lambda})(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}z_2(\omega))(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}\tilde{z}_2(\omega))}. \end{aligned}$$

Remarquons que d'après (3.1),  $|\tilde{z}_1z_2 - \tilde{z}_2z_1| = |\tilde{z}_1(z_2 - \tilde{z}_2) - \tilde{z}_2(z_1 - \tilde{z}_1)| \leq |z_2 - \tilde{z}_2| + |z_1 - \tilde{z}_1|$ , donc d'après la même méthode que celle utilisée pour (3.2), nous avons pour  $\alpha$  choisi comme précédemment et pour tout  $\tilde{\lambda} \in [0; \eta_0]$  :

$$|\Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega)| \leq \frac{(c + |\omega| + 3\eta_0)}{\sqrt{c^2 + \omega^2} \left( (\sqrt{\alpha} - 1)\eta_0 + c\sqrt{\alpha} + |\omega|\sqrt{1 - \alpha} \right)^2} \max_{i=1,2} |z_i(\omega) - \tilde{z}_i(\omega)|.$$

Dans l'inégalité précédente, le terme de droite est intégrable sur  $\omega \in \mathbb{R}$  et est équivalent à  $[(1 - \alpha)|\omega|]^{-2}$  quand  $|\omega|$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent, il existe deux constantes  $K_1 > 0$  et  $K_2 > 0$  dépendant de  $c$  and  $\eta_0$  telles que :

$$\int_{-W}^{+W} |\Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega)| d\omega \leq K_1 \max_{i=1,2} \sup_{\omega \in [-W; W]} |z_i(\omega) - \tilde{z}_i(\omega)| \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}(c\sqrt{\alpha} + (\sqrt{\alpha} - 1)\eta_0)}$$

et, d'après (3.1) :

$$\int_{[-W; W]^c} |\Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega)| d\omega \leq K_2 W^{-1},$$

ce qui achève la démonstration de (ii).  $\square$

Afin d'obtenir des résultats sur le comportement de nos estimateurs, il est nécessaire d'avoir des conditions sur les moments de  $P'$ . La Proposition 2.1.5 montre que, sous réserve de conditions de moment adéquats sur  $f$ , alors les moments de  $P'$  ont les propriétés requises.

Ces deux lemmes étant posés, nous décrivons dans la partie suivante le choix d'un estimateur dérivant de la formule de désempilement établie au Théorème 2.2.1. En effet, il peut apparaître des problèmes numériques qui justifient le fait qu'une simple extension de l'algorithme présenté dans l'Annexe A est insuffisante pour l'application visée.

### 3.3 Description des estimateurs

L'objectif de cette partie est de dégager un estimateur de  $m$  à partir de la formule établie dans l'espace symbolique (Laplace) au Théorème 2.2.1. Nous présentons tout d'abord les limitations liées à un estimateur « naïf » de cette densité et dégagerons des problèmes numériques inhérents à cet estimateur<sup>1</sup>, puis nous détaillons en nous inspirant de la méthodologie décrite dans [Hall and Park, 2004] la construction d'un estimateur mieux conditionné au regard de ces problèmes numériques.

#### 3.3.1 Description de l'estimateur « naïf »

Rappelons que nous nous intéressons à un estimateur de  $m$ . Le Théorème 2.2.1 fournit une relation entre  $f$  et  $m$  qui peut formellement s'écrire :

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(P') ;$$

un estimateur direct de  $f$  consiste dès lors à inverser *ex abrupto* la relation précédente :

$$\hat{f} = \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{G}(\hat{P}') \right] ,$$

l'estimateur de  $m$  dérivant de celui de  $f$  par projection. On rappelle que l'on pose

$$k(x, \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau=0}^x (x - \tau) f(\tau, \cdot) d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau=0}^x \left\{ \int_{u=0}^{\tau} f(u, \cdot) du \right\} d\tau ,$$

et que, d'après le Théorème 2.2.1, nous avons pour tout  $(s, p) \in \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 ; \text{Re}(z_1) > 0, \text{Re}(z_2) \geq 0\}$  :

$$\int_{x=0}^{+\infty} e^{-sx} e^{-\lambda x} \left[ \exp \left( \lambda \int_{y=0}^{\infty} k(x, y) e^{-py} dy \right) - 1 \right] dx = \frac{1}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s, p)} \times \frac{\mathcal{L}P'(s, p)}{(s + \lambda)} .$$

En vertu de cette relation, il est aisé de voir que le terme de droite vérifie les conditions du Théorème de Bromwich-Riemann (voir Annexe B) ; nous pouvons donc écrire directement pour  $c > 0$  :

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \ln \left( 1 + \frac{e^{\lambda x}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s, i\nu)} \frac{\mathcal{L}P'(s, i\nu)}{(s + \lambda)} e^{sx} ds \right) e^{i\nu y} d\nu \right] \quad (3.4)$$

Notons  $(X'_m, Y'_m)_{1 \leq m \leq N}$  un  $N$ -échantillon de  $(X', Y')$ , et  $(Z_m)_{1 \leq m \leq N}$  un  $N$ -échantillon de  $Z$ . Nous obtenons directement de la relation (3.4) un estimateur « plug-in »  $\hat{f}_{c,n}$  de  $f$ , à savoir pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  :

$$\hat{f}_{c,n}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\hat{\lambda}_n} \ln \left( 1 + \frac{e^{\hat{\lambda}_n x}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s + \hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_n \mathcal{L}\hat{P}'_n(s, i\nu)} \frac{\mathcal{L}\hat{P}'_n(s, i\nu)}{(s + \hat{\lambda}_n)} e^{sx} ds \right) e^{i\nu y} d\nu \right] , \quad (3.5)$$

<sup>1</sup>Ces problèmes apparaîtront sur des simulations numériques détaillées au Chapitre 4.

où en vertu de la Proposition 2.1.2 :

$$\hat{\lambda}_n = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k \right)^{-1}, \quad (3.6)$$

et  $\mathcal{L}\hat{P}'_n(s, i\nu)$  est la transformée de Laplace empirique prise au point  $(s, i\nu) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R}$ , à savoir :

$$\widehat{\mathcal{L}P}'_n(s, i\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\hat{P}'_n(s, i\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-sX'_k - i\nu Y'_k}. \quad (3.7)$$

Finalement, un premier estimateur de  $m$  est donné pour tout  $y \in \mathbb{R}_+$  par :

$$\hat{m}_{c,n}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x=0}^{+\infty} \hat{f}_{c,n}(x, y) dx. \quad (3.8)$$

Nous déduisons alors de (3.8) un premier algorithme de correction d'empilements composé des étapes suivantes :

1. Estimation de la transformée de Laplace de  $P'$ ,
2. Inversion numérique de la transformée de Laplace suivant la première dimension du terme droit de l'égalité 2.41,
3. Passage au logarithme complexe du résultat de l'étape précédente, et inversion numérique de la transformée de Fourier suivant la deuxième dimension,
4. Différentiation suivant les durées.

En utilisant la méthode de Fourier d'inversion numérique des transformées de Laplace décrite dans l'Annexe B, on peut réaliser les étapes 2 et 3 de l'algorithme ci-dessus. Enfin, l'étape 4 de l'algorithme est faite à l'aide d'une différentiation numérique, à savoir :

$$f'(t) \approx \frac{f(t + \delta) - f(t)}{\delta},$$

où  $\delta$  est un pas défini par l'utilisateur.

### 3.3.2 Problèmes liés à l'estimateur naïf

Ce premier estimateur possède l'avantage de la rapidité d'implémentation. Sa définition présente néanmoins un certain nombre de problèmes. En effet, l'inversion numérique de la transformée de Laplace (étape 2 de l'algorithme) peut se faire de plusieurs façons, suivant que l'on dispose ou non de valeurs complexes ou réelles de la transformée de Laplace à inverser. Dans le premier cas (ce qui correspond à appliquer directement (3.8)), ceci pose un problème de définition du logarithme complexe, qui n'est pas défini de manière unique. Dans le deuxième cas (si l'on utilise une autre méthode d'inversion qui ne soit pas basée sur l'intégrale de Bromwich et utilise des valeurs réelles de la transformée de Laplace, voir des exemples en Annexe B), le problème est numériquement mal posé. De plus, l'étape 4 de différentiation numérique est également un problème mal posé. Nous détaillons cette notion ci-dessous.

#### Notions sur les problèmes mal posés

En analyse numérique, la notion de problème bien posé a été introduite en 1923 par Hadamard pour la résolution numérique d'équations différentielles<sup>2</sup>; en effet, il est important qu'un algorithme de résolution ne se comporte pas de manière trop « erratique » en fonction des données. Cette notion joue, comme on peut le voir dans [Groetsch, 1993], un rôle fondamental dans la théorie des problèmes inverses. Nous donnons ici une définition d'un problème bien posé :

<sup>2</sup>Cette définition laisse sous-entendre que la majorité des problèmes sont bien posés; en fait, ce n'est pas le cas pour la plupart des problèmes inverses. . .

**Définition 3.3.1.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés,  $G$  un opérateur de  $E$  dans  $F$ . On considère le problème  $G(f) = h$ , où  $h \in F$  est connu,  $f \in E$  est à déterminer. Alors le problème est dit bien posé au sens d'Hadamard si et seulement si :

1. ce problème admet une solution  $f$  pour tout  $h$ ,
2. cette solution est unique,
3. la solution dépend continument des données, c'est-à-dire :

$$\forall (f_n) \in E^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} G(f_n) = h \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f.$$

Si ces conditions ne sont pas vérifiées, le problème est dit mal posé.

Il est aisé de voir que des problèmes inverses très simples sont mal posés. Nous donnons deux exemples non triviaux : la dérivation et l'inversion de la transformée de Laplace quand elle est connue sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Deux exemples de problèmes mal posés

La différentiation et l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à le considérer comme le problème direct. D'un autre côté, la différentiation est un problème mal posé, comme nous allons le voir. Posons  $E = F = L^2([0; 1])$ , et posons  $G$  l'opérateur intégral :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, (Gf)(x) = \int_0^x f(\tau) d\tau.$$

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0; 1])$ , et  $(f_n)$  la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2 x),$$

on a alors :

$$f'_n(x) = f'(x) + n \cos(n^2 x).$$

Nous avons donc à la fois :

$$\|f_n - f\|_2^2 = \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

tandis que

$$\|f'_n - f'\|_2^2 = n^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right) = O(n^2) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, la différence entre  $f'$  et  $f'_n$  peut être aussi grande que l'on veut, alors que la différence entre  $f$  et  $f_n$  est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de  $G$ ) n'est donc pas continu pour la norme 2, le problème inverse du problème  $Gh = f$  est donc mal posé au sens d'Hadamard car la condition 3 de la Définition 3.3.1 n'est pas vérifiée.

Considérons à présent le problème de l'inversion de la transformée de Laplace à partir de données réelles. Pour cela, on pose  $E = F = L^\infty(\mathbb{R}_+)$ ; notons  $G$  l'opérateur de transformée de Laplace sur l'axe réel :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*, (Gf)(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx.$$

Pour montrons que le problème inverse associé à  $G$  est mal posé au sens d'Hadamard, on considère la suite de fonctions définie pour tout  $s \in \mathbb{R}_+$  :

$$(\mathcal{L}f)_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s+1} + \frac{\sqrt{ns}}{n^2 + s^2},$$

qui possède la propriété d'avoir une transformée de Laplace explicite, à savoir pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$f_n(x) = e^{-x} + \sqrt{n} \cos(nx) .$$

On vérifie aisément que  $\mathcal{L}(f_n) = (\mathcal{L}f)_n$ . Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-x}$ , on a donc :

$$\|\mathcal{L}f_n - \mathcal{L}f\|_\infty = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty ,$$

tandis que :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sqrt{n} \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty .$$

De même que précédemment, on conclut que la condition 3 de la Définition 3.3.1 n'est pas vérifiée, par conséquent le problème inverse associé à  $G$  est mal posé au sens d'Hadamard. Ceci s'explique de manière intuitive par le fait que la restriction de la transformée de Laplace d'une fonction à ses valeurs réelles fait perdre de l'information concernant les variations rapides de la cette fonction.

Comme on peut le voir dans [D'Amore and Murli, 2002], il est par conséquent fondamental pour l'inversion numérique d'une transformée de Laplace de savoir si cette dernière est connue uniquement sur l'axe des réels, où sur le demi-plan complexe où elle est définie. Dans le premier cas, comme on l'a vu précédemment, le problème est mal posé au sens d'Hadamard, par conséquent le problème d'inversion doit être régularisé et se ramène à un problème d'optimisation sous contraintes (voir pour une étude de ce problème [Brianzi and Frontini, 1991], ou [Tagliani, 2003] pour des exemples d'algorithmes dans ce cas). Dans le cas où la transformée de Laplace est connue sur le demi-plan complexe (ou sur une ensemble discret de points du demi-plan complexe), des méthodes relativement performantes existent, car le problème est cette fois bien posé. Le problème de l'inversion numérique de la transformée de Laplace peut donc être résolu. Le lecteur trouvera à l'Annexe B un aperçu des méthodes d'inversion numérique de la transformée de Laplace. Afin de contourner ce problème, nous choisissons une inversion numérique par méthode de Fourier, décrite également dans la même Annexe. Ceci pose alors le problème de la définition du logarithme complexe, qui peut quant à lui être contourné en considérant la forme principale du logarithme.

Le problème de la dérivation associé à notre estimateur est en revanche plus gênant, car il rend le problème mal conditionné. Nous verrons au chapitre suivant sur des exemples numériques les fluctuations numériques introduites par la dérivation. L'ensemble de ces problèmes justifient que nous ne retenions pas l'estimateur introduit en 3.8 comme objet d'étude, ainsi que la nécessité d'introduire un estimateur mieux conditionné afin de s'affranchir de ces problèmes.

### 3.3.3 Méthodologie — Description de l'estimateur final

Comme mentionné précédemment, nous nous intéressons davantage dans le cadre de notre étude à l'estimation de la loi de  $Y$ , grandeur d'intérêt en spectrométrie  $\gamma$ , plutôt qu'à la loi jointe de  $(X, Y)$ . Nous nous inspirons ici de la méthodologie de [Hall and Park, 2004]; dans cet article, Hall et Park s'intéressent au problème des files d'attente et cherchent à déterminer un estimateur de la densité de  $X$  à l'aide de la formule de Takacs. L'idée est de remplacer dans la mesure du possible les étapes de dérivation dans l'espace direct par une multiplication dans l'espace symbolique.

Nous introduisons dans ce but une fonction auxiliaire  $a : \mathbb{R}_+ \times \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}(z) \geq 0\} \mapsto \mathbb{C}$  définie par :

$$a(x, p) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left( \lambda \int_0^\infty e^{-p\varepsilon} k(x, \varepsilon) d\varepsilon \right) . \quad (3.9)$$

Le choix de cette fonction auxiliaire se justifie aisément : elle permet par définition de revenir à la densité marginale  $m$ , et peut également s'exprimer en vertu du Théorème 2.2.1 à l'aide de la loi observée. Nous avons d'une part en dérivant logarithmiquement (3.9) par rapport à  $x$ , par définition de  $k$  :

$$\int_0^{+\infty} e^{-p\varepsilon} \left( \int_0^x f(\tau, \varepsilon) d\tau \right) d\varepsilon = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial a}{\partial x}(x, p) . \quad (3.10)$$

Nous avons donc d'après (3.10) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial a}{\partial x}(x, i\nu) \right] K^*(h\nu) e^{i\nu y} d\nu = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{y-\varepsilon}{h}\right) \int_0^x f(\tau, \varepsilon) d\tau d\varepsilon. \quad (3.11)$$

Dans l'équation 3.11, les passages à la limite  $x \rightarrow \infty$  et  $h \rightarrow 0$  permet d'établir une formule d'inversion explicite qui sera utilisée pour la construction de l'estimateur final :

$$m(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial a}{\partial x}(x, i\nu) \right] K^*(h\nu) e^{i\nu y} d\nu \right\}, \quad (3.12)$$

Comme indiqué précédemment, nous cherchons maintenant à exprimer  $a$  en fonction de  $P'$  à l'aide du Théorème 2.2.1. Soit  $c > 0$  un réel strictement positif quelconque fixé. Comme  $P'$  est une mesure de probabilité, pour tout  $(s, p) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ,  $|\mathcal{L}P'(s, p)| \leq 1$ , l'égalité étant réalisée si et seulement si  $s = p = 0$ . Ainsi, pour tout complexe  $s$  vérifiant  $\operatorname{Re}(s) > 0$ ,  $|\mathcal{L}P'(s, p)| < 1$  et  $|\lambda/(s + \lambda)| < 1$ . Par conséquent, pour tout  $(s, p) \in \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\} \times \mathbb{C}$ , la fonction  $(s, p) \mapsto \frac{1}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s, p)}$  est développable en série entière et l'on a :

$$\frac{1}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s, p)} = \frac{1}{s + \lambda} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{\lambda \mathcal{L}P'(s, p)}{\lambda + s} \right)^n. \quad (3.13)$$

D'après les propriétés usuelles de la transformée de Laplace (voir Annexe B), on peut d'ores et déjà remarquer que chaque terme de la série entière donnée en (3.13) admet une transformée de Laplace inverse explicite, qui peut être exprimée à l'aide de produits de convolution de mesures de probabilités connues, et que chaque inverse peut être calculée récursivement. Ceci montre également que pour tout  $p \in \mathbb{C}$ , toutes les singularités de la fonction  $s \mapsto \frac{1}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s, p)}$  sont incluses dans le demi-plan  $\{z, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ , ce qui permet d'identifier la transformée de Laplace inverse suivant la première dimension avec l'intégrale de Bromwich associée, d'après le Théorème de Bromwich-Riemann. D'après (2.41), nous pouvons écrire pour tout  $(x, p) \in \mathbb{R}_+ \times \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$  en effectuant un changement de variables :

$$\begin{aligned} a(x, p) &= 1 + \frac{e^{\lambda x}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda \mathcal{L}P'(s, p)}{s + \lambda} \frac{e^{sx}}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s, p)} ds \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda \mathcal{L}P'(c + i\omega, p)}{c + i\omega + \lambda} \frac{e^{(c+\lambda+i\omega)x}}{c + i\omega + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(c + i\omega, p)} d\omega. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Les relations (3.14) et (3.12) peuvent à présent être utilisées pour la construction d'un estimateur « plug-in » de la densité  $m$ . D'après la relation (3.12), trouver un estimateur « plug-in » de  $m$  revient à déterminer des estimateurs des paramètres et fonctions inconnus apparaissant dans (3.12), à savoir dans notre cas  $\lambda$ ,  $a$  et  $\frac{\partial a}{\partial x}$ . Remarquons également que notre estimateur dépendra de trois paramètres, à savoir :

1.  $c$ , l'abscisse de convergence apparaissant dans (3.14),
2.  $h$ , qui caractérisera le passage à la limite  $\lim_{h \rightarrow 0}$  dans (3.12),
3.  $T$ , qui caractérisera le passage à la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$  dans (3.12).

Soient par conséquent  $c$ ,  $h$  et  $T$  trois réels strictement positifs quelconques fixés arbitrairement, et soit  $\{(X'_k, Y'_k)\}_{1 \leq k \leq n}$  un  $n$ -échantillon indépendant de loi commune  $P'$ . Comme indiqué précédemment,  $\lambda$  est estimé facilement à l'aide de l'estimateur introduit en (3.6) et, d'autre part, l'estimateur de la transformée de Laplace  $\mathcal{L}P'$  a été également introduit en (3.7) :

$$\hat{\lambda}_n = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k \right)^{-1} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{L}P}'_n(c + i\omega, i\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\hat{P}'_n(c + i\omega, i\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-(c+i\omega)X'_k - i\nu Y'_k};$$

ceci permet de déduire de la relation (3.14) un estimateur de  $a$  par « plug-in » :

$$\widehat{a}_n(T, i\nu) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\lambda}_n \mathcal{L}\widehat{P}'_n(c + i\omega, i\nu)}{c + i\omega + \widehat{\lambda}_n} \frac{e^{(\lambda+c+i\omega)T}}{c + i\omega + \widehat{\lambda}_n - \widehat{\lambda}_n \mathcal{L}\widehat{P}'_n(c + i\omega, i\nu)} d\omega . \quad (3.15)$$

La partie délicate (et qui apparaissait dans la construction de l'estimateur naïf) de notre méthode passe par la construction de l'estimateur de la dérivée partielle de  $a$ , *i.e.*  $\frac{\partial a}{\partial x}$ . Puisque, à la suite de notre changement de variables en (3.14), la fonction  $a$  est définie suivant la première dimension comme la transformée de Fourier inverse d'une fonction intégrable, il peut être tentant d'utiliser les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier (similaires à celles de la transformée de Laplace et décrites en Annexe B) et d'estimer sa dérivée en multipliant l'intégrande par un facteur  $i\omega$  avant d'effectuer l'inversion. Cette approche, qui permettrait de contourner le problème mal conditionné de la différentiation décrit précédemment, n'est pas ici directement applicable, car elle conduit à une intégrale qui n'est plus absolument convergente. Cependant, la forme particulière de la fraction rationnelle que nous avons à intégrer en (3.15) permet d'étudier à part sa partie singulière. Cette approche, qui est également adoptée dans [Hall and Park, 2004], va permettre d'estimer séparément la partie singulière et la partie intégrable de la fonction

$$\omega \mapsto \frac{\lambda \mathcal{L}\widehat{P}'_n(c + i\omega, i\nu)}{c + i\omega + \lambda} \frac{e^{(\lambda+c+i\omega)T}}{c + i\omega + \lambda - \lambda \mathcal{L}\widehat{P}'_n(c + i\omega, i\nu)} .$$

Remarquons en effet que pour tout complexe  $z$  tel que  $|z| < 1$ , nous pouvons écrire pour tout entier  $N$  :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k \geq 0} z^k = \sum_{k=0}^{N-1} z^k + \sum_{k \geq N} z^k = \sum_{k=0}^{N-1} z^k + \frac{z^N}{1-z} , \quad (3.16)$$

par conséquent nous pouvons appliquer cette décomposition pour isoler la partie singulière de (3.15) :

$$\frac{\lambda \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)}{c + i\omega + \lambda} \times \frac{1}{c + i\omega + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)} = A_1(\omega, i\nu) + A_2(\omega, i\nu) , \quad (3.17)$$

où l'on pose par définition :

$$A_1(\omega, i\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)}{(c + i\omega + \lambda)^2} ,$$

$$A_2(\omega, i\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\lambda \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu))^2}{(c + i\omega + \lambda)^2} \frac{1}{c + i\omega + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)} .$$

Fixons dans un premier temps  $\nu$ , on considère  $A_1$  et  $A_2$  comme des fonctions de  $\omega$ . Il est clair que  $A_1$  et  $A_2$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , et d'autre part :

$$|A_1(\omega, i\nu)| = O(\omega^{-2}) \quad \text{et} \quad |A_2(\omega, i\nu)| = O(\omega^{-3}) ,$$

à la fois quand  $\omega \rightarrow -\infty$  et quand  $\omega \rightarrow +\infty$ , ce qui montre l'intégrabilité de  $A_1$  et  $A_2$ . Remarquons qu'en utilisant les propriétés de translation et de convolution liées à la transformée de Laplace, le terme  $A_1$  peut être facilement relié à la transformée de Fourier de la convolution suivant la première dimension de  $P'$  avec la mesure d'une loi  $\Gamma(2, \lambda)$ . En effet, soit  $V$  une variable aléatoire indépendante de  $(X', Y')$ , suivant une loi  $\Gamma(2, \lambda)$ . On s'intéresse à la transformée de Laplace du couple  $(X' + V, Y')$  prise au point  $(c + i\omega, i\nu)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-(c+i\omega)(Y'+V)-i\nu Y'}) &= \mathbb{E}(e^{-(c+i\omega)X'-i\nu Y'}) \mathbb{E}(e^{-(c+i\omega)V}) \\ &= \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu) \times \int_{\mathbb{R}_+} \lambda^2 x e^{-(c+\lambda+i\omega)x} dx \\ &= \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu) \times \frac{\lambda^2}{(c + i\omega + \lambda)^2} = \lambda A_1(\omega, i\nu) . \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant (3.9), (3.14) et (3.17), nous obtenons une expression du développement de  $a(x, i\nu)$  pour tout  $(x, \nu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$a(x, i\nu) = 1 + a_1(x, i\nu) + a_2(x, i\nu), \quad (3.18)$$

où l'on pose, par définition et en vertu du calcul précédent :

$$\begin{aligned} a_1(x, i\nu) &\stackrel{\text{def}}{=} e^{(c+\lambda)x} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x-\tau \geq 0\}} \lambda(x-\tau) e^{-(c+\lambda)(x-\tau)} \left\{ e^{-c\tau} \mathbb{1}_{\{\tau \geq 0\}} \int_0^{+\infty} e^{-i\nu\varepsilon} P'(\tau, \varepsilon) d\varepsilon \right\} d\tau \\ &= \int_0^x \lambda(x-\tau) e^{\lambda\tau} \int_0^{+\infty} e^{-i\nu\varepsilon} P'(\tau, \varepsilon) d\varepsilon d\tau, \end{aligned}$$

et

$$a_2(x, i\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda \mathcal{L}P'(c+i\omega, i\nu))^2}{(c+i\omega+\lambda)^2} \frac{1}{c+i\omega+\lambda-\lambda \mathcal{L}P'(c+i\omega, i\nu)} e^{(\lambda+c+i\omega)x} d\omega.$$

De fait, nous avons ainsi isolé la partie singulière  $a_1$  et la partie intégrable  $a_2$ . Puisque

$$\left| \frac{(\lambda \mathcal{L}P'(c+i\omega, i\nu))^2}{(c+i\omega+\lambda)^2} \frac{1}{c+i\omega+\lambda-\lambda \mathcal{L}P'(c+i\omega, i\nu)} \right| = O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \text{ quand } \omega \rightarrow \pm\infty,$$

le terme  $a_2$  peut être dérivé sous l'intégrale, et nous pouvons donc écrire pour tout  $T \geq 0$  :

$$\frac{\partial a_2}{\partial x}(T, i\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda \mathcal{L}P'(c+i\omega, i\nu))^2}{c+i\omega+\lambda} \frac{e^{(\lambda+c+i\omega)T}}{c+i\omega+\lambda-\lambda \mathcal{L}P'(c+i\omega, i\nu)} d\omega. \quad (3.19)$$

D'un autre côté, le terme  $a_1$  peut être dérivé explicitement dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial x}(T, i\nu) &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( x \int_0^x e^{\lambda\tau} \int_0^{+\infty} e^{-i\nu\varepsilon} P'(\tau, \varepsilon) d\varepsilon d\tau - \int_0^x \tau e^{\lambda\tau} \int_0^{+\infty} e^{-i\nu\varepsilon} P'(\tau, \varepsilon) d\varepsilon d\tau \right) (T, i\nu) \\ &= \lambda \int_0^T e^{\lambda\tau} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-i\nu\varepsilon} P'(\tau, \varepsilon) d\varepsilon \right\} d\tau \\ &= \lambda \iint_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} e^{\lambda\tau - i\nu\varepsilon} P'(\tau, \varepsilon) d\varepsilon d\tau; \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ces calculs conduisent naturellement à des estimateurs de  $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial a_1}{\partial x}(T, i\nu)$  et  $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial a_2}{\partial x}(T, i\nu)$ . Si l'on note  $\hat{I}_{1,n}(T, i\nu)$  (respectivement  $\hat{I}_{2,n}(T, i\nu)$ ) l'estimateur de  $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial a_1}{\partial x}(T, i\nu)$  (respectivement  $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial a_2}{\partial x}(T, i\nu)$ ), nous avons :

$$\hat{I}_{1,n}(T, i\nu) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} e^{\lambda_n\tau - i\nu\varepsilon} \hat{P}'_n(d\tau, d\varepsilon) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X'_k \leq T\}} e^{\lambda_n X'_k - i\nu Y'_k} \text{ et} \quad (3.21)$$

$$\hat{I}_{2,n}(T, i\nu) = \frac{\hat{\lambda}_n e^{(c+\hat{\lambda}_n)T}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{L}\hat{P}'_n(c+i\omega, i\nu))^2}{c+i\omega+\hat{\lambda}_n} \frac{e^{i\omega T}}{c+i\omega+\hat{\lambda}_n - \hat{\lambda}_n \mathcal{L}\hat{P}'_n(c+i\omega, i\nu)} d\omega, \quad (3.22)$$

où  $\hat{\lambda}_n$  et  $\mathcal{L}\hat{P}'_n$  sont donnés en (3.6) et (3.7). Finalement, nous avons d'après (3.12), (3.18), (3.19) et (3.20) :

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial a}{\partial x}(T, i\nu) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial a_1}{\partial x}(T, i\nu) + \frac{\partial a_2}{\partial x}(T, i\nu), \quad (3.23)$$

et par conséquent nous pouvons déduire de (3.12) et (3.23) l'estimateur final de la densité de probabilité marginale  $m$  associée aux énergies des impulsions photoniques. Cet estimateur sera noté  $\hat{m}_{T,h,n}$  dans la suite, et est défini pour tout  $y \in \mathbb{R}_+$  par :

$$\hat{m}_{T,h,n}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\hat{I}_{1,n}(T, i\nu) + \hat{I}_{2,n}(T, i\nu)}{\hat{a}_n(T, i\nu)} \right] K^*(h\nu) e^{i\nu y} d\nu. \quad (3.24)$$

### 3.3.4 Remarques finales sur la construction de l'estimateur

Au terme de cet étude, nous avons décrit un estimateur de  $m$  qui permet de contourner les problèmes introduits par la différentiation numérique. Remarquons que le procédé constructif ainsi exhibé permet en fait de construire toute une famille d'estimateurs : en effet, le développement en série entière de (3.13) peut d'après (3.16) être tronqué à n'importe quel ordre, et chaque terme peut être inversé récursivement à partir de tous les termes précédents.

Une autre remarque s'impose quant à la méthode d'estimation concernant les signaux échantillonnés et numérisés : de par la nature discrète du modèle sous-jacent et de la loi que l'on cherche à reconstruire, la différentiation est ici remplacée par une différence finie, ce qui change radicalement l'approche, car le problème d'un mauvais conditionnement numérique ne se pose pas dans ce cas. Étant par nature mieux conditionnée, une méthode proche de celle développée pour l'estimateur « naïf » donne alors de bons résultats. Un algorithme calculant cet estimateur est donné en Annexe A.

La partie finale de ce chapitre est consacrée à l'étude théorique de l'estimateur introduit en (3.24).

## 3.4 Etude théorique de l'estimateur

Dans cette partie, nous donnons des résultats théoriques sur l'estimateur  $\hat{m}_{T,h,n}$ . Dans toute la suite de cette partie, nous noterons  $\hat{P}'_n$  la mesure empirique associée à notre  $n$ -échantillon  $\{(X'_k, Y'_k)\}_{1 \leq k \leq n}$ , définie pour toute fonction de deux variables  $g$  bornée par :

$$\hat{P}'_n g \stackrel{\text{def}}{=} \iint g(x, y) \hat{P}'_n(dx, dy) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(X'_k, Y'_k).$$

Ceci permettra d'écrire la transformée de Laplace empirique en fonction de la mesure empirique associée. Nous introduisons également des variables aléatoires auxiliaires qui seront utilisées pour la démonstration du théorème principal, afin d'étudier les fluctuations de la transformée de Laplace empirique. Soit  $W \geq 1$  quelconque fixé ; on définit les variables aléatoires suivantes :

$$\hat{\Delta}_n(W) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(\omega, \nu) \in [-W; W]^2} |\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu) - \mathcal{L}\hat{P}'_n(c + i\omega, i\nu)|, \text{ et}$$

$$\hat{E}_n(W) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\nu \in [-W; W]} \left| \int \mathbb{1}_{[0, T]}(x) e^{\lambda_n(x-T)} e^{-i\nu y} (P' - \hat{P}'_n)(dx, dy) \right|;$$

### 3.4.1 Etude des termes aléatoires

On rappelle tout d'abord une inégalité de concentration qui sera utilisée dans la suite.

**Proposition 3.4.1 (Inégalité de Hoeffding, 1963).** *Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires i.i.d. d'espérance et de variance finies. On suppose que les  $X_i$  sont bornées, i.e. qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $\mathbb{P}(X_k \in [a; b]) = 1$ . Alors, si l'on pose  $S \stackrel{\text{def}}{=} X_1 + \dots + X_n$ , on a pour tout  $t \geq 0$  :*

$$\mathbb{P}(S - \mathbb{E}(S) \geq nt) \leq \exp\left(-\frac{2nt^2}{(b-a)^2}\right).$$

La démonstration se trouve dans [Hoeffding, 1963]. On pourra trouver différents types d'inégalités de Hoeffding dans l'appendice 6 de [Van Der Waart and Wellner, 1996].

La Proposition 3.4.2 fournit des majorations pour les variables aléatoires  $\hat{\Delta}_n(W)$  et  $\hat{E}_n(W)$  introduites ci-dessus.

**Proposition 3.4.2.** *Supposons l'Hypothèse 2.1.4 vérifiée, soit  $\varepsilon > 0$  quelconque fixé ; on pose par définition  $M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\max\{X', Y'\})$ . Alors pour tout  $r > 0$  et pour tout  $W > 1$ , nous avons les majorations suivantes :*

$$\mathbb{P}(|\hat{\Delta}_n(W)| \geq \varepsilon) \leq \frac{4rM_1}{\varepsilon} + \left(1 + \frac{W}{r}\right)^2 \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{16}\right) ; \quad (3.25)$$

$$\mathbb{P}(|\hat{E}_n(W)| \geq \varepsilon) \leq \frac{4rM_1}{\varepsilon} + \left(1 + \frac{W}{r}\right) \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{16}\right) . \quad (3.26)$$

*Démonstration.* Remarquons dans un premier temps que d'après la Proposition 2.1.5, on a  $M_1 < \infty$ , il est donc possible de choisir éventuellement  $r$  tel que  $rM_1 \leq \varepsilon/4$ . On pose par définition  $\mathbf{z}_i \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_i, \nu_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x, y)$  et l'on définit également la fonction  $L_{\mathbf{z}}$  de la manière suivante :

$$L_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-(c+i\omega)x - i\nu y} ;$$

on a alors :

$$\begin{aligned} |L_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{x}) - L_{\mathbf{z}_2}(\mathbf{x})| &\leq e^{-cx} |e^{-i(\omega_1 x + \nu_1 y)} - e^{-i(\omega_2 x + \nu_2 y)}| \\ &\leq |e^{i\omega_1 x} - e^{i\omega_2 x}| |e^{-i\nu_1 y}| + |e^{i\nu_1 y} - e^{i\nu_2 y}| |e^{-i\omega_2 x}| \\ &\leq |x| |\omega_1 - \omega_2| + |y| |\nu_1 - \nu_2| \\ &\leq g(\mathbf{x}) \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_1 , \end{aligned} \quad (3.27)$$

où l'on pose par définition  $g(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|x|, |y|\}$  et  $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} |\omega_1 - \omega_2| + |\nu_1 - \nu_2|$  ; pour des raisons de commodité d'écriture, nous adopterons par la suite les notations utilisées dans [Van Der Waart and Wellner, 1996] pour l'étude des processus empiriques, à savoir :

$$\hat{P}'_n L \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} L(x, y) \hat{P}'_n(dx, dy) \quad \text{and} \quad P' L \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} L(x, y) P'(dx, dy) .$$

Par conséquent :

$$\Delta(W^{-1}, W, \hat{P}'_n) = \sup_{\mathbf{z} \in [-W, W]^2} |\hat{P}'_n L_{\mathbf{z}} - P' L_{\mathbf{z}}| .$$

Soit  $N \stackrel{\text{def}}{=} \lceil (W/r)^2 \rceil$ , où  $\lceil x \rceil$  est le seul entier appartenant à  $[x, x+1[$ . Par conséquent, en utilisant un argument de compacité, il existe un recouvrement fini de  $[-W; W]^2$  pour la norme sup, c'est-à-dire qu'il existe une suite finie de complexes  $(\mathbf{z}_k)_{1 \leq k \leq N}$  telle que :

$$[-W, W]^2 \subset \bigcup_{k=1}^N C(\mathbf{z}_k, r) ,$$

où  $C(\mathbf{z}_k, r)$  est le pavé  $z_k + [-r, r]^2$  (i.e. le translaté de  $[-r; r]^2$  par  $z_k$ ). En introduisant dans l'expression de  $\hat{\Delta}_n(W)$  cette réécriture de  $[-W, W]^2$ , nous obtenons la majoration suivante :

$$\hat{\Delta}_n(W) \leq \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ \sup_{\mathbf{z} \in C(\mathbf{z}_k, r)} |\hat{P}'_n L_{\mathbf{z}} - P' L_{\mathbf{z}}| \right\} . \quad (3.28)$$

En utilisant (3.27) pour majorer chaque terme du maximum apparaissant dans la relation (3.28), nous obtenons d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{z} \in C(\mathbf{z}_k, r)} |\hat{P}'_n L_{\mathbf{z}} - P' L_{\mathbf{z}}| &= \sup_{\mathbf{z} \in C(\mathbf{z}_k, r)} |\hat{P}'_n(L_{\mathbf{z}} - L_{\mathbf{z}_k}) + P'(L_{\mathbf{z}_k} - L_{\mathbf{z}}) - (P' L_{\mathbf{z}_k} - \hat{P}'_n L_{\mathbf{z}_k})| \\ &\leq \sup_{\mathbf{z} \in B(\mathbf{z}_k, r)} \left\{ \hat{P}'_n |(L_{\mathbf{z}} - L_{\mathbf{z}_k})| + P' |(L_{\mathbf{z}} - L_{\mathbf{z}_k})| + |(P' - \hat{P}'_n) L_{\mathbf{z}_k}| \right\} \\ &\leq r(\hat{P}'_n g + P' g) + |(P' - \hat{P}'_n) L_{\mathbf{z}_k}| , \end{aligned} \quad (3.29)$$

car  $|\mathbf{z} - \mathbf{z}_k|_1 \leq r$  sur l'ensemble  $C(\mathbf{z}_k, r)$ . Si l'on utilise cette inégalité dans (3.28), pour prouver (3.25), il suffit à présent de majorer  $\mathbb{P}(r[\hat{P}'_n + P'](g) \geq \varepsilon/2)$  et  $\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq N} |(P - P_n)L_{\mathbf{z}_k}| \geq \varepsilon/2)$ , probabilités associées aux deux termes de droite de l'inégalité (3.29).

Supposons dans un premier temps que  $rM_1 \leq \varepsilon/4$ ; d'après l'inégalité de Markov, en nous servant du fait que pour tout  $x \geq 2$ ,  $1/(x-1) \leq 1/x$ , nous pouvons écrire avec  $x = \varepsilon/(2rM_1) \geq 2$  :

$$\mathbb{P}\left(r[\hat{P}'_n + P'](g) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{r\hat{P}'_n g}{\varepsilon/2 - rM_1} \geq 1\right) \leq \frac{rM_1}{\varepsilon/2 - rM_1} \leq \frac{2}{\varepsilon/(2rM_1)}, \quad (3.30)$$

Dans la relation (3.30), remarquons que le terme de gauche est inférieur ou égal à 1 et que le terme de droite est supérieur ou égal à 1 lorsque  $rM_1 > \varepsilon/4$ , l'inégalité précédente est par conséquent vérifiée pour tout  $r > 0$ , ce qui fait apparaître le premier terme de la majoration de (3.25).

Le second terme de la majoration (3.25) vient de l'inégalité de Hoeffding. Comme le  $n$ -échantillon considéré  $\{(X'_k, Y'_k)\}_{1 \leq k \leq n}$  est indépendant et identiquement distribué et que  $|L_{\mathbf{z}}| \leq 1$ , d'après l'inégalité de Hoeffding (on pourra par exemple se référer à l'Appendice 6 de [Van Der Waart and Wellner, 1996] pour la démonstration de l'inégalité de Hoeffding que nous utilisons ici), et puisque

$$\{z \in \mathbb{C} ; |z| \geq \varepsilon\} \subset \left\{z \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Re}(z)| \geq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Im}(z)| \geq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right\},$$

nous pouvons écrire pour tout couple  $\mathbf{z}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|(P - P_n)L_{\mathbf{z}}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{\operatorname{Re}((P - P_n)L_{\mathbf{z}})}{2}\right| \geq \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{\operatorname{Im}((P - P_n)L_{\mathbf{z}})}{2}\right| \geq \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \\ &\leq 4 \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{16}\right). \end{aligned}$$

Remarquons que  $\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq N} |(P - P_n)L_{\mathbf{z}_k}| \geq \varepsilon/2) \leq \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(|(P - P_n)L_{\mathbf{z}_k}| \geq \varepsilon/2)$ , donc d'après l'inégalité précédente, nous pouvons écrire :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq N} |(P - P_n)L_{\mathbf{z}_k}| \geq \varepsilon/2\right) \leq 4N \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{16}\right),$$

et comme par définition de  $N$ , on a  $N \leq (W/r + 1)^2$ , on fait ainsi apparaître le second terme de la majoration (3.25), ce qui conclut la démonstration de (3.25).

Pour démontrer la majoration (3.26), on définit à présent  $L_\nu$  de la manière suivante :

$$L_\nu(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{[0, T]}(x) e^{\lambda_n(x-T)} e^{-i\nu y};$$

Comme par construction de notre estimateur,  $T \geq x$ , en effectuant les mêmes calculs que précédemment, nous obtenons cette fois :

$$|L_{\nu_1}(\mathbf{x}) - L_{\nu_2}(\mathbf{x})| \leq \mathbb{1}_{[0, T]}(x) e^{\lambda_n(x-T)} |e^{-i\nu_1 y} - e^{-i\nu_2 y}| \leq |e^{i\nu_1 y} - e^{i\nu_2 y}| \leq g(\mathbf{x}) |\nu_1 - \nu_2|,$$

où la fonction  $g$  est ici définie par  $g(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} |y|$ . Comme  $P'g \leq M_1 < \infty$  et  $|L_\nu| \leq 1$ , une démonstration similaire à celle effectuée pour  $\hat{\Delta}_n(W)$  conduit à la majoration (3.26).  $\square$

### 3.4.2 Performances de l'estimateur final au sens de l'ISE

Nous nous intéressons dans la suite de notre étude à l'erreur quadratique intégrée (ISE) entre la densité que nous souhaitons reconstruire et notre estimateur :

$$ISE(m, \hat{m}_{T, h, n}) \stackrel{\text{def}}{=} \int (m - \hat{m}_{T, h, n})^2(y) dy = \|m - \hat{m}_{T, h, n}\|_2^2.$$

Dans toute la suite de notre étude, nous noterons respectivement  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}(\beta)}$  la norme infinie, la norme  $L^2$  et la  $\beta$ -norme, c'est-à-dire la norme associée à  $\mathcal{W}(\beta)$ , l'espace de Sobolev d'exposant  $\beta$ , introduit dans l'Hypothèse 3.1.1. Le Théorème 3.4.1 montre que l'ISE peut être majoré par deux termes de biais et deux termes de variances, chacun de ces termes pouvant être majorés sous de bonnes hypothèses.

**Théorème 3.4.1.** *Supposons les Hypothèses 3.1.1 et 3.1.2 vérifiées. On note (C1) et (C2) les conditions suivantes :*

(C1) *Il existe deux constantes  $M > 0$  et  $\eta > 0$  ne dépendant que de  $c$  et  $\lambda$  telles que :*

$$|\hat{\lambda}_n - \lambda| \leq \min\{\eta, M^{-1}e^{-(c+2\lambda)T}\}; \quad (3.31)$$

(C2) *Il existe  $\eta > 0$  ne dépendant que de  $c$  et  $\lambda$  et  $M > 0$  ne dépendant que de  $c$ ,  $\lambda$  et  $\eta$  telles que pour tout  $W > 1$  :*

$$Me^{(c+2\lambda)T}(\hat{\Delta}_n(W) + W^{-1}) \leq 1 \quad (3.32)$$

Nous pouvons écrire :

$$\hat{m}_{T,h,n} = m + b_1 + b_2 + V_1 + V_2,$$

où  $b_1, b_2$  sont deux termes déterministes de biais satisfaisant :

$$\begin{aligned} - \|b_1\|_2^2 &\leq C_K^2 h^{2\beta} \|m\|_{\mathcal{W}(\beta)}^2, \\ - \|b_2\|_2^2 &\leq \|K^*\|_\infty^2 \left\| \int_{\tau=T}^{+\infty} f(\tau, \cdot) d\tau \right\|_2^2, \end{aligned}$$

et  $V_1, V_2$  sont deux variables aléatoires vérifiant, pour tout  $h \in ]0; 1]$ ,

- si (C1) est vérifiée :

$$\|V_1\|_2^2 \leq M \|K^*\|_\infty^2 (1+T)^2 h^{-1} e^{2(c+4\lambda)T} (\hat{\lambda}_n - \lambda)^2,$$

- si (C1) et (C2) sont vérifiées, alors pour tout  $W > h^{-1}$  :

$$\|V_2\|_2^2 \leq M \|K^*\|_\infty^2 (1+T)^2 h^{-1} e^{2(c+4\lambda)T} \left( \hat{\Delta}_n(W) + W^{-1} + \hat{E}_n(W) \right)^2.$$

*Démonstration.* Comme les estimateurs introduits précédemment dépendent de deux estimateurs sous-jacents,  $\hat{\lambda}_n$  et  $\widehat{\mathcal{L}P}'_n$ , il est utile d'introduire des fonctions auxiliaires afin de rendre les dépendances explicites. On définit donc les fonctions suivantes, dépendant des réels  $h, T, c$  et  $\tilde{\lambda}$  et d'une mesure de probabilité  $\tilde{P}'$  :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{\tilde{\lambda}e^{(c+\tilde{\lambda})T}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{L}\tilde{P}'(c+i\omega, i\nu)}{c+i\omega+\tilde{\lambda}} \frac{e^{i\omega T}}{c+i\omega+\tilde{\lambda}-\tilde{\lambda}\mathcal{L}\tilde{P}'(c+i\omega, i\nu)} d\omega \quad (3.33) \\ \tilde{I}_1(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') &\stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} e^{\tilde{\lambda}\tau - i\nu\varepsilon} \tilde{P}'(d\tau, d\varepsilon) \\ \tilde{I}_2(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\lambda}e^{(\tilde{\lambda}+c)T}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{L}\tilde{P}'(c+i\omega, i\nu))^2}{c+i\omega+\tilde{\lambda}} \frac{e^{i\omega T}}{c+i\omega+\tilde{\lambda}-\tilde{\lambda}\mathcal{L}\tilde{P}'(c+i\omega, i\nu)} d\omega \end{aligned}$$

et nous définissons une fonction liée à notre estimateur :

$$\tilde{m}(y; T, h, \tilde{\lambda}, \tilde{P}') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\tilde{I}_1(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') + \tilde{I}_2(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}')}{\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}')} \right] K^*(h\nu) e^{i\nu y} d\nu. \quad (3.34)$$

Avec ces définitions, on voit que :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(T, i\nu; \lambda, P') &= a(T, i\nu) \quad \text{et} \quad \tilde{a}(T, i\nu; \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n) = \hat{a}_n(T, i\nu), \\ \tilde{I}_1(T, i\nu; \lambda, P') &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} a_1(T, i\nu) \quad \text{et} \quad \tilde{I}_1(T, i\nu; \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n) = \hat{I}_{1,n}(T, i\nu), \\ \tilde{I}_2(T, i\nu; \lambda, P') &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} a_2(T, i\nu) \quad \text{et} \quad \tilde{I}_2(T, i\nu; \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n) = \hat{I}_{2,n}(T, i\nu), \end{aligned}$$

et d'autre part  $\hat{m}_{T,h,n}(y) = \tilde{m}(y; T, h, \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n)$ . On introduit également pour tout  $\tilde{\lambda} > 0$  et pour toute mesure de probabilité  $\tilde{P}'$  :

$$\tilde{m}^*(\nu; T, h, \tilde{\lambda}, \tilde{P}') \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{\tilde{I}_1(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') + \tilde{I}_2(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}')}{\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}')} \right] K^*(h\nu),$$

de sorte que, d'après (3.34),  $\tilde{m}^*(\nu; T, h, \tilde{\lambda}, \tilde{P}')$  est la transformée de Fourier de  $\tilde{m}(\nu; T, h, \tilde{\lambda}, \tilde{P}')$ . De manière analogue, on note dans la suite  $m^*$  la transformée de Fourier de  $m$ . Finalement, on définit les fonctions de  $\tilde{P}'$  associées aux variables aléatoires  $\hat{\Delta}_n(W)$  et  $\hat{E}_n(W)$  :

$$\Delta(h, W, \tilde{P}') \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(\omega, \nu) \in \Omega} |\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu) - \mathcal{L}\tilde{P}'(c + i\omega, i\nu)| \quad \text{où} \quad \Omega \stackrel{\text{def}}{=} [-W; W] \times [-h^{-1}; h^{-1}]$$

$$E(h, \tilde{P}', \tilde{\lambda}, T) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\nu \in [-h^{-1}; h^{-1}]} \left| \int \mathbb{1}_{[0, T]}(x) e^{\tilde{\lambda}(x-T)} e^{-i\nu y} (P' - \tilde{P}')(dx, dy) \right|,$$

de sorte que  $\Delta(W^{-1}, W, \hat{P}'_n) = \hat{\Delta}_n(W)$  et  $E(W^{-1}, \hat{P}'_n, \hat{\lambda}_n, T) = \hat{E}_n(W)$ . D'après l'inégalité de Minkowski, on peut écrire :

$$ISE(m, \hat{m}_{T,h,n}) \leq \left[ \sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{V_1} + \sqrt{V_2} \right]^2, \quad (3.35)$$

où l'on pose par définition :

$$b_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \left| m(y) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{y-\varepsilon}{h}\right) m(\varepsilon) d\varepsilon \right|^2 dy \quad (3.36)$$

$$b_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{y-\varepsilon}{h}\right) m(\varepsilon) d\varepsilon - \tilde{m}(y; T, h, \lambda, P') \right|^2 dy \quad (3.37)$$

$$V_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{y=-\infty}^{+\infty} |\tilde{m}(y; T, h, \lambda, P') - \tilde{m}(y; T, h, \hat{\lambda}_n, P')|^2 dy \quad (3.38)$$

$$V_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{y=-\infty}^{+\infty} |\tilde{m}(y; T, h, \hat{\lambda}_n, P') - \tilde{m}(y; T, h, \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n)|^2 dy. \quad (3.39)$$

Nous cherchons donc à majorer les quatre termes introduits précédemment.

**Majoration de  $b_1$  :** En utilisant (3.36),  $b_1$  peut être majoré en utilisant l'égalité de Parseval et l'Hypothèse 3.1.2 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{y-\varepsilon}{h}\right) m(\varepsilon) d\varepsilon - m(y) \right|^2 dy &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|(1 - K^*(h\nu))m^*(\nu)|^2}{(1 + |\nu|)^{2\beta}} (1 + |\nu|)^{2\beta} d\nu \\ &\leq C_K^2 h^{2\beta} \int_{\mathbb{R}} \Phi(h, \nu) (1 + |\nu|)^{2\beta} |m^*(\nu)|^2 d\nu, \end{aligned} \quad (3.40)$$

où l'on pose par définition :

$$\Phi(h, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h^{2l} |\nu|^{2l}}{h^{2\beta} (1 + h|\nu|)^{2l} (1 + |\nu|)^{2\beta}}.$$

Pour tout réel  $\nu$  vérifiant  $|\nu| \geq 1/h$ , comme la fonction  $x \mapsto x/(1+x)$  est majorée par sur  $[1; +\infty[$ , on a :

$$\Phi(h, \nu) \leq \frac{1}{h^{2\beta} (1 + 1/h)^{2\beta}} \leq 1,$$

et pour tout réel  $\nu$  tel que  $|\nu| \leq 1/h$ , puisque  $l \geq \beta$ , on a :

$$\Phi(h, \nu) \leq \frac{(h|\nu|)^{2l}}{h^{2\beta} (1 + |\nu|)^{2\beta}} \leq (h|\nu|)^{2(l-\beta)} \leq 1;$$

nous avons donc dans tous les cas :

$$\sup_{\nu \in \mathbb{R}} \Phi(h, \nu) \leq 1 .$$

En utilisant cette borne et la deuxième partie de l'Hypothèse 3.1.1 dans (3.40), nous obtenons :

$$\int_{y=0}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} K \left( \frac{y-\varepsilon}{h} \right) m(\varepsilon) d\varepsilon - m(y) \right|^2 dy \leq C_K^2 h^{2\beta} \|m\|_{\mathcal{W}}^2 , \quad (3.41)$$

ce qui est la première majoration souhaitée.

**Majoration de  $b_2$  :** Le terme  $b_2$  défini en (3.37) peut être majoré en utilisant la première partie de l'Hypothèse 3.4.1 et la formule de Parseval comme suit :

$$\begin{aligned} b_2 &= \int_{y=0}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} K \left( \frac{y-\varepsilon}{h} \right) \int_T^{+\infty} f(\tau, \varepsilon) d\tau d\varepsilon \right|^2 dy \\ &= \int_{y=0}^{+\infty} |K^*(h\nu)|^2 |m^*(\nu) - \tilde{m}^*(\nu; T, 0, \lambda, P')|^2 d\nu \\ &\leq \|K^*\|_{\infty}^2 \int_{y=0}^{+\infty} \left| m(y) - \int_{\tau=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} f(\tau, y) d\tau \right|^2 dy \\ &\leq \|K^*\|_{\infty}^2 \int_{y=0}^{+\infty} \left( \int_{\tau=T}^{+\infty} f(\tau, y) d\tau \right)^2 dy , \end{aligned} \quad (3.42)$$

d'où le résultat.

**Majoration de  $V_1$  :** En utilisant la formule de Parseval dans (3.39), d'après l'Hypothèse 3.1.2 et l'inégalité de Taylor-Lagrange, il suffit de montrer qu'il existe  $M > 0$  et  $\eta > 0$  tel que pour tout  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\lambda} \in [\lambda - \eta; \lambda + \eta]$  et  $T > 0$  tel que  $M(1+T)|\tilde{\lambda} - \lambda|e^{(c+2\lambda)T} \leq 1$ ,

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \left[ \frac{\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2}{\tilde{a}} \right] (T, i\nu; \tilde{\lambda}, P') \right| < M(1+T)e^{(2c+4\lambda)T} . \quad (3.43)$$

Soit  $\eta > 0$ , dont nous précisons la valeur plus loin. Remarquons tout d'abord que, par définition de  $\tilde{I}_1$  :

$$|\tilde{I}_1(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| \leq e^{\tilde{\lambda}T} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \tilde{I}_1(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P') \right| \leq T e^{\tilde{\lambda}T} . \quad (3.44)$$

D'après les relations (3.9) et (3.33), on peut écrire :

$$\tilde{a}(T, i\nu; \lambda, P') = a(T, i\nu) = \exp \left( \lambda \int_{\tau=0}^T (T-\tau) \int_{\varepsilon=0}^{+\infty} e^{-i\nu\varepsilon} f(\tau, \varepsilon) d\varepsilon d\tau \right) ,$$

et par conséquent nous avons l'encadrement suivant :

$$|\tilde{a}(T, i\nu; \lambda, P')| = \exp \left( \lambda \int_{\tau=0}^T (T-\tau) \int_{\varepsilon=0}^{+\infty} \cos(\nu\varepsilon) f(\tau, \varepsilon) d\varepsilon d\tau \right) \in [e^{-\lambda T}, e^{\lambda T}] . \quad (3.45)$$

D'après la définition de  $\tilde{a}$  donnée en (3.33), d'après le Lemme 3.2.1, il existe une constante  $M_1$  dépendant seulement de  $\lambda$ ,  $c$  et  $\eta$  telle que, pour tout  $\tilde{\lambda}$  appartenant à  $[0; \lambda + \eta]$ , on ait :

$$|(\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P') - 1)e^{-(\tilde{\lambda}+c)T} - (\tilde{a}(T, i\nu; \lambda, P') - 1)e^{-(\lambda+c)T}| \leq M_1 |\tilde{\lambda} - \lambda| . \quad (3.46)$$

On peut montrer de manière évidente que pour tout réel  $y$ ,  $|1 - e^y| \leq |y|e^{|y|}$ . Par conséquent, d'après (3.45) et (3.46), nous pouvons écrire une minoration de  $|\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')|$  :

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| &\geq |\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| e^{(\tilde{\lambda}-\lambda)T} - [M_1 |\tilde{\lambda} - \lambda| e^{(\tilde{\lambda}+c)T} + |1 - e^{(\tilde{\lambda}-\lambda)T}|] \\ &\geq e^{(\tilde{\lambda}-2\lambda)T} - [M_1 e^{(\tilde{\lambda}+c)T} + T e^{|\tilde{\lambda}-\lambda|T}] |\tilde{\lambda} - \lambda| \\ &\geq \frac{1}{2} e^{(\tilde{\lambda}-2\lambda)T}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

et cette minoration est vraie pour tout  $T > 0$  et pour tout  $\tilde{\lambda}$  vérifiant :

$$\left[ M_1 e^{(2\lambda+c)T} + T e^{(\lambda+2|\tilde{\lambda}-\lambda|)T} \right] |\tilde{\lambda} - \lambda| \leq 1/2.$$

En choisissant  $\eta < (\lambda + c)/2$ , nous obtenons donc, pour tout  $\tilde{\lambda} \in [\lambda - \eta, \lambda + \eta]$  et pour tout  $T > 0$  :

$$M_1 (1 + T) e^{(2\lambda+c)T} |\tilde{\lambda} - \lambda| \leq 1/4 \implies |\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| \geq \frac{1}{2} e^{(\tilde{\lambda}-2\lambda)T}. \quad (3.48)$$

D'après (3.33) et en utilisant des majorations similaires à celles du Lemme 3.2.1, on montre facilement l'existence d'un réel  $M_2 > 0$  dépendant seulement de  $\lambda$ ,  $c$  et  $\eta$  et tel que :

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| &\leq M_2 \tilde{\lambda} e^{(\tilde{\lambda}+c)T} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P') \right| \leq M_2 (1 + \tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}T) e^{(\tilde{\lambda}+c)T}, \\ |\tilde{I}_2(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| &\leq M_2 \tilde{\lambda} e^{(\tilde{\lambda}+c)T} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \tilde{I}_2(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P') \right| \leq M_2 (1 + \tilde{\lambda} + T\tilde{\lambda}) e^{(\tilde{\lambda}+c)T}. \end{aligned}$$

En utilisant ces dernières majorations et les majorations obtenues en (3.44) et (3.48), nous obtenons (3.43) en choisissant  $\eta$  suffisamment petit puis  $M$  assez grand pour  $c$  et  $\lambda$  fixés pour que la condition **(C1)** soit vérifiée, d'où :

$$\|V_1\|_2^2 \leq M \|K^*\|_\infty^2 (1 + T)^2 h^{-1} e^{2(2c+4\lambda)T} (\hat{\lambda}_n - \lambda)^2,$$

ce qui montre la majoration de  $V_1$ .

**Majoration de  $V_2$  :** Là encore, soit  $\eta > 0$  dont nous préciserons le choix dans la suite de la démonstration. Dans toute la suite,  $M_1$  et  $M_2$  désigneront des réels strictement positifs dépendant seulement de  $c$ ,  $\lambda$  et  $\eta$ .

D'après (3.33), nous pouvons écrire :

$$|\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') - \tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| = \left| \frac{\tilde{\lambda} e^{(c+\tilde{\lambda})T}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega)] d\omega \right|, \quad (3.49)$$

où la fonction  $\Psi$  est définie dans la Lemme 3.2.1, et où les fonctions complexes  $\tilde{z}$  et  $z$  sont définies par :

$$z(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{i\omega T} \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu); \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)) \quad \text{et} \quad \tilde{z}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{i\omega T} \mathcal{L}\tilde{P}'(c + i\omega, i\nu); \mathcal{L}\tilde{P}'(c + i\omega, i\nu)),$$

de sorte que le Lemme 3.2.1 est applicable dans ce cas. D'après (3.49) et le résultat (ii) du Lemme 3.2.1, nous pouvons écrire pour tout  $\tilde{\lambda} \in [0; \lambda + \eta]$  :

$$|\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P') - \tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}')| \leq M_1 \tilde{\lambda} e^{(c+\tilde{\lambda})T} \left( \Delta(h, W, \tilde{P}') + \frac{1}{W} \right). \quad (3.50)$$

On peut également borner  $\tilde{I}_1(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') - \tilde{I}_1(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')$  pour tout  $\tilde{\lambda} \in [0; \lambda + \eta]$  de la manière suivante :

$$|\tilde{I}_1(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') - \tilde{I}_1(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| \leq e^{\tilde{\lambda}T} E(h, \tilde{P}', \tilde{\lambda}, T) \quad (3.51)$$

et nous pouvons également écrire :

$$|\tilde{I}_2(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') - \tilde{I}_2(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| = \left| \frac{\tilde{\lambda} e^{(c+\tilde{\lambda})T}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega)] d\omega \right|, \quad (3.52)$$

avec :

$$z(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{i\omega T} (\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu))^2; \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)) \quad \text{et} \quad \tilde{z}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{i\omega T} (\mathcal{L}\tilde{P}'(c + i\omega, i\nu))^2; \mathcal{L}\tilde{P}'(c + i\omega, i\nu)).$$

Toujours d'après le résultat (ii) du Lemme 3.2.1, nous avons donc pour tout  $\tilde{\lambda} \in [0; \lambda + \eta]$  :

$$|\tilde{I}_2(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P') - \tilde{I}_2(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}')| \leq M_2 \tilde{\lambda} e^{(\tilde{\lambda}+c)T} \left( \Delta(h, W, \tilde{P}') + W^{-1} \right). \quad (3.53)$$

Nous cherchons maintenant à minorer le module de  $a(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}')$  ; d'après (3.50), nous pouvons écrire pour tous  $T$  et  $\tilde{\lambda}$  tels que l'inégalité

$$M_1 e^{(2\lambda+c)T} \left( \Delta(h, W, \tilde{P}') + W^{-1} \right) \leq \frac{1}{4}$$

soit vérifiée :

$$\begin{aligned} |\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}')| &\geq |\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| - |\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P') - \tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}')| \\ &\geq |\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| - M_1 e^{(c+\tilde{\lambda})T} \left( \Delta(h, W, \tilde{P}') + W^{-1} \right) \\ &\geq |\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| - \frac{1}{4} e^{(\tilde{\lambda}-2\lambda)T}. \end{aligned}$$

En choisissant  $\eta < (\lambda + c)/2$ , de sorte que (3.48) soit vérifiée, nous obtenons finalement pour tout  $\tilde{\lambda} \in [\lambda - \eta, \lambda + \eta]$  et  $T > 0$ , en choisissant  $M$  assez grand et en supposant que **(C1)** et **(C2)** sont vérifiées :

$$|\tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') \tilde{a}(T, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| \geq \frac{1}{4} e^{(2\tilde{\lambda}-4\lambda)T}. \quad (3.54)$$

Reremarquons de plus que pour  $W > h^{-1}$  :

$$\Delta(h, W, \hat{P}'_n) \leq \hat{\Delta}_n(W) \quad \text{et} \quad E(h, \hat{P}'_n, \hat{\lambda}_n, T) \leq \hat{E}_n(W),$$

et que pour tous nombres complexes  $x, y, z, x', y'$  et  $z'$ , on a :

$$\frac{x+y}{z} - \frac{x'+y'}{z'} = \frac{(z'-z)(x+y) + z(x-x') + z(y-y')}{zz'}.$$

Finalement, en prenant  $\eta$  suffisamment petit puis  $M$  suffisamment grand, en supposant **(C1)** et **(C2)** vraies, et en utilisant les bornes précédemment obtenues pour  $V_1$ , les relations (3.50), (3.51), (3.53) et (3.54) permettent d'écrire :

$$\|V_2\|_2^2 \leq M \|K^*\|_\infty^2 (1+T)^2 h^{-1} e^{2(2c+4\lambda)T} \left( \hat{\Delta}_n(W) + W^{-1} + \hat{E}_n(W) \right)^2,$$

ce qui achève la démonstration. □

### 3.4.3 Consistence et vitesses de convergence

Nous pouvons constater que les termes  $b_1, b_2, V_1$  et  $V_2$  introduits dans le Théorème 3.4.1 ont été majorés en norme 2 par des termes ne dépendant que de  $f$  ou introduits indépendamment du modèle  $(h, c$  et  $T)$ , le seul élément ne pouvant être contrôlé étant  $\lambda$ .

Pour conclure notre étude, nous montrons des résultats sur la vitesse de convergence de notre estimateur, qui montre également sa consistance. Pour cela, il est nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire sur la queue suivant la première dimension de la densité de probabilité  $f$  :

**Hypothèse 3.4.1.** Nous faisons suivant les cas considérés les hypothèses suivantes :

(H1) Le support de  $f$  est fini en durée, i.e. il existe  $T_{max} > 0$  tel que pour tout  $x \geq T_{max}$  et pour tout  $y \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(x, y) = 0$ .

(H2) Il existe  $C > 0$ ,  $\gamma > 0$  et  $\nu > 1$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$\int_{y=0}^{+\infty} \left( \int_x^{+\infty} f(\tau, y) d\tau \right)^2 dy \leq C e^{-|x|^\nu}.$$

Afin de rester le plus général possible, suivant le choix de notre modèle et les hypothèses faites précédemment, c'est l'Hypothèse (H2) qui doit être faite. Néanmoins, dans de nombreuses applications pratiques (notamment la spectrométrie avec détecteurs HPGé), on fait souvent l'hypothèse que les pics photoniques ont une durée finie sans pertes de performances notables, l'Hypothèse (H1) peut donc faire sens. Les deux corollaires suivants découlent du Théorème 3.4.1, et montrent le bon comportement de l'estimateur proposé.

**Corollaire 3.4.1.** Supposons les Hypothèses 3.1.1, 3.1.2 et 3.4.1-(H1) vérifiées; alors, en posant  $T_n = T_{max}$ , et en choisissant  $h_n$  :

$$h_n^{2\beta+1} = \frac{(\ln n)^{2\beta+1}}{n},$$

nous pouvons écrire :

$$\|m - \hat{m}_{T_n, h_n, n}\|_2^2 = O_{\mathbb{P}} \left( n^{-\frac{2\beta}{2\beta+1}} \ln n \right) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (3.55)$$

*Démonstration.* Posons  $T = T_{max}$ . Remarquons que si (H1) est vraie, alors d'après la loi forte des grands nombres la probabilité que la condition (C1) soit vérifiée tend vers 1 quand  $n \rightarrow +\infty$ . D'autre part, d'après la Proposition 3.4.2, nous pouvons écrire d'après la relation (3.25) en choisissant  $\varepsilon_n = C\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ ,  $r_n = \frac{\varepsilon_n}{\ln n}$  et  $W_n = C\sqrt{n}$  :

$$\mathbb{P} \left( |\hat{\Delta}_n(W_n)| \geq C\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right) \leq \frac{4M_1}{\ln n} + \left(1 + n\sqrt{\ln n}\right)^2 n^{-C^2/16}.$$

Par conséquent, pourvu que  $C^2/16 > 2$ , on a :

$$\hat{\Delta}_n(W_n) = O_{\mathbb{P}} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Ceci montre que la probabilité que la condition (C2) soit vérifiée tend vers 1 quand  $n \rightarrow +\infty$ . Nous pouvons donc utiliser les résultats du théorèmes 3.4.1. On a de même, en utilisant la relation (3.26) de la Proposition 3.4.2 :

$$\hat{E}_n(W_n) = O_{\mathbb{P}} \left( \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Soit  $\alpha > 0$ , et soit  $h_n$  défini par :

$$h_n^{2\beta+1} = \frac{(\ln n)^{2\beta+1}}{n},$$

et soit  $T_n = T_{max}$ ; alors d'après le Théorème 3.4.1,  $\|b_2\|_2^2 = 0$ . D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} n^{\frac{2\beta}{2\beta+1}} (\ln n)^{-1} \|b_1\|_2^2 &\leq C_K^2 (\ln n)^{\frac{2\beta}{2\beta+1}-1} \|m\|_{\mathcal{W}(\beta)}^2, \\ n^{\frac{2\beta}{2\beta+1}} (\ln n)^{-1} \|V_1\|_2^2 &\leq M_0 \frac{1}{(\ln n)^2} n(\hat{\lambda}_n - \lambda)^2 \\ \text{et } n^{\frac{2\beta}{2\beta+1}} (\ln n)^{-1} \|V_2\|_2^2 &\leq \frac{M_0}{\ln n} \frac{n}{\ln n} \left( \hat{\Delta}_n(\sqrt{n}) + \frac{1}{\sqrt{n}} + \hat{E}_n(\sqrt{n}) \right)^2, \end{aligned}$$

où  $M_0$  est une constante ne dépendant que de  $c$ ,  $\lambda$  et  $T_{max}$ . D'après le Théorème de la Limite Centrale,  $n(\hat{\lambda}_n - \lambda)^2$  est borné en probabilité, donc d'après les trois inégalités ci-dessus et les résultats précédents, on a bien :

$$\|m - \hat{m}_{T_n, h_n, n}\|_2^2 = O_{\mathbb{P}}\left(n^{-\frac{2\beta}{2\beta+1}} \ln n\right)$$

□

Ce résultat peut être étendu au cas où l'Hypothèse **(H1)** n'est plus vérifiée, sous réserve qu'une hypothèse de type **(H2)** soit ajoutée.

**Corollaire 3.4.2.** *Supposons les Hypothèses 3.1.1, 3.1.2 et 3.4.1-(H2) vérifiées ; soient  $\nu' \in [1/\nu; 1[$ , alors, en posant  $T_n = (\ln n)^{\nu'}$ , et en choisissant  $h_n$  tel que :*

$$h_n^{2\beta+1} = \frac{(\ln n)^{2\beta+1}}{n} \text{ quand } n \rightarrow +\infty ,$$

nous pouvons écrire :

$$\forall \alpha > 0, \quad \|m - \hat{m}_{T_n, h_n, n}\|_2^2 = O_{\mathbb{P}}\left(n^{-\frac{2\beta}{2\beta+1} + \alpha}\right) \text{ quand } n \rightarrow +\infty . \quad (3.56)$$

*Démonstration.* En utilisant la même démonstration que dans la preuve du Corollaire 3.4.1 :

$$\hat{\Delta}_n(W_n) = O_{\mathbb{P}}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right) \text{ quand } n \rightarrow +\infty ,$$

et :

$$\hat{E}_n(W_n) = O_{\mathbb{P}}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right) \text{ quand } n \rightarrow +\infty .$$

Soit  $\nu' \in [1/\nu; 1[$  fixé ; on définit :

$$T_n = (\ln n)^{\nu'}$$

Montrons dans un premier temps que les conditions **(C1)** et **(C2)** sont asymptotiquement vérifiées, ce qui permettra d'utiliser le Théorème 3.4.1 pour le calcul des vitesses de convergence. Fixons  $\lambda$  et  $c$ , ce qui impose le choix ultérieur de  $\eta$  et  $M$  introduit dans les deux conditions. Puisque  $0 < \nu' < 1$ , alors il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$  :

$$(\ln n)^{\nu'} \leq \frac{1}{c+2\lambda} \ln n \text{ et } M^{-1} \exp(-(c+2\lambda)(\ln n)^{\nu'}) \leq \eta ,$$

Nous pouvons écrire pour tout  $n \geq N$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\hat{\lambda}_n - \lambda| > \min\{\eta, M^{-1} \exp(-(c+2\lambda)(\ln n)^{\nu'})\}) \\ = \mathbb{P}(|\hat{\lambda}_n - \lambda| > M^{-1} \exp(-(c+2\lambda)(\ln n)^{\nu'})) \leq \mathbb{P}(|\hat{\lambda}_n - \lambda| > M^{-1} n^{-1/4}) , \end{aligned}$$

et d'après le théorème de la limite centrale  $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda)$  est bornée en probabilité, donc  $\mathbb{P}(|\hat{\lambda}_n - \lambda| > M^{-1} n^{-1/4}) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Par conséquent, pour ce choix de  $T_n$ , la probabilité que **(C1)** ne soit pas réalisée tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . De même, nous pouvons écrire pour tout  $n \geq N$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|M e^{(c+2\lambda)T_n}(\hat{\Delta}_n(W_n) + W_n^{-1})| > 1) &\leq \mathbb{P}\left(|\hat{\Delta}_n(W_n)| > M^{-1} e^{-(c+2\lambda)T_n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{n}{\ln n}} |\hat{\Delta}_n(W_n)| > M^{-1} \frac{n^{1/4}}{\sqrt{\ln n}} - \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right) , \end{aligned}$$

et puisque  $\hat{\Delta}_n(W_n) = O_{\mathbb{P}}\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la probabilité que la condition **(C2)** ne soit pas vérifiée tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ; Finalement, les conditions **(C1)** et **(C2)** sont asymptotiquement vérifiées, nous sommes donc dans la cadre d'application du Théorème 3.4.1. On peut tout d'abord remarquer que pour tout  $\gamma > 0$  fixé et pour tout entier  $n$  :

$$n^\gamma \exp(-T_n^\nu) = \exp(-(\ln n)^{\nu\nu'} + \gamma \ln n),$$

qui tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$  car  $\nu\nu' > 1$ ; nous avons de même

$$n^{-\gamma} \exp(2(4\lambda + 2c)T_n) = \exp(2(4\lambda + 2c)(\ln n)^{\nu'} - \gamma \ln n),$$

ce qui tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ , car  $\nu' < 1$ . Soit à présent  $\alpha > 0$  et  $h_n = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2\beta+1}}}$ . D'après l'Hypothèse 3.4.1-**(H2)** et le Théorème 3.4.1, on peut écrire les majorations suivantes :

$$n^{\frac{2\beta}{2\beta+1}-\alpha} \|b_1\|_2^2 \leq C_K^2 (\ln n)^{\frac{2\beta}{2\beta+1}} n^{-\alpha} \|m\|_{\mathcal{W}(\beta)}^2,$$

$$n^{\frac{2\beta}{2\beta+1}-\alpha} \|b_2\|_2^2 \leq C \|K^*\|_\infty^2 n^{-\alpha} e^{-(\ln n)^{\nu\nu'} + \frac{2\beta}{2\beta+1} \ln n},$$

$$n^{\frac{2\beta}{2\beta+1}-\alpha} \|V_1\|_2^2 \leq M \|K^*\|_\infty^2 \frac{n^{-\frac{\alpha}{2}}}{\ln n} (1 + (\ln n)^{\nu'})^2 n^{-\frac{\alpha}{2}} e^{2(2c+4\lambda)(\ln n)^{\nu'}} n(\hat{\lambda}_n - \lambda)^2, \text{ et}$$

$$n^{\frac{2\beta}{2\beta+1}-\alpha} \|V_2\|_2^2 \leq M \|K^*\|_\infty^2 n^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + (\ln n)^{\nu'})^2 n^{-\frac{\alpha}{2}} e^{2(2c+4\lambda)(\ln n)^{\nu'}} \frac{n}{\ln n} \left( \hat{\Delta}_n(\sqrt{n}) + \frac{1}{\sqrt{n}} + \hat{E}_n(\sqrt{n}) \right)^2,$$

on obtient donc bien le résultat souhaité ce qui précède, ce qui achève la démonstration de (3.56).  $\square$

Ces corrolaires montrent la consistance de nos estimateurs. Nous obtenons une vitesse de convergence proche des vitesses obtenues en estimation non-paramétrique classique. Remarquons que les facteurs limitants sont ici la présence de deux termes de biais et les vitesses de convergence de  $\hat{\Delta}_n(W_n)$  et  $\hat{E}_n(W_n)$ .

### 3.5 Conclusion

Au terme de notre étude, nous avons construit un estimateur muni de bonnes propriétés statistiques pour reconstruire la densité de probabilité associée aux énergies photoniques. Un estimateur simple du taux de comptage  $\lambda$  est apparu naturellement, ce qui permet de construire par « plug-in » un estimateur de  $m$ . Les vitesses de convergences trouvées sont proches de celles d'un estimateur à noyau dans le cadre de l'estimation non-paramétrique à partir d'observations i.i.d. de la densité à reconstruire.

Encore une fois, rappelons que la difficulté consiste ici à contourner le problème de la différentiation numérique, qui est source d'instabilité, et à rendre le problème mieux conditionné. Dans le cas du modèle à temps et énergies discrets, le problème ne se pose pas et la différentiation numérique peut être envisagée. Un tel estimateur est développé en Annexe A. D'autre part, nous décrivons en Annexe D un estimateur dérivant de  $\hat{m}_{T,c,n}$  ayant une vitesse de convergence asymptotique plus rapide, et ce sous des hypothèses plus générales. Reste à tester notre estimateur sur des simulations et sur des données réelles. Le protocole expérimental et les résultats obtenus sont discutés dans le prochain chapitre.

# Chapitre 4

## Résultats numériques

« Joel : That's the movies, Ed. Try reality.  
Ed : No thanks. »

Ellen HERMAN, « Northern Exposure, Only You », 1991.

### Sommaire du chapitre

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>4.1</b> | <b>Notations et protocole expérimental</b>                   | <b>70</b> |
| 4.1.1      | Choix des paramètres et des densités de probabilité initiaux | 70        |
| 4.1.2      | Préliminaire : élimination de l'estimateur naïf              | 72        |
| 4.1.3      | Influence des paramètres sur l'algorithme (A2)               | 72        |
| <b>4.2</b> | <b>Résultats sur données simulées</b>                        | <b>72</b> |
| 4.2.1      | Résultats sur l'estimateur naïf                              | 72        |
| 4.2.2      | Influence des paramètres                                     | 73        |
| 4.2.3      | Résultats sur la densité (D4)                                | 76        |
| <b>4.3</b> | <b>Description du système ADONIS</b>                         | <b>77</b> |
| 4.3.1      | Limites du filtrage adapté                                   | 77        |
| 4.3.2      | Description du systèmes ADONIS                               | 80        |
| <b>4.4</b> | <b>Résultats sur données réelles</b>                         | <b>85</b> |
| 4.4.1      | Remarque préliminaire  | 86        |
| 4.4.2      | Résultats obtenus par l'algorithme (A2)                      | 86        |
| 4.4.3      | Résultats obtenus par l'algorithme (A3)                      | 88        |
| <b>4.5</b> | <b>Discussion</b>  | <b>88</b> |
| 4.5.1      | Interprétation des résultats sur simulations                 | 88        |
| 4.5.2      | Interprétation des résultats sur données réelles             | 89        |
| <b>4.6</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>92</b> |

---

L'ÉTUDE théorique réalisée dans les Chapitres 2 et 3 a permis de formaliser le problème de la correction d'empilements pour la spectrométrie  $\gamma$  dans le cadre de détecteurs HPGe. Nous disposons d'un estimateur dont les performances asymptotiques sont d'un ordre comparable aux estimateurs non-paramétriques standard. L'objectif de ce chapitre est de valider numériquement ces estimateurs, à la fois sur des données synthétiques obtenues par simulation et des données réelles. La partie 4.1 est consacrée à la description des algorithmes et du protocole expérimental utilisé pour les simulations. Ces simulations, qui sont effectuées à la fois sur des densités de probabilité proches ou non des observations physiques, permettent de dégager des heuristiques quant au choix des paramètres optimaux ; les résultats sont présentés dans la partie 4.2.

Nous nous intéressons ensuite aux résultats sur données réelles. Dans ce cas, il faut souligner que l'acquisition des couples durées-énergies des séquences *busy* ne fait pas partie de l'état de l'art de la spectrométrie  $\gamma$ , mais a été obtenu grâce à un système spécifique, ADONIS<sup>1</sup>, développé par le CEA

<sup>1</sup>Atelier de Développement pour une Nouvelle Instrumentation en Spectroscopie

Saclay. La méthodologie sous-jacente à ce système est détaillée dans la partie 4.3, puis nous présentons dans la partie 4.4 les résultats obtenus sur des données réelles. Nous discutons des performances numériques dans la partie 4.5.

## 4.1 Notations et protocole expérimental

Nous décrivons en détail les densités de probabilité sur lesquelles nous avons testé nos programmes et étudié l'influence des paramètres. La méthode associée au modèle à temps discret étant décrite dans l'Annexe A, nous nous focalisons essentiellement dans cette partie sur les méthodes et estimateurs dérivant du modèle continu. Dans toute la suite, nous parlerons de durées pour désigner la première dimension des densités bidimensionnelles (de type  $f$ ) étudiées, et d'énergie pour désigner la seconde dimension.

### 4.1.1 Choix des paramètres et des densités de probabilité initiaux

Nous supposons que nous disposons d'un nombre  $N$  d'observations  $\{(X'_k, Y'_k)\}_{1 \leq k \leq N}$ . Pour notre premier ensemble de simulations, nous avons cherché à tester notre algorithme sur des lois simples, et qui pouvaient se rapprocher de l'allure des spectres en énergie observés en spectrométrie  $\gamma$ . Nous avons choisi des mélanges de gaussiennes tronquées sur  $\mathbb{R}_+$ , à la fois pour leur bonne adéquation avec les signaux physiques et les hypothèses faites sur la densité  $f$  pour l'étude des performances de l'estimateur  $\hat{m}_{T,h,n}$ . Dans la suite, nous noterons  $\mathcal{N}_{a,b}$  la densité de probabilité associée à la loi gaussienne tronquée sur  $\mathbb{R}_+$  de moyenne  $a$  et d'écart-type  $b$ . Les échantillons de  $f$  ont été tirés suivant quatre densités différentes :

(D1) une gaussienne bidimensionnelle tronquée sur  $\mathbb{R}_+^2$  :

$$f(x, y) = \mathcal{N}_{20,3}(x) \times \mathcal{N}_{100,6}(y) ,$$

(D2) un mélange de deux gaussiennes tronquées sur  $\mathbb{R}_+^2$  pour les énergies, une gaussienne pour les durées :

$$f(x, y) = \mathcal{N}_{20,3}(x) \times (0.6\mathcal{N}_{100,6}(y) + 0.4\mathcal{N}_{130,9}(y)) ,$$

(D3) un mélange de deux gaussiennes et d'une fonction schématisant la diffusion Compton pour les énergies, et une loi tronquée pour les durées conditionnellement aux énergies :

$$f(x, y) \propto \Gamma \left( 2 \left( 10 + \frac{10y}{512} \right)^2, 10 + \frac{10y}{512} \right) (x) \times g(y) ,$$

avec  $\Gamma(\alpha, \beta)$  étant la densité de probabilité d'une loi Gamma de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , et :

$$g(y) = \left( 10^2 \mathcal{N}_{100,4}(y) + 5 \mathcal{N}_{225,4}(y) + 10 \left( e^{e^{-\frac{y^2}{10000}}} - 1 \right) + 10^{-3} \right) \times \mathbb{1}_{\{1 \leq y \leq 512\}} ,$$

(D4) Une densité de probabilité obtenue à partir d'un spectre en énergie du Césium 137 obtenu à un très faible taux de comptage pour éviter les empilements au maximum, les durées étant tirées indépendamment suivant une loi Gamma tronquée de paramètres  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  et tronquée à  $\text{Tr} = 4$ .

La densité marginale en énergie associée à (D4) a été représentée dans le chapitre 1 à la Figure 1.1-(a), nous donnons en Figure 4.1 la densité (D3) vue de dessus et la loi marginale en énergie associée. Les densités (D1) et (D2), de par leur simplicité et le fait qu'elles vérifient les Hypothèses faites précédemment, sont utilisées pour étudier l'influence des paramètres, tandis que (D3) et (D4), plus proches des observations physiques, permettent de valider les algorithmes utilisés avant l'application sur des données réelles.

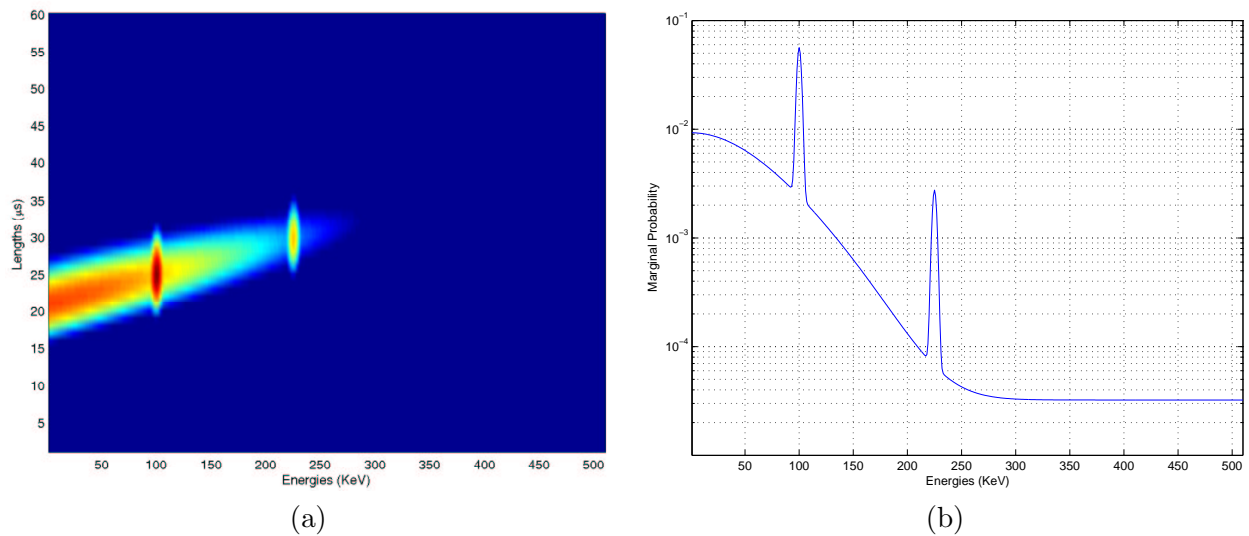


FIG. 4.1 – Densité **(D3)** — (a) Vue de dessus. (b) Marginale en énergie.

Les échantillons associés à  $(X, Y)$  sont ensuite utilisés pour déterminer les échantillons  $\{(X'_k, Y'_k)\}_{1 \leq k \leq N}$  à l'aide de la Proposition 2.1.1 et du Corollaire 2.1.1. La Figure 4.2 donne à titre informatif un estimateur de la loi  $P'$  avec empilements associée à **(D3)**, ainsi que sa marginalisation suivant les énergies. Il peut paraître surprenant d'avoir choisi comme densité de test la densité **(D3)**, qui ne vérifie pas

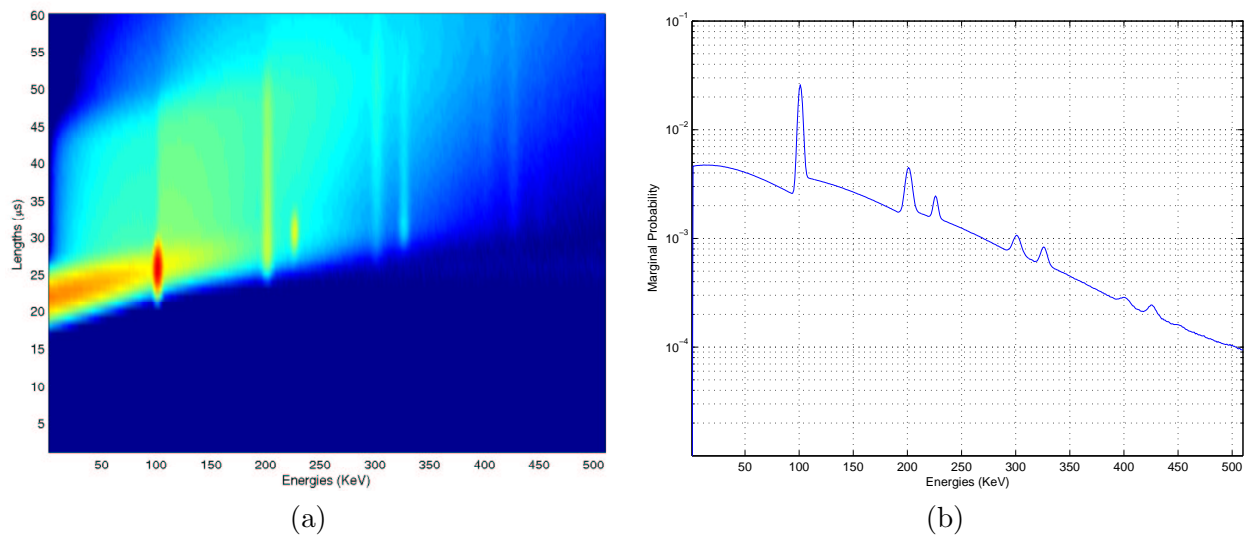


FIG. 4.2 – Loi des empilements associés à **(D3)** — (a) Vue de dessus. (b) Marginale en énergie.

les hypothèses faites sur  $f$  dans les deux Chapitres précédents, notamment l'Hypothèse 3.4.1. De fait, cette densité a été introduite afin de tester la robustesse de nos algorithmes lorsque les hypothèses faites sur  $f$  ne sont plus vérifiées.

Nous avons implémenté trois algorithmes :

- (A1) Le premier lié à l'estimateur (3.8),
- (A2) le second lié à l'estimateur (3.24),
- (A3) le troisième lié à la méthode développée en Annexe A pour le modèle à temps discret.

### 4.1.2 Préliminaire : élimination de l'estimateur naïf

Le premier algorithme implémenté porte sur l'estimateur « naïf » introduit en 3.3, et la comparaison avec l'algorithme à temps discret. Nous avons voulu vérifier dans un premier temps les performances de l'algorithme établi pour le modèle discret en Annexe A. Cet algorithme a été testé sur les densités **(D2)** et **(D3)**. Pour confirmer le mauvais comportement de l'estimateur « naïf », nous avons fait les comparaisons suivantes :

1. Comparaison des performances de **(A1)** et **(A2)** sur la densité **(D2)**,
2. Comparaison des performances de **(A1)** et **(A3)** sur la densité **(D3)**.

Les résultats obtenus montrent *a posteriori* la nécessité d'introduire un autre estimateur pour le modèle continu.

### 4.1.3 Influence des paramètres sur l'algorithme (A2)

Nous avons étudié le comportement numérique de l'algorithme **(A2)** sur les densités **(D1)** et **(D2)**, et en particulier l'influence des divers paramètres d'entrée sur le résultat, afin de valider dans la mesure du possible nos résultats théoriques et de dégager des heuristiques pour un réglage des paramètres guidé par les données. Dans ce but, nous nous intéressons au choix des paramètres suivants :

- l'abscisse de convergence  $c$ ,
- la durée de coupure  $T$ ,
- la largeur de bande du noyau  $h$ , et
- le nombre d'échantillons  $N$ .

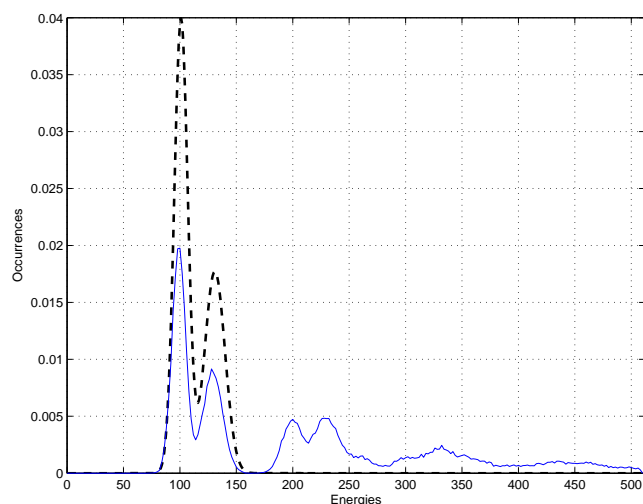
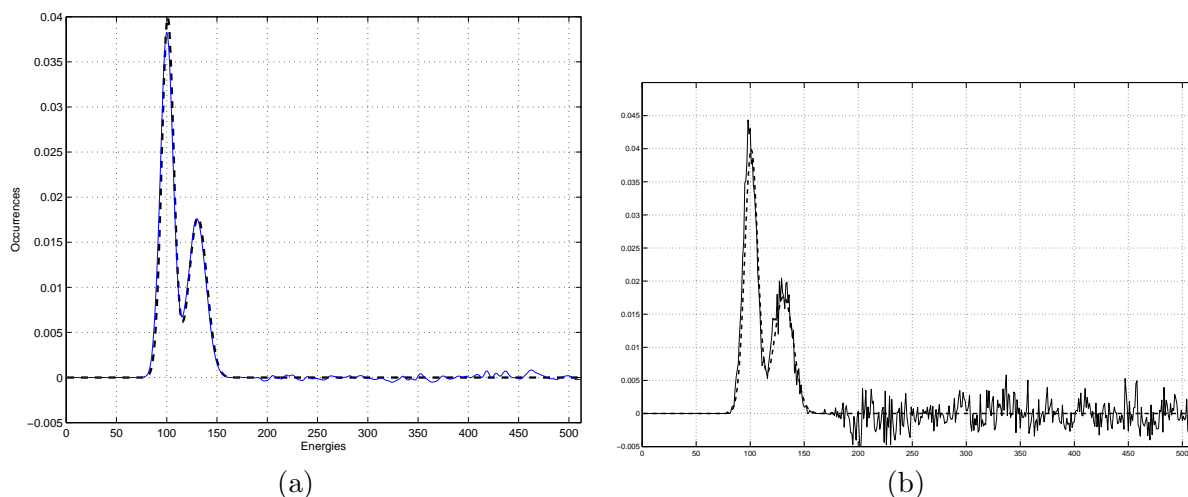
## 4.2 Résultats sur données simulées

Nous détaillons dans cette partie les résultats obtenus lors des simulations précédemment décrites. Dans toutes nos figures, les abscisses sont non significatives (elles ne sont pas associées à des énergies d'éléments radioactifs), mais sont symboliquement associées aux énergies. Les ordonnées représentent les occurrences normalisées associées à chaque énergie.

### 4.2.1 Résultats sur l'estimateur naïf

Nous donnons ici les résultats sur l'estimateur « naïf ». Nous comparons ses performances par rapport à celles de l'algorithme développé pour le modèle discret dans un premier temps, à celles de l'algorithme détaillé en 4.1 sur une autre densité dans un deuxième temps.

Nous considérons le cas  $N = 100000$  et  $\lambda = 0.04$ . La Figure 4.3 représente la densité idéale **(D2)** que l'on cherche à reconstruire (en pointillés) et un histogramme estimant la loi des  $Y'$  (en trait plein). On peut remarquer dans ce cas que certains empilements ont à peu près la même amplitude que certains pics réels, ce qui élimine *a priori* toute tentative de reconstruire efficacement la densité par un filtrage de type passe-bas. Nous comparons dans la Figure 4.4 les résultats obtenus par l'algorithme **(A1)** et l'algorithme **(A2)**. La densité **(D2)** est là encore représentée en pointillés, les densités estimées sont représentées en trait plein. Nous pouvons observer des fluctuations numériques dues à la discrétisation introduite par la différentiation numérique. Même si ces perturbations s'avèrent peu gênantes dans le cas de la densité **(D2)**, nous allons par la suite étudier des densités de probabilité comportant des pics, et les fluctuations numériques introduites par le mauvais conditionnement de l'estimateur naïf nuisent considérablement à l'identification des raies des spectres en énergie. Ce défaut apparaît de manière plus flagrante lorsque l'on compare les performances des deux algorithmes **(A1)** et **(A3)** sur cette densité. La Figure 4.5 permet de comparer les résultats sur la densité **(D3)**. Nous pouvons constater d'une part que l'estimateur utilisé pour le modèle discret et l'algorithme **(A3)** possèdent de bonnes propriétés numériques, tandis que l'algorithme **(A1)** reconstruit beaucoup moins bien la densité de départ (le pic triple à  $y = 300$  est mal corrigé et le pic double à  $y = 200$  apparaît encore).

FIG. 4.3 – Exemple de densité  $f$  bimodale (pointillés) et loi des empilements associés (trait plein).FIG. 4.4 – Comportement des estimateurs. (a) obtenu par **(A2)**. — (b) obtenu par **(A1)**.

Ces résultats montrent que l'algorithme **(A1)** semble peu robuste du fait de la différentiation numérique. En effet, cet opérateur introduit de fait un échantillonnage des données, d'où les faibles performances d'un estimateur basé sur un modèle à temps continu. Par la suite, nous n'étudierons plus l'algorithme **(A1)**. En revanche nous chercherons à tester l'algorithme **(A3)** sur des données réelles.

#### 4.2.2 Influence des paramètres

Nous nous intéressons à présent à l'estimateur  $\hat{m}_{T,h,n}$  et à l'algorithme associé **(A2)**, et tout particulièrement à l'influence des paramètres  $c$  et  $T$  et du nombre d'observations  $N$ . Nous avons étudié ces aspects sur les densités **(D1)** et **(D2)**. Comme les figures obtenues sont sensiblement similaires, nous présentons les résultats sur forme de figures pour la densité **(D1)** et de tableau donnant l'ISE approchée dans le cas de la densité **(D2)**. Dans un premier temps, en fixant  $\lambda = 0.04$ ,  $c = 0.01$  et  $T = 80$ , nous avons étudié l'influence du nombre d'observations  $N$  sur les courbes ainsi obtenues, afin de montrer en pratique la consistance de l'estimateur  $\hat{m}_{T,h,n}$ . La Figure 4.6 montre les résultats de l'algorithme **(A2)** dans le cas de  $f = \text{(D1)}$ . Nous pouvons ainsi voir numériquement la consistance de l'estimateur étudié. Dans le cas de la densité **(D2)**, le Tableau 4.1 montre une décroissance de l'ISE

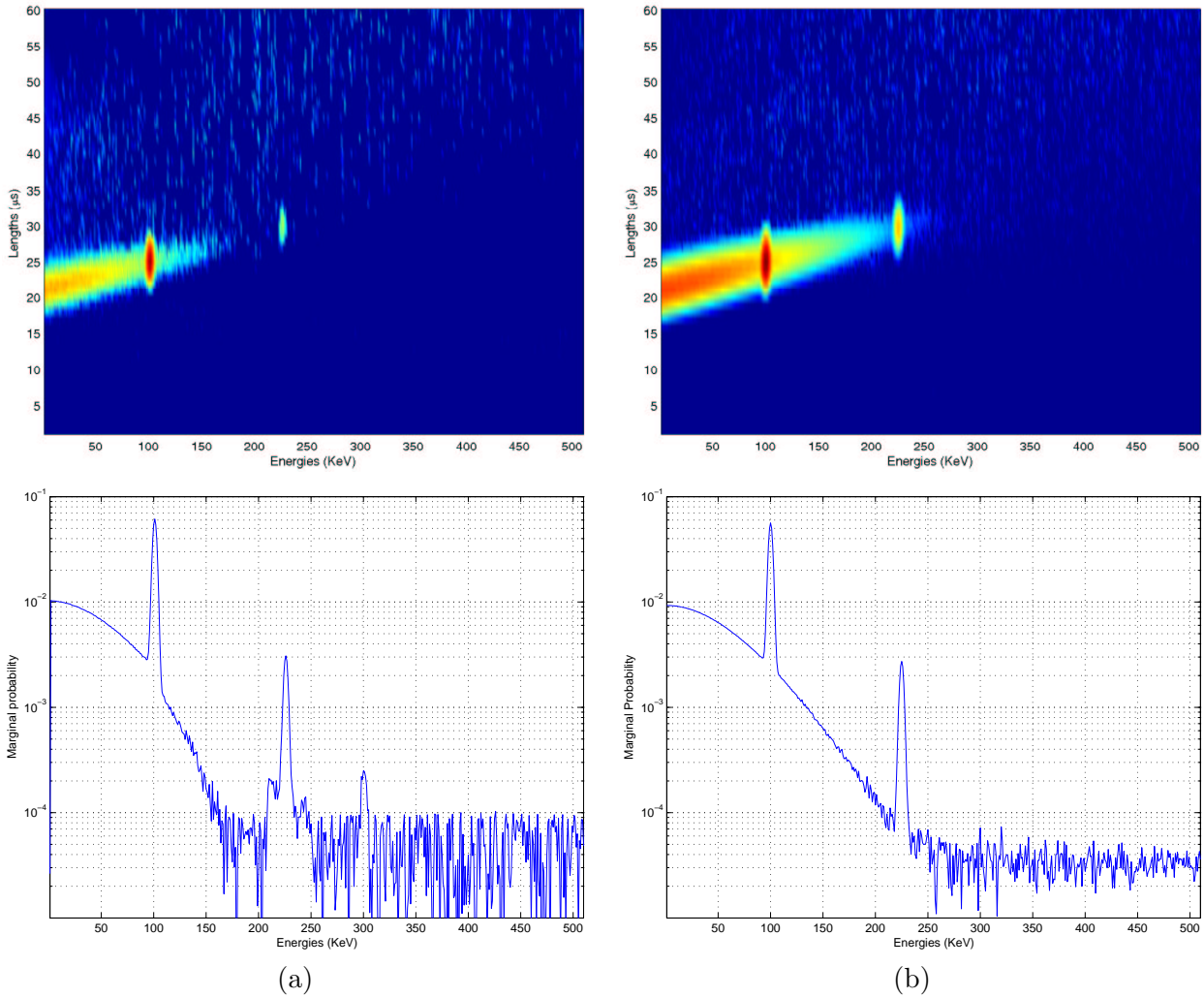


FIG. 4.5 – Comparaison entre les estimateurs obtenus par **(A1)** et **(A3)**. (a) - Estimateur pour le modèle continu. (b) — Estimateur pour le modèle discret.

approchée, ce qui valide également la consistance prouvée au chapitre précédent.

Nous avons également étudié numériquement l'influence du paramètre  $c$ , l'abscisse de convergence utilisée pour l'inversion numérique de la transformée de Laplace. On s'attend à ce que ce choix soit peu important, car d'après [Doetsch, 1974] la valeur de l'intégrale de Bromwich est indépendante du contour d'intégration choisi. Les seuls problèmes liés à  $c$  sont donc d'ordre purement numérique. La Figure 4.7 montre les résultats sur la densité **(D1)**, et le Tableau 4.2 les résultats numériques obtenus pour la densité **(D2)**. Dans les deux cas, les autres paramètres ont été fixés à  $\lambda = 0.04$ ,  $N = 10^4$  et  $T = 80$ . On peut ainsi constater que le choix du paramètre  $c$  influe peu sur le résultat final, mis à part s'il est choisi trop « loin » de 0. Typiquement, un choix automatique de  $c$  donnant de bons résultats pourrait donc être du type :

$$c = \min \left\{ (4\hat{\lambda}_n)^{-1}, (2T)^{-1} \right\}. \quad (4.1)$$

Enfin, on constate sur la Figure 4.8 et le Tableau 4.3 que le choix de  $T$  est quant à lui plus crucial : s'il apparaît évident que choisir  $T$  trop court introduit un biais dans l'estimation de  $m$ , un choix trop grand de ce paramètre tend à faire augmenter la variance associée. Nous proposons de choisir de  $T$  tel

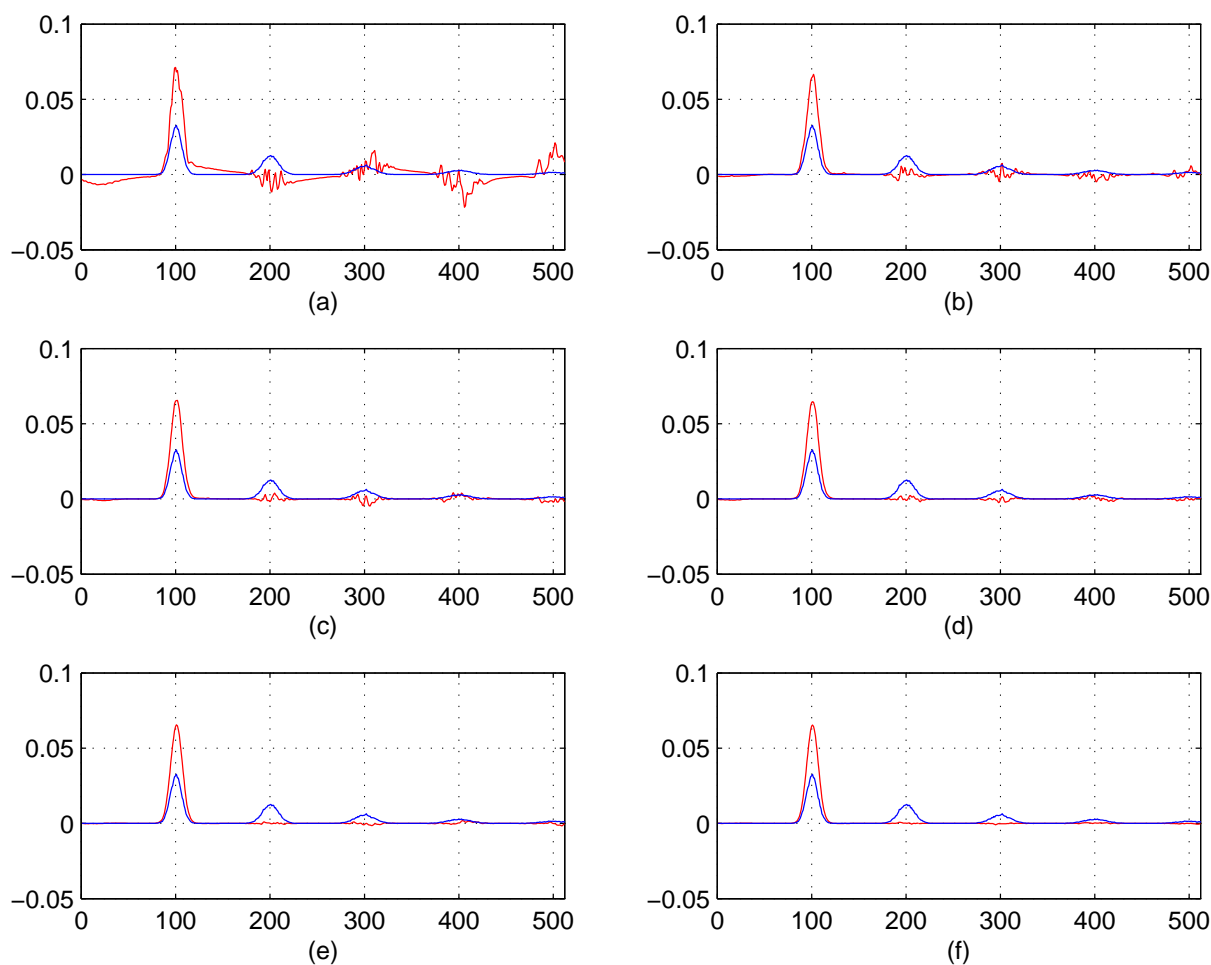


FIG. 4.6 – Estimation de  $(\mathbf{D1})$  pour plusieurs valeurs de  $N$  — (a)  $N = 1000$ . (b)  $N = 5000$ . (c)  $N = 10000$ . (d)  $N = 20000$ . (e)  $N = 100000$ . (f)  $N = 500000$ .

que :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X'_k \leq T < \min \left\{ \frac{m}{N} \sum_{k=1}^N X'_k, \max_{1 \leq k \leq N} X'_k \right\}, \quad m > 1 \quad (4.2)$$

ce qui permet de corriger une partie des empilements tout en garantissant le choix d'un  $T$  suffisamment petit dans les applications pratiques. Finalement, on peut remarquer que la plupart des méthodes développées pour un choix automatique du paramètre de lissage  $h$  (telles que la validation croisée ou les méthodes « plug-in ») ne s'appliquent pas, car les observations dont nous disposons ne sont pas celles de la densité que l'on cherche à estimer. Toutefois, nous pouvons faire deux remarques :

1. D'un point de vue physique, le spectre désempilé doit avoir une résolution du même ordre que celle du spectre empilé afin d'être exploitable,
2. d'un point de vue mathématique, il est aisé de voir que la densité associée aux observations  $Y'$  est moins régulière que  $m$ .

Ces deux remarques permettent de choisir  $h$  de la manière suivante : utiliser une méthode de sélection automatique de  $h$  sur les observations  $\{(X'_k, Y'_k)\}_{1 \leq k \leq N}$  (un inventaire assez exhaustif de telles méthodes peut être trouvé dans [Devroye and Berlinet, 1994]), et utiliser la valeur ainsi déterminée pour  $h$ . Bien que nous ne disposions pas de résultats théoriques concernant l'optimalité de cette heuristique, cette méthode donne de bons résultats sur des simulations et peut être rapprochée des résultats de [Hall and Park, 2004].

| $N$   | ISE                   |
|-------|-----------------------|
| 1000  | $4.760 \cdot 10^{-3}$ |
| 5000  | $1.089 \cdot 10^{-3}$ |
| 10000 | $3.852 \cdot 10^{-4}$ |
| 20000 | $2.042 \cdot 10^{-4}$ |

TAB. 4.1 – ISE approchée dans le cas de la densité **(D2)** pour plusieurs valeurs de  $N$ .

| $c$     | ISE                   |
|---------|-----------------------|
| 1       | $2.232 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.1     | $3.852 \cdot 10^{-4}$ |
| 0.01    | $4.002 \cdot 10^{-4}$ |
| 0.001   | $4.348 \cdot 10^{-4}$ |
| 0.0001  | $3.852 \cdot 10^{-4}$ |
| 0.00001 | $4.426 \cdot 10^{-4}$ |

TAB. 4.2 – ISE approchée dans le cas de la densité **(D2)** pour plusieurs valeurs de  $c$ .

Nous présentons à présent des résultats sur la densité **(D4)**, qui est obtenue à partir de données expérimentales de la manière décrite ci-après. Dans toute la suite, nous choisirons  $T$ ,  $h$  et  $c$  en fonction de ces heuristiques.

### 4.2.3 Résultats sur la densité **(D4)**

Le Césium 137 est un élément radioactif dont le spectre en énergie idéale présente la particularité de ne présenter qu'une raie fondamentale à  $662 \text{ keV}$ . Nous avons donc obtenu la densité **(D4)** en utilisant un spectre en énergie obtenu à partir d'une source de Césium 137 à faible taux de comptage. Ce spectre a ensuite été tronqué au-delà de  $662 \text{ keV}$ , et complété par une queue de la forme

$$g(y) \propto \exp\left(e^{-\alpha x^2}\right) - 1,$$

afin de simuler une décroissance rapide de la partie continue du spectre en énergie dûe à l'absence de diffusion Compton après le pic principal, l'ensemble est ensuite normalisé afin d'obtenir une densité de probabilité. Les énergies sont tirées par la suite à l'aide de l'algorithme d'acceptation-rejet (décrit par exemple dans [Robert and Casella, 2004]), les durées associées sont tirées suivant une loi Gamma tronquée. La Figure 4.9 présente sur le même graphique la densité **(D4)** ainsi construite et le spectre obtenu avec empilements. Nous pouvons constater que la partie continue de la densité initiale s'empile avec elle-même, et donc nous nous attendons à vérifier par l'algorithme **(A2)** à la fois la correction des pics et la correction du Compton.

La Figure 4.10 montre le résultat de l'algorithme **(A2)** sur la densité **(D4)**. La Figure 4.11 montre le résultat de l'algorithme **(A3)** sur la densité **(D4)**. Comme on peut le constater, les performances de ces deux algorithmes sur cette densité sont bonnes, car le fond Compton empilé et le pic double du Césium 137 ont été supprimés. Ceci valide notre approche et le choix des algorithmes **(A2)** et **(A3)**.

**Remarque 8.** Une remarque s'impose à ce stade : on peut remarquer que le continuum Compton ne correspondant pas à des empilements n'a pas été supprimé. En effet, au vu de l'approche non-paramétrique que nous avons choisie le continuum Compton fait également partie de la densité à estimer et à corriger. Ce fond pourra par conséquent être gênant quant à l'identification de radio-nucléides, car il est susceptible de cacher des pics énergétiques. Cette contrainte est inhérente à l'approche choisie, à savoir estimer  $m$  sans aucun a priori sur cette densité, et doit être prise en compte dans l'interprétation de nos résultats.

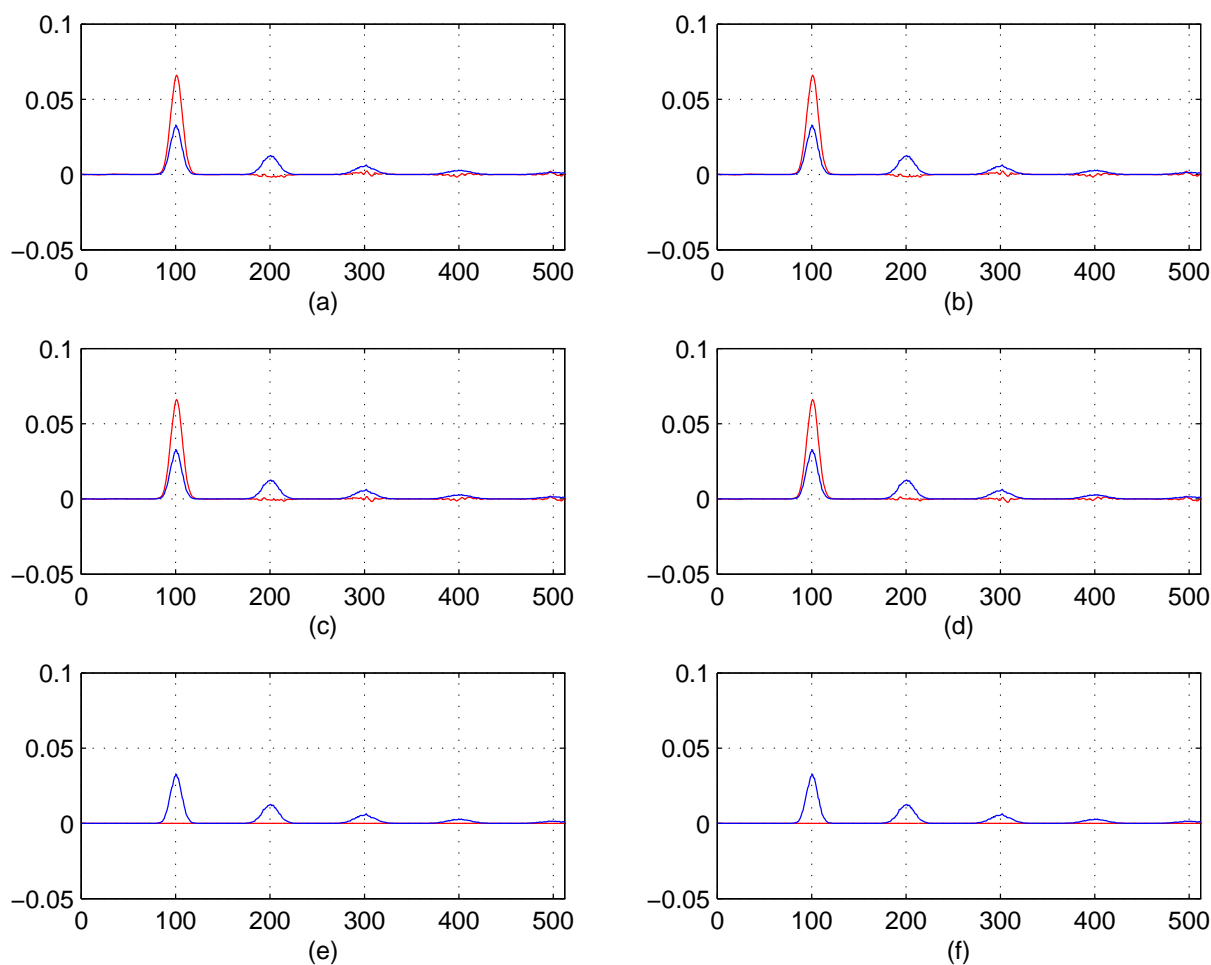


FIG. 4.7 – Estimation de  $(\mathbf{D1})$  pour plusieurs valeurs de  $c$  — (a)  $c = 10^{-4}$ . (b)  $c = 10^{-3}$ . (c)  $c = 10^{-2}$ . (d)  $c = 10^{-1}$ . (e)  $c = 1$ . (f)  $c = 10$ .

Au terme de cette partie, nous avons validé nos estimateurs et algorithmes sur un ensemble de densités de probabilité. Nous cherchons à présent à valider nos estimateurs sur des données réelles. Comme nos algorithmes prennent en entrée des couples  $(X', Y')$ , ce qui n'est fourni par aucun système de spectrométrie standard, nous devons utiliser le système ADONIS développé par le CEA Saclay. Le paragraphe suivant décrit les fondements théoriques de ce système.

### 4.3 Description du système ADONIS

L'un des principaux problèmes en pratique réside dans l'obtention des couples  $(X', Y')$ , car les systèmes d'instrumentation développés pour la spectrométrie  $\gamma$  ne mesurent pas l'information de durée des séquences *busy*. Le système ADONIS développé par le Laboratoire d'Électronique et de Traitement du Signal du CEA Saclay permet l'obtention pratique de ces couples. Nous présentons brièvement dans cette partie les fondements théoriques de ce système.

#### 4.3.1 Limites du filtrage adapté

La dérivation classique du filtre adapté repose sur la détermination d'un filtre linéaire capable de rendre la mesure de paramètres du signal (notamment l'amplitude, mais aussi le temps d'arrivée, etc...) la plus précise possible. Ces paramètres déterminent la qualité de la distribution en énergie.

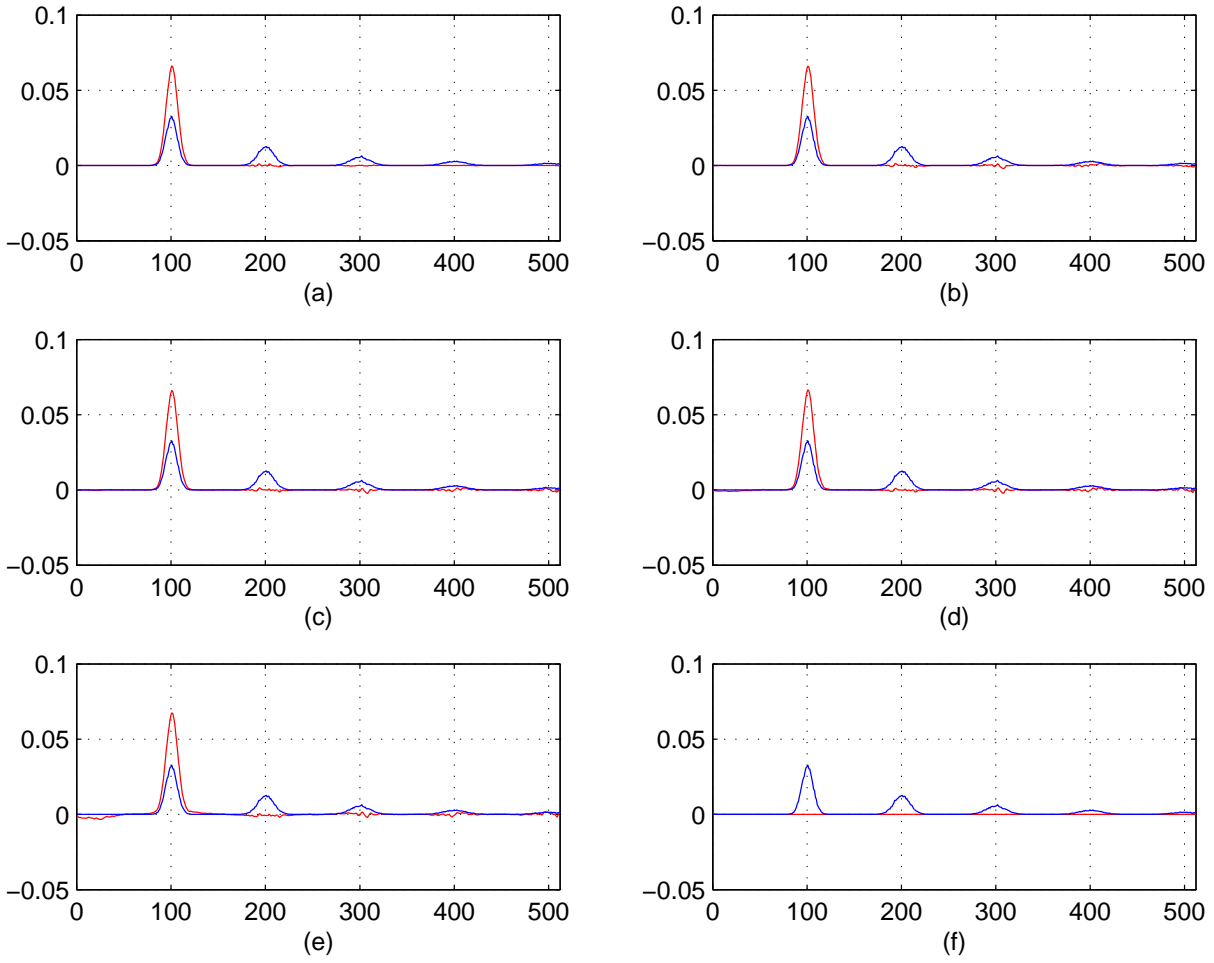


FIG. 4.8 – Estimation de  $(\mathbf{D1})$  pour plusieurs valeurs de  $T$  — (a)  $T = 20$ . (b)  $T = 40$ . (c)  $T = 60$ . (d)  $T = 80$ . (e)  $T = 100$ . (f)  $T = \max_{k \leq N} X'_k$ .

Cette approche a été fréquemment utilisée en spectrométrie  $\gamma$ , par exemple dans [Westphal *et al.*, 2001]. Ainsi, un « indice de performancen » quant à la capacité d'un filtre linéaire à extraire un signal de forme connue est le *rapport signal sur bruit* noté  $SNR$  en sortie du filtre à l'instant de mesure choisi. Si le signal photonique  $S_t$  est présent en entrée du système de détection nous observons

$$y_t = S_t + n_t ,$$

où  $n_t$  est le bruit d'observation gaussien de densité spectrale de puissance  $\mathcal{N}_\omega$ . Si le signal photonique est absent, on n'observe que  $y_t = n_t$ . Dans un premier temps nous supposons que  $S_t$  est entièrement connu. Si l'impulsion photonique est présente, on écrit la sortie du filtre linéaire (de réponse  $\kappa_t$ )

$$\int_0^t y_u \kappa_{t-u} du = \int_0^t S_u \kappa_{t-u} du + \int_0^t n_u \kappa_{t-u} du .$$

Soit  $\mathcal{S}_\omega$  (respectivement  $\mathcal{K}_\omega$ ) la transformée de Fourier du signal  $S_t$  (respectivement de  $\kappa_t$ ), on a alors par définition :

$$\int_0^t S_u \kappa_{t-u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \mathcal{K}_\omega \mathcal{S}_\omega d\omega .$$

En utilisant le théorème de Wiener-Khinchin, nous pouvons écrire :

$$\mathbb{E}(\nu_t^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{K}_\omega|^2 \mathcal{N}_\omega d\omega .$$

| $T$                    | ISE                   |
|------------------------|-----------------------|
| 20                     | $5.417 \cdot 10^{-3}$ |
| 40                     | $1.905 \cdot 10^{-4}$ |
| 60                     | $3.836 \cdot 10^{-4}$ |
| 80                     | $5.100 \cdot 10^{-4}$ |
| 100                    | $2.229 \cdot 10^{-2}$ |
| $\max_{i \leq n} X'_i$ | $2.231 \cdot 10^{-2}$ |

TAB. 4.3 – ISE approchée dans le cas de la densité **(D2)** pour plusieurs valeurs de  $T$ .

Nous définissons maintenant le rapport signal sur bruit  $SNR$  à la sortie du système linéaire

$$\forall T \in \mathbb{R}^{+*}, \quad SNR \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu_T^2}{\mathbb{E}(\nu_t^2)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega T} \mathcal{K}_\omega S_\omega d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{K}_\omega|^2 \mathcal{N}_\omega d\omega}.$$

Comme notre objectif est d'utiliser la sortie du filtre pour décider de l'absence ou la présence d'une impulsion et éventuellement estimer son énergie, le choix du filtre adapté se porte alors sur la fonction  $\kappa_t$  qui maximise  $SNR$  pour un temps de mesure  $T_m$  fixé. Son obtention découle directement de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega T_m} \mathcal{K}_\omega S_\omega d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{K}_\omega|^2 \mathcal{N}_\omega d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_\omega|^2}{\mathcal{N}_\omega} d\omega;$$

par conséquent :

$$\forall T_m \in \mathbb{R}_+^*, \quad SNR \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_\omega|^2}{\mathcal{N}_\omega} d\omega,$$

et la borne est atteinte pour :

$$\mathcal{K}_\omega = G e^{-i\omega T_m} \frac{S_\omega^*}{\mathcal{N}_\omega}.$$

où  $G$  est une constante réelle arbitraire que nous choisirons positive. La sortie du filtre atteint alors la valeur maximale de  $SNR$

$$SNR_{max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_\omega|^2}{\mathcal{N}_\omega} d\omega.$$

On en déduit la sortie non bruitée du filtre :

$$\mu_t = G \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-T_m)} \frac{|S_\omega|^2}{\mathcal{N}_\omega} d\omega. \quad (4.3)$$

La relation (4.3) permet de vérifier que ce choix de  $\kappa_t$  maximise bien le  $SNR$  au temps  $T_m$ .

$$\forall t > 0, \quad |\mu_t| \leq |\mu_{T_m}| = G \times SNR.$$

En conclusion à ce paragraphe, nous résumons la procédure de détection. On procède au filtrage par le « blanchisseur » de la réponse du signal attendu. La réponse ainsi obtenue est « retournée » autour du point  $T_m$  : nous obtenons le filtre adapté. Puis on filtre l'observation blanchie par ce dernier<sup>2</sup>. La sortie du filtre est alors comparée à un seuil afin de procéder à la décision. Malheureusement, cette méthode présente rapidement des limites. Ainsi, le signal  $S_t$  était supposé entièrement connu, ce qui n'est pas le cas en pratique. Il est par exemple impossible de modéliser l'énergie associée à un photon et son instant d'arrivée dans le détecteur. Ainsi, toute impulsion photonique présente des paramètres inconnus qui placent le problème de la spectrométrie en dehors du cadre strict de la détection optimale

<sup>2</sup>On pourra se référer à [Barat and Dautremer, 2002a] et [Haykin, 1995] pour plus de détails.

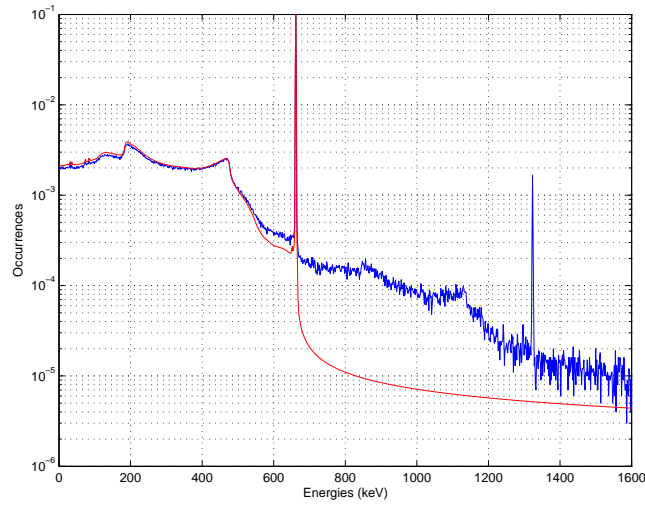


FIG. 4.9 – Densité ( $D4$ ) (en rouge) et loi des  $(X', Y')$  (en bleu).

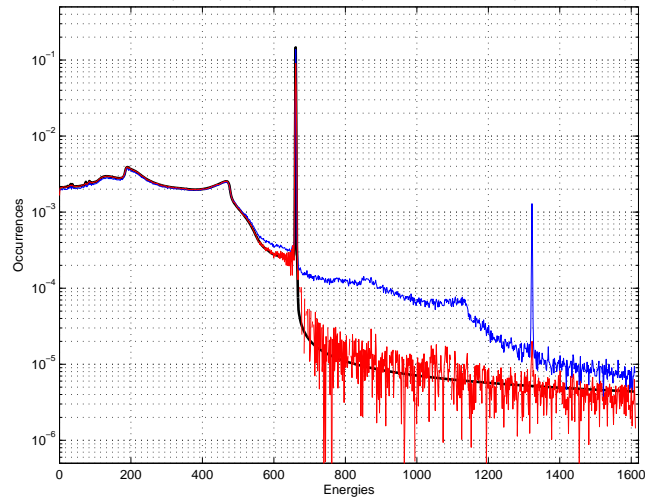


FIG. 4.10 – Loi des  $Y$  (en noir), loi des  $Y'$  (en bleu), estimateur  $\hat{m}_{T,h,N}$  (en rouge).

par filtre adapté. Certes, la pratique nous indique que *l'approximation* consistant à utiliser un filtre indépendant des paramètres inconnus fonctionne dans la plupart des situations où le rapport signal à bruit est suffisamment fort. Cependant, le cadre théorique de la détection optimale a été perdu de par la méconnaissance du temps d'arrivée d'une impulsion. Il est par conséquent nécessaire de modéliser le signal temporel de sorte que le caractère stochastique du temps d'arrivée des photons soit mieux représenté.

### 4.3.2 Description du systèmes ADONIS

Nous présentons ici brièvement les fondements théoriques du système de détection ADONIS développé par le CEA Saclay. On pourra se référer à [Barat and Dautremer, 2002a] pour une étude théorique complète, et à [Barat and Dautremer, 2002b] pour l'implémentation pour un traitement temps réel des méthodes décrites dans ce paragraphe.

#### Modélisation à sauts markoviens

Le signal physique est décrit sous forme d'une représentation d'états à temps discrets. Soient  $\{r_k\}_{k \geq 0}$  les points d'une chaîne de Markov à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , avec  $r_k = 0$  si aucun photon n'interagit

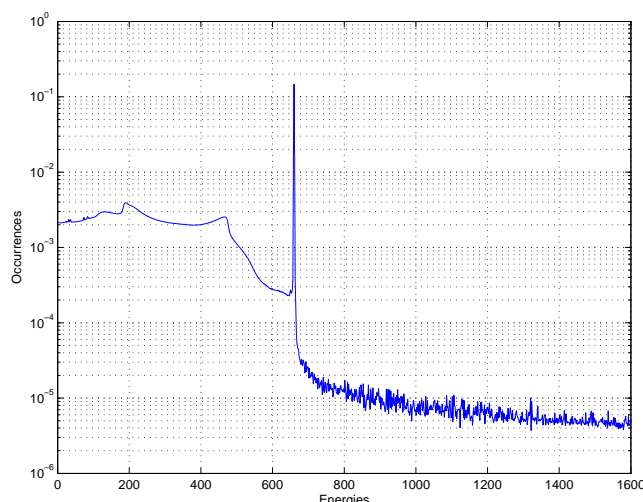


FIG. 4.11 – Résultat de l'algorithme (A3) sur la densité (D4).

avec le détecteur (état de *non-détection*) et  $r_k = 1$  s'il y a interaction (état de *détection*)<sup>3</sup>. Le système est modélisé par :

$$\begin{cases} E_{k+1} = F(r_{k+1})E_k + B(r_{k+1})V_{k+1} \\ s_k = H(r_k)E_k + D(r_k)W_k \end{cases},$$

où à l'instant  $k$ ,  $E_k$  désigne l'état du système,  $s_k$  le signal bruité observé,  $V_k$  et  $W_k$  des bruits blancs gaussien additifs mutuellement indépendants et indépendants de  $E_k$ ,  $F$  la matrice d'état,  $B$  la matrice de bruit dynamique et  $D$  la matrice de bruit d'observation. Des *a priori* sur l'énergie peuvent être faits dans le cas des détecteurs HPGe qui présentent un fort rapport signal à bruit<sup>4</sup>, notamment :

1. Le bruit de dynamique lié au développement temporel du signal est nul si  $r_k = 0$  et possède une grande variance (notée  $Q_{\mathcal{E}}$ ) si  $r_k = 1$ . Ainsi, on peut supposer que l'état  $r_k$  ne porte que sur  $B$ .
2. On peut montrer dans [Barat and Dautremer, 2002a] que le bruit d'entrée peut être modélisé par la somme d'un bruit brownien discret et d'un bruit  $MA(1)$ , à savoir :

$$w_k = m_k - \alpha m_{k-1} \text{ et } b_k = b_{k-1} + n_k,$$

où  $m_k$  et  $n_k$  sont des variables indépendantes et identiquement distribuées et gaussiennes de variance  $Q_w$  et  $Q_b$ ; il est plus aisé de l'intégrer à  $E_k$  au lieu de les utiliser dans l'équation d'observation.

Le système d'état à sauts markoviens peut dès lors se simplifier ainsi :

$$\begin{cases} E_{k+1} = F E_k + B(r_{k+1})V_{k+1} \\ s_k = H E_k \end{cases}, \quad (4.4)$$

avec

$$E_k = \begin{bmatrix} x_k \\ b_k \\ w_{k-1} \\ w_k \end{bmatrix},$$

<sup>3</sup>Dans le cas de SNR plus faibles, une alternative proposée dans [Eglin *et al.*, 2005] consiste à considérer une chaîne  $r_k$  à plus de deux états, chaque état correspondant à un « niveau » d'énergie.

<sup>4</sup>On pourra se référer à [Barat and Dautremer, 2002a] pour plus de détails.

avec  $x_k$  le signal impulsionnel sur lequel aucun *a priori* n'est fait. Les matrices  $F$ ,  $B$  et  $H$  sont définies de la manière suivante :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 ]$$

$$B(r_k) = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\{r_k=1\}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix},$$

et le bruit dynamique est modélisé par  $V_k \sim N(0, Q)$ , avec

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{\mathcal{E}} & 0 & 0 \\ 0 & Q_b & 0 \\ 0 & 0 & Q_w \end{bmatrix}.$$

Ce modèle est à la base des techniques de codage des algorithmes développés dans [Barat and Dautremer, 2002b].

### Algorithme de détection pour la spectrométrie $\gamma$

À partir de ce modèle, il est possible d'estimer à toute date  $k$  l'état de la chaîne  $\{r_k\}_{k \geq 0}$  à partir des observations  $\{s_k\}_{k \geq 0}$ . De cette façon, il est possible de déterminer si l'on se trouve dans une séquence *idle* ou dans une séquence *busy*. De là, les observations des variables aléatoires  $X'$  et  $Y'$  peuvent être estimées<sup>5</sup>. Dans ce paragraphe nous supposons que nous disposons de  $N$  observations discrètes  $\{s_k, k = 1 \dots N\}$ . Dans toute la suite, nous noterons lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté pour toute suite  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  éventuellement vectorielle :  $\mathbf{u}_1^{\mathbf{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \{u_1, \dots, u_N\}$ . Nous cherchons donc à estimer  $\mathbf{r}_1^{\mathbf{N}}$ .

Supposons dans un premier temps l'état du système  $\mathbf{E}_1^{\mathbf{N}}$  parfaitement connu. Il est alors possible de compléter les observations pour utiliser l'algorithme EM décrit dans [Dempster *et al.*, 1977] et que nous détaillons dans la Table 4.4. On note  $\mathbf{z}_1^{\mathbf{N}}$  les observations complétées :

$$\forall k = 1 \dots N, \quad z_k = (E_k, s_k),$$

et nous cherchons à estimer  $\mathbf{r}_1^{\mathbf{N}}$  au sens du Maximum A Posteriori (MAP), c'est-à-dire si l'on note  $\phi$  la fonction de vraisemblance :

$$\hat{\mathbf{r}} = \arg \max_{\mathbf{r}_1^{\mathbf{N}}} \phi(\mathbf{r}_1^{\mathbf{N}} | \mathbf{s}_1^{\mathbf{N}}).$$

L'algorithme EM permet alors de déterminer une estimation MAP  $\hat{\mathbf{r}}$ . À partir d'une séquence initiale  $\hat{\mathbf{r}}_0$ , l'algorithme génère une série d'estimées  $\{\hat{\mathbf{r}}_n\}_{n \geq 0}$ . Chaque itération est constituée de deux étapes décrites dans le Tableau 4.4 à la  $(n+1)^{\text{ème}}$  itération.

On montre dans [Dempster *et al.*, 1977] qu'une propriété fondamentale de l'algorithme EM est la croissance monotone de la vraisemblance conditionnelle :

$$\phi(\hat{\mathbf{r}}_{1+1} | \mathbf{s}_1^{\mathbf{N}}) \geq \phi(\hat{\mathbf{r}}_1 | \mathbf{s}_1^{\mathbf{N}}).$$

La suite  $\{\hat{\mathbf{r}}_n\}_{n \geq 0}$  converge par conséquence vers un point critique stationnaire, l'estimateur  $\hat{\mathbf{r}}$  est donc obtenu par itérations successives des étapes (4.5) et (4.6) et comparaison avec une tolérance  $\epsilon$ . Dans

<sup>5</sup>En réalité, l'obtention des valeurs de  $X'$  et  $Y'$  n'est pas aussi immédiate, car il y a d'autres effets inhérents à la chaîne d'instrumentation qu'il faut prendre en compte. Citons, pour mémoire, les phénomènes de *reset* (remise à zéro du préamplificateur, ce qui distord le signal temporel), d'*overshoot* (saturation de l'amplificateur) et d'*undershoot* (passage sous la ligne de base après un reset). Les algorithmes détaillés dans [Barat and Dautremer, 2002b] permettent toutefois de traiter efficacement ces problèmes.

**Étape E** : évaluation de la log-vraisemblance conditionnelle des données *complètes*

$$\mathcal{Q}(\mathbf{r}_1^N, \hat{\mathbf{r}}_n) = \mathbb{E} \{ \ln \phi(\mathbf{r}_1^N, \mathbf{z}_1^N | \mathbf{s}_1^N, \hat{\mathbf{r}}_n) \}, \quad (4.5)$$

où  $\hat{\mathbf{r}}_n$  est l'estimation de la séquence des états à l'itération  $l$ .

**Étape M** : Calcul de  $\hat{\mathbf{r}}_{n+1}$ .

$$\hat{\mathbf{r}}_{n+1} = \arg \max_{\hat{\mathbf{r}}} \mathcal{Q}(\mathbf{r}_1^N, \hat{\mathbf{r}}_n) \quad (4.6)$$

TAB. 4.4 – Une itération de l'algorithme EM

notre cas, l'étape E de l'algorithme est implémentée par un lisseur de Kalman, l'étape M par un algorithme de Viterbi.

En pratique toutefois, l'état du système  $E_k$  n'est pas accessible, il est par conséquent nécessaire d'estimer conjointement  $\mathbf{E}_1^N$  et  $\mathbf{r}_1^N$ . Pour ce faire, une méthode introduite par Logothetis et Krishnamurthy dans [Logothetis and Krishnamurthy, 1999] est reprise dans [Barat and Dautremer, 2002a]. Cette méthode est un algorithme itératif de même type que l'algorithme EM, mais si l'on note cette fois  $\phi$  la vraisemblance des données complètes  $z_n \stackrel{\text{def}}{=} (s_n, r_n, E_n)$ , on montre dans [Logothetis and Krishnamurthy, 1999] que :

$$\phi(\mathbf{s}_1^N, \hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{r}}_1) \leq \phi(\mathbf{s}_1^N, \hat{\mathbf{E}}_{l+1}, \hat{\mathbf{r}}_1) \leq \phi(\mathbf{s}_1^N, \hat{\mathbf{E}}_{l+1}, \hat{\mathbf{r}}_{l+1})$$

L'algorithme est décrit au Tableau 4.5. En pratique l'étape 1 est implémentée en utilisant un lisseur de

**Initialisation** : On détermine  $\hat{\mathbf{r}}_0$  et  $\hat{\mathbf{E}}_0$ . Cette étape, cruciale, est détaillée dans la suite. On se donne également une tolérance  $\epsilon$ .

**Étape 1** : Conditionnellement à  $\mathbf{s}_1^N$  et en utilisant  $\hat{\mathbf{r}}_n$  de l'itération précédente, on obtient  $\hat{\mathbf{E}}_n$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_{n+1} &= \arg \max_{\mathbf{E}_1^N} \phi(\hat{\mathbf{E}}_n, \hat{\mathbf{r}}_n | \mathbf{s}_1^N) \\ &= \arg \max_{\mathbf{E}_1^N} \phi(\hat{\mathbf{E}}_n, \hat{\mathbf{r}}_n, \mathbf{s}_1^N) \end{aligned}$$

**Étape 2** : Conditionnellement à  $\mathbf{s}_1^N$  et en utilisant  $\hat{\mathbf{E}}_{n+1}$ , on calcule  $\hat{\mathbf{r}}_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_{n+1} &= \arg \max_{\mathbf{r}_1^N} \phi(\hat{\mathbf{r}}_n, \hat{\mathbf{E}}_{n+1} | \mathbf{s}_1^N) \\ &= \arg \max_{\mathbf{r}_1^N} \phi(\hat{\mathbf{r}}_n, \hat{\mathbf{E}}_{n+1}, \mathbf{s}_1^N) \end{aligned}$$

**Itération** : On itère les étapes 1 et 2 jusqu'au rang  $n$  tel que :

$$\left\| (\hat{\mathbf{E}}_n, \hat{\mathbf{r}}_n) - (\hat{\mathbf{E}}_{n-1}, \hat{\mathbf{r}}_{n-1}) \right\| < \epsilon,$$

où  $\|\mathbf{x}\|$  est la norme 2 de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$ .

TAB. 4.5 – Estimation MAP des séquences jointes  $(\mathbf{r}_1^N, \mathbf{E}_1^N)$ .

Kalman, et l'étape 2 en utilisant l'algorithme EM détaillé dans le Tableau 4.4. Les détails de l'implé-

mentation se trouvent dans [Barat and Dautremer, 2002b]. Nous détaillons à présent les simplifications dues au fort SNR des détecteurs HPGe refroidis qui permettent de réduire la complexité algorithmique pour l'implémentation pratique de l'algorithme décrit au Tableau 4.5.

### Simplifications pour de forts rapports signal à bruit

Les algorithmes présentés ci-dessus correspondent à des approches sous-optimales pour la détection du signal photonique. En effet, d'autres méthodes de type Monte-Carlo qui peuvent être envisagées pour l'obtention d'un estimateur MAP ne peuvent être pour l'instant implémentées pour un traitement du signal en temps réel. Cependant, même l'implémentation des méthodes sous-optimales sur ordinateur demeure très difficile si l'on ne peut encore les alléger. Il est par conséquent nécessaire de faire d'autres hypothèses dépendant de la chaîne d'instrumentation. Dans le cas des détecteurs HPGe refroidis, il faut ainsi exploiter le fait que ces détecteurs ont un très bon rapport signal sur bruit.

Dans le cas d'un fort SNR, la matrice paramètre du bruit de dynamique  $B(r_k)$  change de valeur en fonction de l'état discret. Dans une séquence *idle*, nous n'observons que du bruit d'origine électronique. Les composantes de  $B(r_k)$  correspondant à une présence d'énergie incidente sont donc très faibles. Les autres composantes de  $B(r_k)$  n'interviennent que dans la modélisation du bruit coloré. Par contre, dès que l'on se trouve dans une séquence *busy*, le bruit de dynamique sur les composantes d'énergie de l'état présente une puissance bien supérieure à la puissance du bruit gaussien. Par conséquent, on peut considérer dans ce cas que le gain de Kalman ne dépend que du bruit de dynamique. Le gain de Kalman va prendre de très faibles valeurs dans les séquences *idle* et tendre vers 1 dans le cas contraire. En d'autres termes, dans les séquences *busy*, le filtre débruite peu le signal par rapport aux périodes *idle*.

L'expérience montre également que pour de très forts  $S/B$ , il est très peu fréquent que l'algorithme remette en cause la chaîne discrète  $\mathbf{r}$ . Ainsi, dans le cas du HPGe refroidi, l'étape de maximisation par Viterbi peut être remplacée par un test heuristique de validité de l'énergie estimée afin de rejeter d'éventuelles fausses alarmes. Une telle simplification est très avantageuse pour la complexité du calcul. Toutefois, elle ne saurait être généralisée à des systèmes de détection à température ambiante.

Ainsi, ces approximations physiques valables dans le cas de détecteurs HPGe refroidis permettent à la fois d'obtenir des observations précises de  $(X', Y')$ , et ce à l'aide d'algorithmes convergeant rapidement. En nous appuyant toujours sur le système d'états à sauts markoviens et sur les algorithmes itératifs proposés, il reste maintenant à considérer le problème de l'initialisation des algorithmes, cruciale pour toute méthode d'optimisation itérative. En effet, les algorithmes utilisés dans ADONIS ne maximisent que localement la vraisemblance.

### Initialisation de l'algorithme

La méthode retenue dans [Barat and Dautremer, 2002a] est une adaptation de celle décrite dans [Cisowski and Niefszwiecki, 1996] sur le traitement des bruits impulsifs pour la restauration d'enregistrements audios. Elle correspond à l'approximation connue sous le nom de *hard rejecter*. Le principe est basé sur l'utilisation du module de l'innovation d'un filtre de Kalman pour choisir l'état de  $r_k$ . Ainsi, sous l'hypothèse  $r_k = 1$  si le module au carré de l'innovation  $|\epsilon_k|^2$  dépasse d'un facteur choisi à l'avance la puissance de l'erreur d'innovation, on décide que le modèle n'est pas adéquat, et l'on choisit  $r_k = 1$ . Ce filtrage permet d'initialiser  $\hat{\mathbf{r}}_0$ . À partir de cette initialisation,  $\hat{\mathbf{E}}_0$  est initialisé après une itération de l'étape 1 de l'algorithme décrit au Tableau 4.5.

Nous détaillons brièvement le principe du *Hard Rejecter*. Il repose sur l'article de [Masreliez, 1975], qui étudie le système d'état suivant :

$$\begin{cases} E_{k+1} &= F E_k + V_k \\ s_k &= H E_k + W_k \end{cases} ,$$

où  $W_k$  représente un bruit impulsif, modélisé par un mélange :

$$W_k \sim \pi \mathcal{N}(0, \sigma_1) + (1 - \pi) \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2) , \text{ avec } \pi \in [0, 1] \text{ et } \sigma_2 \gg \sigma_1 > 0 . \quad (4.7)$$

Masreliez propose dans [Masreliez, 1975] une modification de l'algorithme de Kalman en introduisant une non-linéarité par l'intermédiaire d'une *fonction de score*. Les termes de filtrage deviennent :

$$\begin{aligned} E_{k|k} &= E_{k|k-1} + P_{k|k-1} H^T g_k (s_k - H E_{k|k-1}) \\ P_{k|k} &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H^T G_k (s_k - H E_{k|k-1}) H P_{k|k-1}, \end{aligned}$$

où les fonctions  $g_k$  et  $G_k$  sont définies dans le cas du *Hard Rejecter* tel qu'il est introduit dans [Martin and Thomson, 1982] par :

$$\begin{aligned} g_k (s_k - H E_{k|k-1}) &= \begin{cases} k & \text{si } |s_k - H E_{k|k-1}| < \eta \sqrt{P_{k|k-1}(1,1)}, \\ 0 & \text{si } |s_k - H E_{k|k-1}| \geq \eta \sqrt{P_{k|k-1}(1,1)}. \end{cases} \\ G_k (s_k - H E_{k|k-1}) &= \begin{cases} 1 & \text{si } |s_k - H E_{k|k-1}| < \eta \sqrt{P_{k|k-1}(1,1)}, \\ 0 & \text{si } |s_k - H E_{k|k-1}| \geq \eta \sqrt{P_{k|k-1}(1,1)}. \end{cases} \end{aligned}$$

où,  $P_{k|k-1}(1,1)$  est la puissance de l'erreur de prédiction sur la première composante de  $E_k$  *i.e.*  $x_k$  qui correspond au signal en absence de bruit. La grandeur  $\eta$  correspond à un seuil au-delà duquel on suppose que le bruit est impulsionnel. Typiquement, on peut prendre  $\eta \approx 3$ . Le *Hard Rejecter* peut ainsi être vu comme un filtre de Kalman classique tant que la puissance instantanée empirique de l'innovation demeure acceptable par rapport à la puissance de l'erreur de prédiction du filtre de Kalman. Dans le cas où le module carré de l'innovation dépasse trop largement l'erreur théorique, le gain de Kalman devient nul et l'on se contente de la prédiction en guise de filtrage : l'observation correspondante n'est donc pas utilisée pour remettre à jour l'estimateur, ce qui est conforme à ce que l'on peut attendre pour une donnée non valide. Dans notre cas, comme nous cherchons à détecter les impulsions photoniques et non à les éliminer, on choisira :

$$r_k = \begin{cases} 0 & \text{si } |s_k - H E_{k|k-1}| < \eta \sqrt{P_{k|k-1}(1,1)}, \\ 1 & \text{si } |s_k - H E_{k|k-1}| \geq \eta \sqrt{P_{k|k-1}(1,1)}, \end{cases}$$

ce qui permet l'initialisation de  $\hat{\mathbf{r}}_0$  pour l'algorithme du Tableau 4.5. Une étape de lissage s'appuyant sur  $\hat{\mathbf{r}}_0$  est ensuite effectuée pour déterminer  $\hat{\mathbf{E}}_0$ .

## 4.4 Résultats sur données réelles

Nous présentons dans cette partie des résultats obtenus sur des données réelles. Le signal temporel a été acquis par un chaîne d'instrumentation dotée d'un détecteur HPGe refroidi présentant un excellent rapport signal à bruit, puis traité à l'aide du système ADONIS afin d'obtenir un échantillon  $\{(X'_m, Y'_m)\}_{1 \leq m \leq N}$  et un échantillon  $\{Z_m\}_{1 \leq m \leq N}$ . Nous avons testé les algorithmes **(A2)** et **(A3)** sur :

1. un mélange de Césium 137 et de Césium 134 dans le cas de l'algorithme **(A2)**,
2. un mélange de Césium 137 et d'Europium 152 pour l'algorithme **(A3)**.

On rappelle que le Césium 137 est caractérisé par une raie monoénergétique à 662 keV<sup>6</sup>. On donne les raies du Césium 134 dans le Tableau 4.6, ainsi que leurs intensités normalisées. Ces valeurs numériques sont tirées de la base JEF 2.2, qui est utilisée par les physiciens pour l'identification des radio-nucléides à partir de leurs rayonnements. De même, les informations sur l'Europium 152 sont données dans le Tableau 4.6. Dans la mesure où l'Europium 152 est caractérisé par une centaine de raies fondamentales, nous ne donnons dans cette tables que les raies les plus caractéristiques, à savoir celles dont l'intensité normalisé est suffisamment grande (supérieure à 0.01).

<sup>6</sup>Cette propriété sert entre autres pour l'étalonnage des chaînes d'instrumentation.

| Césium 134    |                        |               |                        | Europium 152  |                        |               |                        |
|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|
| Énergie (keV) | Intensité (normalisée) | Énergie (keV) | Intensité (normalisée) | Énergie (keV) | Intensité (normalisée) | Énergie (keV) | Intensité (normalisée) |
| 245           | 2.26e-4                | 795           | 0.872                  | 122           | 1                      | 779           | 0.457                  |
| 327           | 1.44e-4                | 802           | 9.02e-2                | 245           | 0.265                  | 810           | 1.12e-2                |
| 475           | 1.53e-2                | 847           | 1.03e-6                | 296           | 0.155                  | 867           | 0.148                  |
| 563           | 8.61e-2                | 1038          | 1.04e-2                | 344           | 0.937                  | 914           | 1.54e-2                |
| 569           | 0.153                  | 1167          | 1.93e-2                | 367           | 3.02e-2                | 964           | 0.511                  |
| 604           | 1                      | 1365          | 3.28e-2                | 411           | 0.787                  | 1005          | 2.28e-2                |
|               |                        |               |                        | 444           | 0.987                  | 1086          | 0.349                  |
|               |                        |               |                        | 488           | 1.43e-2                | 1090          | 6.03e-2                |
|               |                        |               |                        | 564           | 1.66e-2                | 1112          | 0.478                  |
|               |                        |               |                        | 586           | 1.62e-2                | 1213          | 4.92e-2                |
|               |                        |               |                        | 678           | 1.65e-2                | 1299          | 5.73e-2                |
|               |                        |               |                        | 689           | 3.00e-2                | 1408          | 0.735                  |

TAB. 4.6 – Raies énergétiques significatives du Césium 134 de l’Europium 152

#### 4.4.1 Remarque préliminaire

Il peut paraître surprenant, au regard du statisticien, de considérer un grand nombre d’observations ( $N \geq 10^6$  observations) pour le désempilement, ce qui élimine toute fluctuation statistique dans nos résultats. La raison en est double :

- Nous nous sommes placés dans l’obtention et la validation de nos résultats dans la peau de l’instrumentiste, qui cherche à identifier les éléments radioactifs à partir des pics observés. Dans ce cadre, il est nécessaire d’éliminer au maximum les fluctuations statistiques, afin de ne pas introduire des faux pics dans les spectres en énergie observés. Ceci justifie le protocole adopté par les métrologues, qui prolongent considérablement le temps d’acquisition des données afin d’obtenir la meilleure résolution possible.
- Afin d’observer le phénomène d’empilements, il est nécessaire soit d’avoir des sources à très fort taux de comptage, soit dans le cas de faibles activités de prolonger d’autant le temps de mesure.

Ces deux points étant évoqués, nous pouvons néanmoins remarquer que les nombres d’échantillons évoqués ici restent très en-deçà du nombre d’échantillons usuellement utilisé par les métrologues pour l’acquisition des spectres en énergie, qui est typiquement de l’ordre de  $10^9 - 10^{10}$  échantillons.

#### 4.4.2 Résultats obtenus par l’algorithme (A2)

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats obtenus sur le mélange Césium 137 - Césium 134 en utilisant l’algorithme (A2). Nous observons  $N = 10^6$  échantillons ( $X'_k, Y'_k$ ). Nous obtenons  $\hat{\lambda}_n \approx 200000$ , ce qui nous place à la limite des corrections de temps mort usuelles décrites dans [ANSI, 1999]. Nous présentons deux résultats obtenus respectivement pour  $T = 10^{-6}$ , ce qui correspond à conserver environ 90% des observations pour le calcul de  $\hat{I}_{1,n}$ , et pour  $T = \max_{1 \leq k \leq N} X'_k$ , ce qui correspond à conserver l’ensemble des observations pour ce calcul.

La Figure 4.12 représente le spectre en énergie observé avant désempilement (en bleu) et estimé à l’aide l’algorithme (A2) (en rouge). Les oscillations aux énergies élevées correspondent à un effet de fenêtrage dû au noyau choisi (ayant une transformée de Fourier à support compact). On constate dans un premier temps que le continuum Compton a été corrigé par notre algorithme. Les Figures 4.13-(a) et 4.13-(b) montrent des agrandissements de la Figure 4.12 afin de comparer nos résultats graphiques aux valeurs du Tableau 4.6 pour l’identification des pics du Cesium 134. En comparant la Figure 4.13-(a) et le Tableau 4.6, on constate que la correction du continuum Compton permet de mieux discriminer les pics principaux du Césium 134 à 604 et 795 keV.

Nous nous intéressons maintenant à la Figure 4.13-(b), et particulièrement aux pics observés dans le spectre désempilé. Nous partons de la constatation physique que lors de la purification des sources

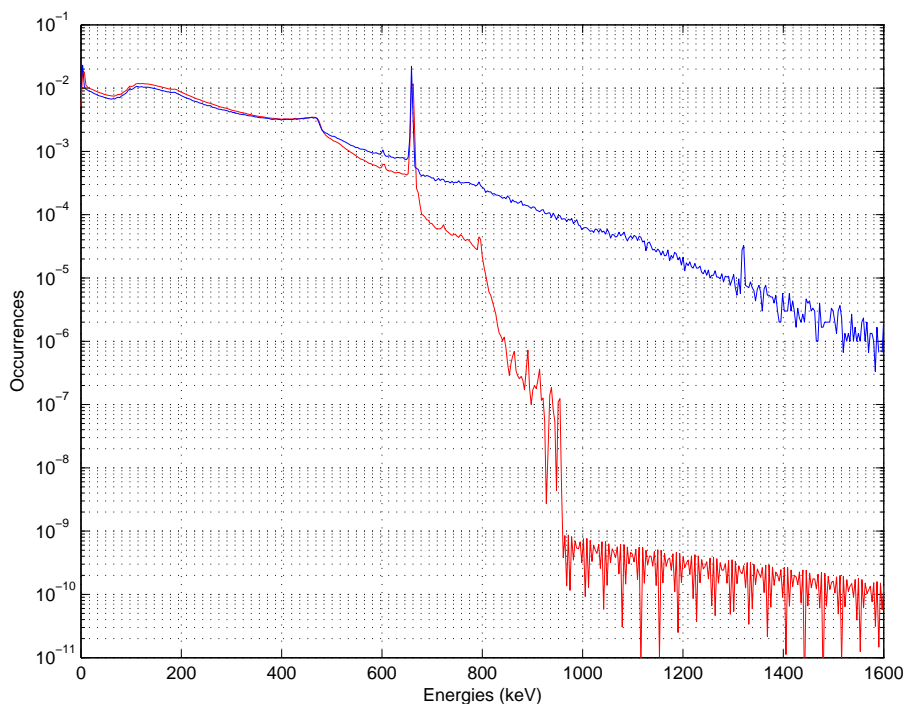


FIG. 4.12 – Traitement d'un spectre réel de Cs 137 - Cs 134 par l'algorithme (A2).

de Césium, les procédés chimiques utilisés ne permettent pas d'éliminer ses isotopes de la source. Il est par conséquent possible que les pics observés sur la Figure 4.13-(b) correspondent à des isotopes du Césium. Sachant que l'observation des isotopes est de moins en moins probable au fur et à mesure que le nombre atomique  $Z$  diminue, nous nous limitons volontairement à trois isotopes dont  $Z$  est inférieur à 134 et émettant des photons  $\gamma$ .

| Césium 132    |                        |               |                        | Césium 130    |                        |               |                        | Césium 129    |                        |               |                        |
|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|---------------|------------------------|
| Énergie (keV) | Intensité (normalisée) | Énergie (keV) | Intensité (normalisée) | Énergie (keV) | Intensité (normalisée) | Énergie (keV) | Intensité (normalisée) | Énergie (keV) | Intensité (normalisée) | Énergie (keV) | Intensité (normalisée) |
| 364           | 7.20e-4                | 772           | 7.60e-4                | 531           | 1                      | 1615          | 6.70e-2                | 40            | 9.70e-2                | 493           | 3.70e-4                |
| 465           | 1.92e-4                | 1032          | 1.24e-5                | 586           | 0.122                  | 1687          | 5.00e-2                | 90            | 8.00e-5                | 533           | 3.10e-4                |
| 506           | 8.20e-3                | 1136          | 5.20e-3                | 672           | 3.20e-3                | 1707          | 3.60e-2                | 93            | 2.13e-2                | 535           | 6.90e-4                |
| 567           | 2.48e-5                | 1297          | 5.79e-4                | 895           | 0.101                  | 1851          | 8.10e-3                | 178           | 8.80e-3                | 549           | 1.11e-1                |
| 630           | 1.04e-2                | 1317          | 6.00e-3                | 1029          | 4.50e-3                | 1959          | 4.30e-3                | 267           | 8.90e-3                | 573           | 5.00e-5                |
| 663           | 6.45e-6                | 1985          | 7.20e-4                | 1122          | 1.90e-2                | 1947          | 2.40e-3                | 270           | 6.95e-3                | 586           | 4.20e-4                |
| 667           | 1                      |               |                        | 1258          | 2.00e-2                | 1997          | 4.30e-2                | 279           | 4.32e-2                | 588           | 1.97e-2                |
|               |                        |               |                        | 1264          | 9.80e-3                | 2093          | 3.40e-3                | 282           | 7.90e-3                | 624           | 9.20e-4                |
|               |                        |               |                        | 1381          | 1.80e-3                | 2151          | 3.10e-3                | 318           | 8.00e-2                | 628           | 5.60e-5                |
|               |                        |               |                        | 1482          | 6.10e-3                | 2504          | 5.00e-4                | 322           | 2.30e-3                | 865           | 1.05e-3                |
|               |                        |               |                        |               |                        |               |                        | 358           | 1.90e-4                | 904           | 2.70e-4                |
|               |                        |               |                        |               |                        |               |                        | 372           | 1                      | 906           | 7.19e-3                |
|               |                        |               |                        |               |                        |               |                        | 373           | 4.00e-4                | 946           | 2.27e-3                |
|               |                        |               |                        |               |                        |               |                        | 411           | 7.29e-1                |               |                        |

TAB. 4.7 – Raies énergétiques significatives des isotopes du Césium

En comparant le Tableau 4.7 et la Figure 4.13-(b), nous constatons que les pics observés peuvent vraisemblablement correspondre à du Césium 132 (à 667 keV), du Césium 130 (à 894 keV) et à du Césium 129 (865, 904 et 946 keV). Néanmoins, au regard des occurrences associée à ces pics, il paraît hasardeux de se prononcer quant à la « réalité » de ces pics.

La Figure 4.14 montre les résultats obtenus pour  $T = \max_{1 \leq k \leq N} X'_k$ ; on constate *a posteriori* que le choix de  $T$  est primordial pour le bon fonctionnement de cet algorithme. La mauvaise estimation dans ce cas peut être essentiellement expliquée par le fait que la période d'échantillonnage en temps est grande (ou, en tout cas, du même ordre de grandeur) par rapport à la durée moyenne d'une séquence

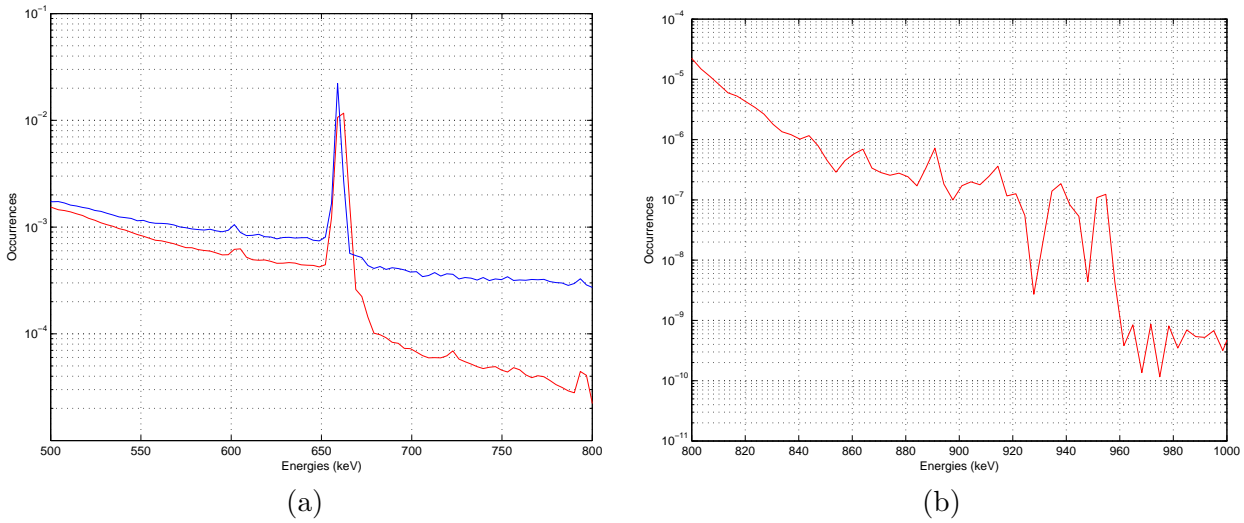


FIG. 4.13 – Traitement d'un spectre réel de Cs 137 - Cs 134 par l'algorithme **(A2)**. — (a) Zone [500; 800 keV]. (b) Zone [800; 1000 keV].

*busy*. Nous donnerons plus de détails sur ce point dans la partie 4.5.

#### 4.4.3 Résultats obtenus par l'algorithme **(A3)**

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats obtenus sur le mélange Césium 137 - Europium 152. Nous obtenons après calcul  $\lambda_n \approx 1000000$ , ce qui nous place bien au-delà des taux de comptage habituellement étudiés. La Figure 4.15 montre le spectre avec empilements (en bleu) avec le spectre obtenu par l'algorithme **(A3)** (en rouge). Notons qu'il est normal d'observer des « trous » dans le spectre observé, puisqu'une contrainte de positivité est appliquée dans l'algorithme (voir Annexe A). On constate que l'empilement du continuum Compton est supprimé, et qu'une grande partie des pics multiples est supprimée.

Les Figures 4.16-(a), 4.16-(b) et 4.16-(c) montrent des agrandissements de la Figure 4.15 afin de comparer nos résultats graphiques aux valeurs du Tableau 4.6 pour l'identification des pics de l'Europium 152.

On constate en comparant les pics photoniques de la figure avec les valeurs tabulées que tous les pics de haute intensité (supérieure à 0.1) sont bien retrouvés. Les pics d'intensité inférieure apparaissent peu à basses énergies, à cause du continuum Compton estimé, mais sont observables et identifiables à hautes énergies (voir les Figures 4.16-(b) et 4.16-(c)). Plus encourageant encore, on retrouve graphiquement des rapports d'intensités normalisées d'un ordre de grandeur comparable à celles du Tableau 4.6, ce qui indique une bonne estimation de  $m$ . En revanche, on observe à hautes énergies la persistance de raies multiples dans la spectre en énergie obtenu par **(A3)**. Le point le plus visible est la raie double du Cesium 137 qui n'est que partiellement corrigée. Ceci est dû au bruit additif qui n'a pas été pris en compte dans les deux modèles, comme on le verra dans 4.5. Un algorithme de débruitage (par exemple celui introduit en Annexe C) appliqué au préalable permettrait de se débarrasser de ces artefacts.

## 4.5 Discussion

### 4.5.1 Interprétation des résultats sur simulations

Au vu de simulations effectuées, nous constatons que l'algorithme **(A1)** possède effectivement de mauvaises propriétés numériques, ce qui valide *a posteriori* le choix d'un autre estimateur et d'un autre algorithme dans le cas du modèle à temps et énergies continus. Les algorithmes **(A2)** et **(A3)** donnent de très bons résultats sur la densité **(D4)**. Il semble par conséquent que la prise en compte

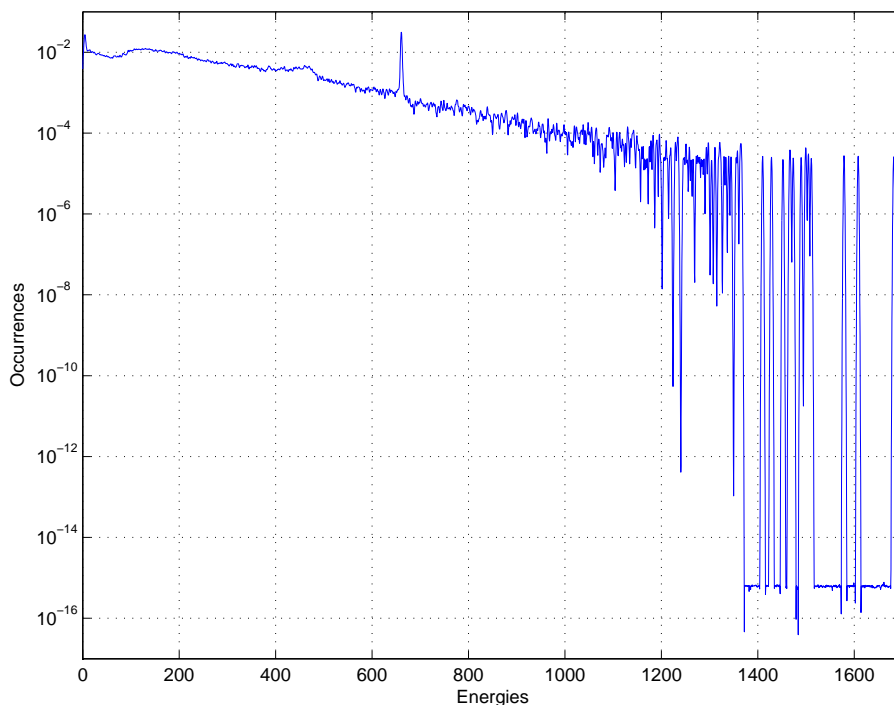


FIG. 4.14 – Résultats obtenus pour  $T = \max_{1 \leq k \leq N} X'_k$ .

de la nature stochastique du signal photonique incident permet de traiter efficacement le problème des empilements, et ce à des taux de comptage au-delà de ceux atteints par les méthodes usuelles de *pile-up rejection* (de l'ordre de 250000 coups par seconde selon [ANSI, 1999]); en effet, prendre  $\lambda = 0.04$  dans nos simulations revient, dans le cas d'un signal échantillonné à 10 MHz tel que le fait le système ADONIS, à considérer un taux de comptage de 400000 coups par seconde.

Ces résultats doivent être pondérés par une remarque importante. Les Théorèmes 2.2.1 et 2.3.1 supposent implicitement l'existence de plusieurs renouvellements au niveau des séquences *idle* et *busy*; dans le cas de forts taux de comptage, cette hypothèse devient illégitime si on considère des taux de comptage trop élevés. Ce point est inhérent au problème et non aux méthodes proposées, et peut être retrouvé dans l'estimation des lois des temps de service pour les files d'attente  $M/G/\infty$ . Comme on peut le voir dans [Hall and Park, 2004], la loi de  $X'$  est peu influencée par la loi du temps de service  $X$  pour  $\lambda$  trop grand. Ainsi, dans le cas de taux de comptage trop élevés, les séquences *busy* contiennent peu d'information sur les durées individuelles de chaque impulsion photonique et approximativement suivent une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Néanmoins, au vu des simulations, nous disposons grâce aux algorithmes (A2) et (A3) de méthodes de correction de spectre efficaces dans la plupart des mesures effectuées en spectrométrie  $\gamma$ .

#### 4.5.2 Interprétation des résultats sur données réelles

Comme nous l'avons constaté dans la partie précédente, les résultats obtenus sur des données réelles sont très prometteurs. Néanmoins, nous observons dans les deux cas que les performances sont moindres par rapport à celles obtenues dans le cadre de nos simulations. Nous détaillons ci-dessous deux limitations qui peuvent justifier la détérioration des performances des algorithmes (A2) et (A3).

##### L'introduction du bruit additif

Une remarque importante en pratique est que notre modèle suppose que le signal électrique incident est parfait, et que nous ne considérons pas le bruit additif inhérent à tout système de détection. Dans le cas des détecteurs HPGe, le SNR est suffisamment fort pour que la non-prise en compte du bruit

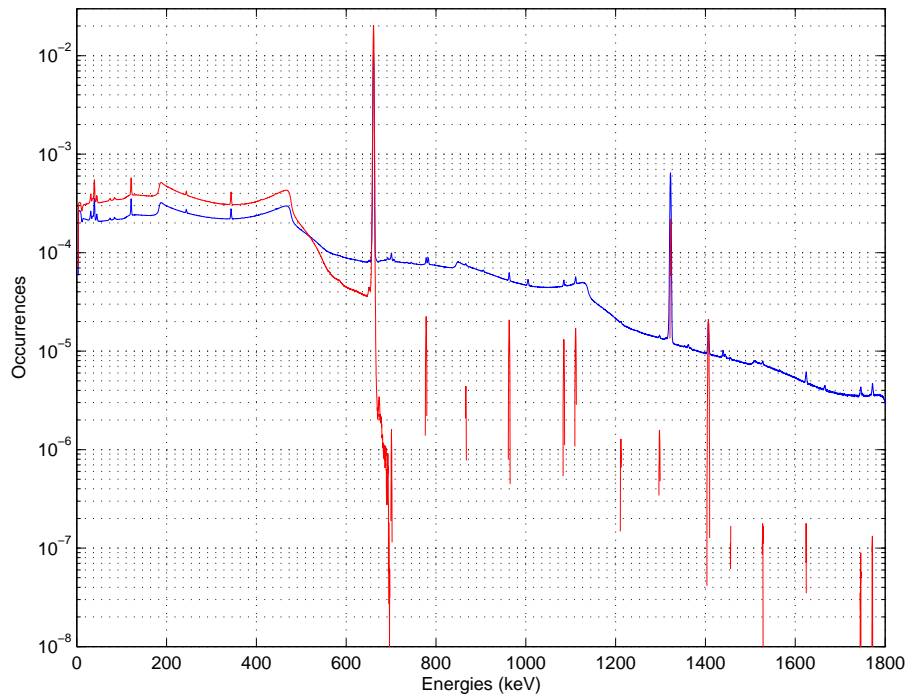


FIG. 4.15 – Traitement d'un spectre réel Cs 137 - Eu 152 par l'algorithme **(A3)**.

additif dans le signal temporel ne soit pas trop « farfelue » suivant les énergies, néanmoins le bruit additif rajoute un aléa non négligeable suivant les durées.

En toute rigueur, les relations des Théorèmes 2.2.1 et 2.3.1 sont fausses si l'on prend en compte le bruit additif. Néanmoins, ces relations peuvent être aisément corrigées. Si l'on note  $G$  la mesure de probabilité associée au bruit additif, il suffit de remplacer  $\mathcal{L}P'$  (respectivement  $\mathcal{TZ}(P')$ ) par  $\mathcal{L}P'/\mathcal{L}G$  (respectivement  $\mathcal{TZ}(P')/\mathcal{TZ}(G)$ ). On rajoute ainsi à notre problème une étape de déconvolution dans un cadre linéaire. Ce problème a fait l'objet de nombreuses études, et diverses méthodes ont été proposées dans le cas où la loi du bruit additif était connue (citons la déconvolution par ondelettes de [Pensky and Vidakovic, 1999]). Les paramètres du bruit pouvant être estimés facilement (par exemple lors d'une étape de calibration de la chaîne d'instrumentation), le problème peut dès lors être traité facilement lorsque l'on dispose des échantillons  $\{(X'_k, Y'_k)\}_{1 \leq k \leq N}$  et d'un modèle de bruit additif. Dans les cas de l'algorithme **(A3)** qui considère des données échantillonnées, quantifiées et mises en histogramme, nous proposons en Annexe C une méthode de débruitage par gradients multiplicatifs. Par ce traitement, nous améliorons considérablement les performances de l'algorithme **(A3)**. Le problème du bruit additif, bien que gênant, peut donc être traité.

### Détérioration lié au « binning » des données

Le problème du « binning » est introduit par ADONIS car il s'agit d'un système de spectrométrie numérique. Le pas de quantification pour les énergies est suffisamment petit, car l'objectif que l'on cherche à atteindre dans la construction du spectre en énergie et de discriminer les énergies au maximum. L'approximation consistant à considérer  $Y$  comme une variable aléatoire continue fait donc sens. En revanche, le pas d'échantillonnage suivant les durées est assez faible, ce qui rend la discrimination entre deux durées  $X'$  assez délicate. De plus, un pas d'échantillonnage trop grand est susceptible de fausser la mesure des observations de  $X'$ , en faisant apparaître les durées des séquences *busy* plus grandes qu'elles ne sont.

L'algorithme **(A3)** considérant des lois discrètes, le « binning » ne pose pas de problème dans

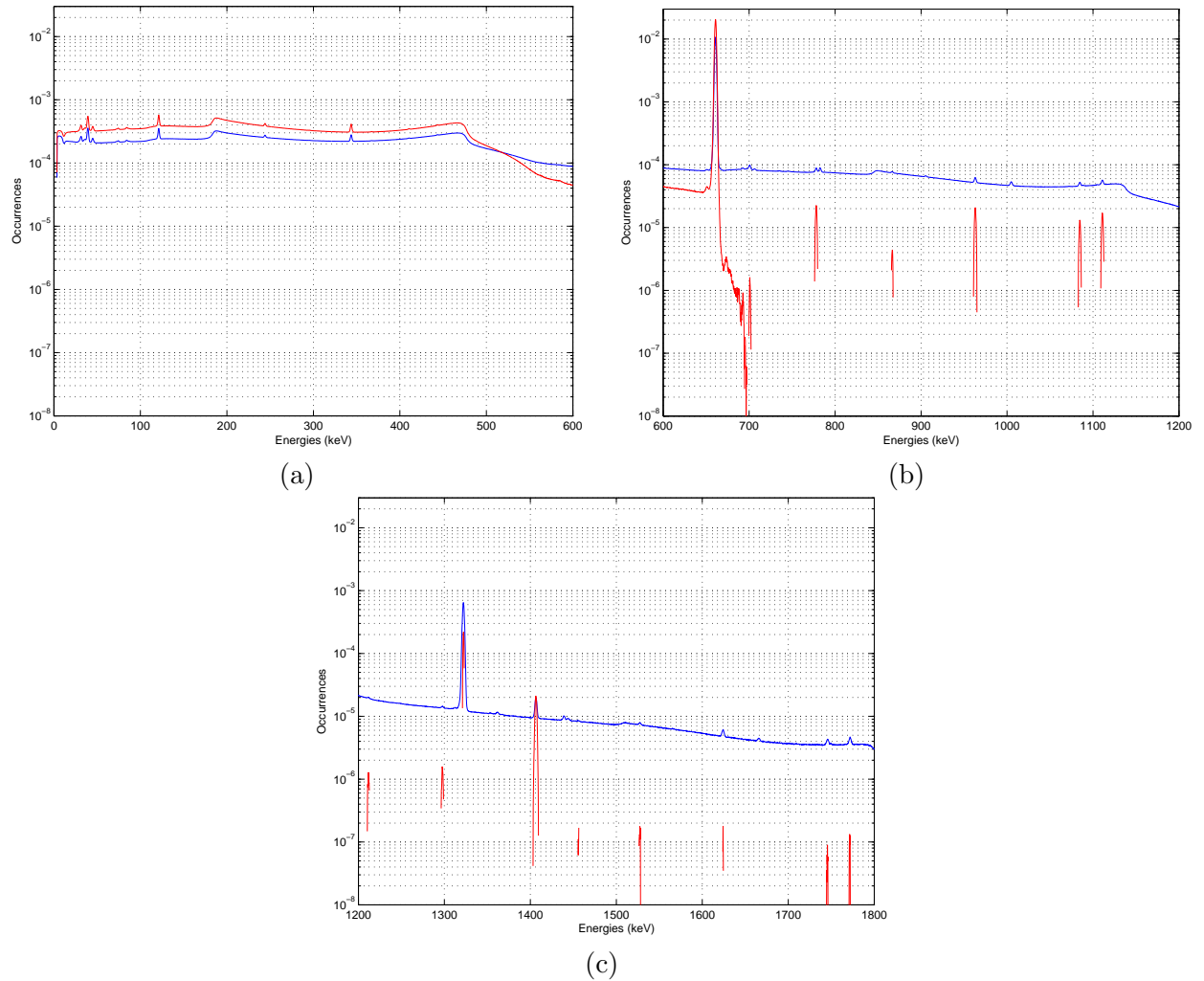


FIG. 4.16 – Traitement d'un spectre réel Cs 137 - Eu 152 par l'algorithme **(A3)** — (a) Zone [0; 600 keV]. (b) Zone [600; 1200 keV]. (c) Zone [1200; 1800 keV].

ce cas<sup>7</sup>. En revanche, dans le cas de l'algorithme `textbf(A2)`, qui prend en entrée des séquences  $(X'_k, Y'_k)$  parfaitement évaluées, l'introduction de l'échantillonnage introduit un biais non négligeable dans l'estimation de ces quantités, ce qui conduit à des performances moindres sur des données réelles par rapport à l'algorithme **(A3)**. Néanmoins, dans ce cas, un échantillonnage plus fin suivant les durées permettrait d'améliorer les performances.

À ce stade, il peut paraître légitime de s'interroger sur l'utilisation pratique du modèle à temps continu introduit dans le Chapitre 2. Rappelons que l'objectif de notre étude était de montrer la faisabilité de la correction d'empilements sur signaux réels, et non d'obtenir l'optimalité. En outre, dans le cas d'un système d'instrumentation numérique, ce modèle correspond au « cas limite » d'un pas d'échantillonnage infiniment petit ; par conséquent, les performances statistiques en terme de vitesse de convergence de l'algorithme **(A3)** seront moindres que celles établies dans le Chapitre 3, car le « binning » introduit une perte d'information (certains renouvellements et certaines impulsions photoniques individuelles peuvent ne pas être détectés). Le modèle à temps continu présente donc un intérêt théorique plus important que son équivalent à temps discret.

<sup>7</sup>En effet, dans ce cas, les définitions des durées et énergies discrètes données au Chapitre 2 prennent en compte le « binning ».

## 4.6 Conclusion

Nous avons testé numériquement dans ce Chapitre les estimateurs et algorithmes proposés pour la correction d'empilements. Les algorithmes proposés ont de bonnes performances en terme d'ISE sur nos simulations, ce qui valide notre approche.

Sur des données réelles obtenues à partir du système de spectrométrie numérique ADONIS, les résultats obtenus sont très prometteurs. Nous avons pu voir que la détérioration des performances par rapport aux simulations pouvait en partie être expliquée par l'introduction du bruit additif et du « binning » des données. Dans le premier cas, nous pouvons corriger ce rajout par une étape préliminaire de déconvolution. Dans le deuxième cas, la période d'échantillonnage en durée déterminera quelle modèle (temps continu ou temps discret) sera utilisé préférentiellement.

## Chapitre 5

# Conclusion et perspectives

Le problème de la correction des empilements d'impulsions photoniques peut donc être vu comme une extension non linéaire d'un problème de déconvolution de densité, et implique des développements théoriques et méthodologiques importants des résultats utilisés de le cadre de l'étude des problèmes inverses linéaires. néanmoins, tant du point de vue théorique que pratique, l'aspect fortement non-linéaire du problème soulève de nombreuses difficultés non résolues à ce jour. Nous présentons ici les résultats de notre étude et présentons des extensions possibles du travail effectué.

### Conclusion générale

#### Apports méthodologiques

Au terme de notre étude, nous avons dégagé la nécessité de prendre en compte les aspects stochastiques du signal photonique en considération pour corriger les empilements d'impulsions. Nous avons établi un modèle, basé sur deux processus ponctuels marqués, qui permet de caractériser rigoureusement le phénomène des empilements en utilisant une analogie existant avec les files d'attente  $M/G/\infty$ . En utilisant les propriétés de ce modèle, nous avons établi une relation qui fait le lien entre la mesure de probabilité observable  $P'$  et la densité de probabilité  $f$  dont on cherche à estimer la marginale  $m$ . L'existence d'une telle relation montre en pratique que la correction des distortions des spectres en énergie dues aux empilements est théoriquement possible.

Cette relation nous a permis également de fournir un cadre au problème de la correction d'empilements, celui de la déconvolution non-linéaire de densité à partir de mesures indirectes. Il peut s'écrire formellement :

$$\mathcal{T}_1(f) = \mathcal{T}_2(P'),$$

où  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sont deux applications de  $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}_+)$  dans lui-même. Partant de ce cadre, notre démarche a consisté à inverser l'opérateur  $\mathcal{T}_1$ , ce qui nous a permis, en adaptant les méthodes standards de déconvolution de densités dans le cas linéaire, de dériver un estimateur non-paramétrique du spectre en énergie idéal  $m$ . Nous avons dégagé des hypothèses de régularité fonctionnelles proches des approximations faites dans le cadre de la spectrométrie  $\gamma$ , et montré que sous ces hypothèses, l'estimateur de  $m$  est consistant et possédait une vitesse de convergence polynômiale au sens de l'erreur quadratique intégrée.

#### Validation numérique

En pratique, cet estimateur ainsi que sa version à temps discret ont été validés numériquement sur des simulations. En effet, nous avons constaté que la corrections des empilements était effectivement réalisée, tant au niveau du continuum Compton que des pics multiples, ce qui valide *a posteriori* le choix de nos estimateurs et leurs implémentations. Les résultats que nous avons obtenus sur des données réelles à partir du système de spectrométrie numérique ADONIS ont été très prometteurs ; ils nous

ont également permis de mettre en évidence des limitations dans l'application des algorithmes **(A2)** et **(A3)** sur ces données réelles. Nous pouvons expliquer en partie la détérioration des performances de ces algorithmes de deux manières :

1. le bruit additif, qui n'est pas pris en compte par notre modèle, introduit un noyau convolutif supplémentaire au niveau des relations de désempilement des Théorèmes 2.2.1 et 2.3.1,
2. l'échantillonnage peu précis en temps détériore les performances de l'algorithme **(A2)** par rapport à l'algorithme **(A3)**.

Néanmoins, ces limites sont inhérentes à la chaîne d'instrumentation utilisée pour l'acquisition de nos données.

## Perspectives

L'étude effectuée a permis de dégager des limites, tant en termes de performances algorithmiques sur des données réelles qu'en terme de modélisation. Ceci nous amène à proposer des voies d'investigations détaillées ci-dessous.

### Améliorations des performances algorithmiques

Ainsi que nous l'avons écrit précédemment, nous avons pu constater au cours de notre étude que les principales limitations numériques résidaient dans le bruit additif et le binning. Si le binning n'est pas en soi un problème<sup>1</sup>, l'utilisation de méthodes de débruitage des séquences *idle* et *busy* en amont des algorithmes de désempilement pourrait permettre d'améliorer leurs performances. Nous en avons détaillé une en Annexe C, qui donne de bons résultats sur des simulations. Néanmoins, il existe des méthodes de débruitage dans le cas linéaire beaucoup plus fine, de type seuillage par ondelettes. Ces approches pourraient être étudiées dans le but d'améliorer les performances de nos algorithmes.

### Améliorations au niveau méthodologique

Dans la construction de l'estimateur de  $m$ , nous avons adapté les méthodes des noyaux pour l'estimation non-paramétrique et d'inversion par transformée de Fourier. En effet, la relation de convolution entre  $P'$  et  $f$  est non-linéaire, et les observations sont indirectes, c'est-à-dire que  $\mathcal{T}_2(P')$  n'est pas directement observable. Ce problème inverse non-linéaire étant par conséquent très complexe, nous avons tout d'abord cherché à résoudre ce problème en adaptant des méthodes de déconvolution et d'estimation « simples ». Notre étude ayant montré que la correction des empilements pouvait être effectuée, il paraît légitime d'améliorer la méthodologie utilisée pour la construction des estimateurs. Par exemple, les observations montrent que le phénomène d'empilement « étale » les impulsions photoniques élémentaires, il pourrait par conséquent être intéressant d'effectuer une déconvolution et une estimation par projection sur une base d'ondelettes ; cette méthode permettrait de prendre en considération à la fois les parties lisses des spectres en énergie, caractéristiques du continuum Compton, et les pics correspondant à des énergies photoniques individuelles.

### Améliorations du modèle proposé

À un niveau d'abstraction plus élevé, nous pouvons également nous interroger sur le choix de notre modèle. L'absence de résultats comparatifs dans ce domaine, et les grands nombres de phénomènes aléatoires intervenant dans l'interaction photon-détecteur, nous ont naturellement orienté vers une approche non-paramétrique, à savoir totalement guidée par les données. Cette approche, totalement indépendante du système d'instrumentation utilisé, a fourni des résultats théoriques et pratiques

<sup>1</sup>Cette difficulté peut être contournée par l'utilisation du Théorème 2.3.1, ou au niveau de la chaîne d'instrumentation par une fréquence d'échantillonnage plus élevée.

pour la correction d'empilements au sens large, c'est-à-dire que les pics photoniques et le continuum Compton des spectres en énergie étaient tout deux correctement « reconstruits ».

Néanmoins, au regard du métrologue, le continuum Compton est considéré comme une nuisance pour l'identification des pics caractéristiques des éléments radioactifs. Nous touchons ici aux limites inhérentes à toute approche non-paramétrique : l'absence d'information *a priori* sur ce que l'on cherche à reconstruire (à savoir un spectre de raies) conduit à une correction incomplète du continuum Compton, car le continuum Compton non empilé n'est pas supprimé par notre méthode.

Nous pouvons par conséquent chercher à présent à raffiner ce modèle. Une modélisation semi-paramétrique permettrait par exemple de prendre en considération la différence entre pic et Compton, et donc d'introduire un *a priori* informatif sur les données à traiter. Ces modèles, ainsi que les traitements qui en découlent, pourront faire l'objet de travaux ultérieurs.



# Annexe A

## Algorithme de désempilement à temps discret

### Sommaire de l'annexe

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>A.1</b> | <b>Abrégé descriptif</b> . . . . .  | <b>97</b>  |
| <b>A.2</b> | <b>Description de l'invention</b> . . . . .                               | <b>98</b>  |
| A.2.1      | Effet Compton et bruit de mesure . . . . .                                | 98         |
| A.2.2      | Empilements d'impulsions . . . . .  | 99         |
| <b>A.3</b> | <b>État de l'art</b> . . . . .  | <b>100</b> |
| <b>A.4</b> | <b>Description de la méthode</b> . . . . .                                | <b>101</b> |
| A.4.1      | Première étape : Recherche des coefficients d'une série entière . . . . . | 106        |
| A.4.2      | Deuxième étape : Identification des coefficients . . . . .                | 107        |
| <b>A.5</b> | <b>Revendications du brevet</b> . . . . .                                 | <b>110</b> |
| <b>A.6</b> | <b>Références bibliographiques</b> . . . . .                              | <b>111</b> |
| <b>A.7</b> | <b>Figures</b> . . . . .  | <b>112</b> |

---

Nous détaillons dans cette annexe le texte du brevet [Trigano *et al.*, 2004], qui permet d'aboutir à un algorithme de désempilement à temps discret. Dans cette annexe, nous supposons que  $\alpha$  et  $P'$  ont été estimées antérieurement ; ainsi  $\alpha$  peut être estimé en utilisant la Proposition 2.1.2, et on peut estimer  $\mathbb{P}((X_i^{(d)}, Y_i^{(d)}) = (m, n))$  par la fréquence associée à cet événement. Cet algorithme de désempilement travaille directement sur les histogrammes bidimensionnels, c'est-à-dire qu'il renvoie un histogramme  $\hat{f}$ , l'estimateur de la loi en énergie  $m$  qui nous intéresse est déduit par projection de  $\hat{f}$ .

### A.1 Abrégé descriptif

#### BREVET D'INVENTION

**TITRE : Mesure et traitement d'un signal comprenant des empilements d'impulsions élémentaires.**

L'invention propose un procédé de mesure comprenant le traitement d'un signal comportant une succession d'impulsions principales de durée  $X'$  et d'énergie  $Y'$  espacées temporellement les unes des autres et pouvant être constituées chacune d'un empilement d'impulsions élémentaires de durée  $X$  et dont l'énergie est évaluée par une variable  $Y$  possédant une propriété d'additivité, lesdites impulsions élémentaires ayant des instants d'apparition  $T_i$  qui suivent un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ , caractérisé en ce qu'il comporte les étapes consistant à :

- numériser ledit signal,
- mesurer la durée  $X'$  et l'énergie  $Y'$  de chaque impulsion principale afin de construire des couples Durée-Energie  $(X', Y')$ ,

- déterminer les couples d'énergie  $(X, Y)$  des impulsions élémentaires à partir des couples  $(X', Y')$  construits,
- déduire des couples  $(X, Y)$  déterminés, l'énergie  $Y$  de chaque impulsion élémentaire.

L'invention concerne en outre un dispositif d'analyse de signal comportant des moyens aptes à mettre en oeuvre le procédé de l'invention.

## A.2 Description de l'invention

La présente invention concerne d'une façon générale l'analyse de signaux comportant une pluralité d'impulsions principales pouvant être constituées chacune d'un empilement d'impulsions élémentaires inconnues que l'on cherche à identifier.

Plus précisément, la présente invention concerne un procédé de mesure comprenant le traitement d'un signal comportant une succession d'impulsions principales de durée  $X'$  et d'énergie  $Y'$  espacées temporellement les unes des autres et pouvant être constituées chacune d'un empilement d'impulsions élémentaires de durée  $X_i$  et dont l'énergie est évaluée par une variable  $Y_i$  possédant une propriété d'additivité au sens mathématique du terme, lesdites impulsions élémentaires ayant des instants d'apparition  $T_i$  qui suivent un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ .

De façon générale, de tels signaux peuvent être représentatifs de flux et plus particulièrement de flux de photons. On connaît déjà des procédés de ce type, notamment dans le domaine de la spectrométrie gamma.

On rappelle que la spectrométrie gamma a pour but, d'une part, de caractériser des radionucléides contenus dans une source émettrice de photons gamma, et d'autre part, de mesurer l'activité de cette source (elle est définie typiquement par un nombre de désintégrations par seconde ou par une unité connue nommée Becquerel).

Un exemple de dispositif capable de mettre en oeuvre de tels traitements est illustré sur la Figure A.1. Un détecteur 1 pourvu d'une source d'alimentation 2 convertit un signal de photons 3 en signal électrique 4. Ce signal électrique est ensuite traité par un préamplificateur 5 qui permet d'augmenter le rapport signal sur bruit. Un amplificateur 6 est ensuite utilisé pour présenter un signal adéquat à au moins une entrée d'un bloc électronique d'acquisition 7. Un tel bloc est typiquement constitué d'un convertisseur analogique numérique. En sortie de ce bloc, le signal ainsi numérisé est fourni à un bloc de traitement 8 dans lequel des opérations spécifiques sont mises en oeuvre. A titre d'exemple, le bloc de traitement 8 peut contenir notamment des circuits aptes à mettre en oeuvre un filtrage numérique de signal. Finalement, un système de visualisation 9 termine ladite chaîne d'acquisition pour aider un utilisateur dans l'analyse de la composition d'une source émettrice gamma. La Figure A.2 illustre typiquement ce qui peut être observé sur un tel système de visualisation. On peut voir, sur cette figure, différentes raies représentatives chacune d'une valeur quantifiée d'énergie (par exemple la raie 10). L'ensemble de ces raies caractérise un radionucléide émetteur gamma spécifique (par exemple le césium 137 a une raie monoénergétique à 662 keV ou le cobalt 60 a deux raies monoénergétiques à 1,173 MeV et 1,333 MeV).

Une identification de radionucléide(s), ou plus généralement d'une source émettrice gamma, au moyen de tels dispositifs de spectrométrie peut toutefois poser certaines difficultés. On connaît notamment trois types de perturbations capables de dégrader un spectre de raies idéales associées à un radionucléide :

- un effet Compton,
- un ajout d'un bruit de mesure à un signal idéal,
- des empilements possibles d'impulsions représentatives chacune d'un photon.

### A.2.1 Effet Compton et bruit de mesure

Lorsqu'un photon entre en interaction avec un détecteur, une impulsion électrique est créée, puis amplifiée comme décrit précédemment sur la Figure A.1. Un exemple de signal temporel 11 généré par

un tel détecteur est illustré sur la Figure A.3. On peut observer que ce signal se compose d'une succession d'impulsions électriques d'amplitude et de durées différentes, chaque impulsion correspondant, idéalement, à l'interaction d'un unique photon avec le détecteur. Un tel signal 11 permet une mesure de l'énergie des photons détectés, car la surface d'une impulsion électrique (par exemple la surface 13 de l'impulsion 12) est proportionnelle à l'énergie du photon associé à l'impulsion considérée. On peut donc, à partir des différentes impulsions électriques 11, déduire l'ensemble des raies énergétiques de la source observée.

Toutefois, deux phénomènes perturbent ce principe de mesure. Premièrement, du fait d'un effet Compton (cet effet est connu de l'Homme du métier), seule une partie de l'énergie d'un photon est susceptible d'être déposée dans le détecteur. Et une analyse spectrométrique d'un photon ayant subi un tel effet produit alors une raie d'une énergie inférieure à celle qui devrait être réellement observée. Deuxièmement, même dans le cas d'un dépôt de la totalité de l'énergie d'un photon, la surface de l'impulsion électrique créée n'est qu'approximativement proportionnelle à ladite énergie du fait du caractère intrinsèquement aléatoire de l'interaction entre ledit photon et le détecteur et du bruit apporté par l'électronique de mesure.

Les figures 4 et 5 illustrent notamment ces deux phénomènes de perturbation. La Figure A.4 montre la distribution énergétique du signal provenant d'une source émettant des photons essentiellement à une seule énergie, correspondant au pic 14. On peut remarquer ici que le signal issu du détecteur ne se présente pas sous la forme idéale d'une seule raie mono-énergétique, mais présente également un fonds continu 16 important, d'énergie inférieure à celle du pic 14, et dû à l'effet Compton. La Figure A.5 illustre la distribution en énergie du signal provenant de la détection d'une source gamma émettant des photons à plusieurs énergies, comme c'est le cas dans la Figure A.2. On peut de nouveau remarquer la présence d'un plafond de bruit dû notamment aux deux phénomènes évoqués : effet Compton et bruit de mesure. Ce plafond de bruit décroît sensiblement à mesure que les énergies augmentent en abscisse. Au vu de cette figure, il est clair que l'identification des radionucléides présents dans la source gamma analysée s'avère là aussi difficile, le spectre mesuré ayant une forme très éloignée de celui qui serait obtenu idéalement.

### A.2.2 Empilements d'impulsions

Une autre source de perturbation d'une analyse par spectrométrie d'une source gamma concerne le problème d'empilements d'impulsions temporelles. Lorsqu'un unique photon entre en interaction avec un détecteur, l'impulsion générée est d'une durée courte mais non nulle. Par exemple, dans le cas de détecteurs rapides, cette durée est tout juste inférieure à la microseconde. Il se peut alors que, lorsque deux photons sont émis à des instants proches, les impulsions respectives générées par des détecteurs lents se superposent partiellement, voire en totalité. Ce phénomène est notamment connu lorsqu'on utilise un détecteur du type des compteurs de type 2. Avec ces compteurs, chaque impulsion qui arrive alors qu'une autre est en cours de détection a pour effet de prolonger d'autant l'impulsion qui est en train de se former.

Une illustration de ce phénomène est représentée sur la Figure A.6. Elle représente un signal temporel contenant une superposition de deux impulsions 15, 15' arrivées aux instants  $T_{n+1}$  et  $T_{n+2}$  et de durée  $X_{n+1}$  et  $X_{n+2}$  respectivement. L'impulsion 15' apparaît alors même que l'impulsion 15 n'est pas terminée.

On peut voir que le détecteur, qui possède ici une réponse lente relativement aux durées des impulsions, ne distingue pas les deux impulsions l'une de l'autre. En effet, il fusionne les deux impulsions 15 et 15' pour n'en former qu'une principale 17, ce qui amène à croire qu'un unique photon est entré en interaction avec le détecteur. Dans un souci de clarté dans la suite du texte, une impulsion élémentaire fera référence à une impulsion liée à un unique photon (par exemple l'impulsion élémentaire 15 ou 15'), et une impulsion principale correspondra à une impulsion pouvant contenir un empilement d'impulsions élémentaires.

Une première conséquence du phénomène d'empilement est donc le risque de sous-estimer l'activité globale de la source gamma en cours d'analyse. On notera ici, que ce phénomène est d'autant

plus fréquent que l'activité globale de la source est forte ou que la réponse du détecteur est lente. On considèrera dans la suite du texte, que la définition des termes « activité globale » et « taux de comptage » est identique. Une deuxième conséquence d'un tel empilement de photons concerne l'estimation proprement dite des énergies. En effet, dans le cas d'un tel détecteur, on attribue à un seul photon la somme de l'énergie des photons empilés, car, du fait même de sa définition, l'impulsion principale 17 possède une surface bien supérieure à celle des impulsions élémentaires 15 et 15'. Ainsi de manière générale, le phénomène d'empilement engendre un déplacement erroné d'une partie du spectre vers les énergies croissantes. On peut voir, à titre illustratif, un tel déplacement sur les figures 7 et 8 qui représentent respectivement un spectre normalisé contenant deux raies principales à 22keV et 55keV, le phénomène d'empilement n'ayant pas eu lieu, et un spectre normalisé issu d'une même source gamma où le phénomène d'empilement existe. On notera que la source gamma analysée émet à l'origine des photons à deux énergies  $E_1$  et  $E_2$  parfaitement identifiées sur la Figure A.7. Ce cas correspond à une analyse de spectrométrie avec un faible taux de comptage (un petit détecteur placé loin de la source par exemple). A l'inverse, lorsque le taux de comptage augmente, le phénomène d'empilement apparaît, et on voit progressivement se créer des raies parasites aux énergies correspondant à des combinaisons linéaires des énergies  $E_1$  et  $E_2$  (par exemple,  $2E_1$ ,  $E_1+E_2$ ,  $2E_2$ ,  $2E_1+2E_2$ , etc. ; par exemple les raies 18 et 19). En outre, l'apparition de ces raies parasites provoque une distorsion de l'activité apparente aux énergies  $E_1$  et  $E_2$ , du fait de la dispersion du signal vers les hautes énergies. On comprend aisément que ces raies parasites risquent de perturber le processus d'identification des radionucléides de la source gamma observée, voire de rendre faux les résultats, certaines raies ne correspondant à aucune énergie émise par la source, l'activité des raies réellement émises étant sous-évaluée.

### A.3 État de l'art

De nombreuses solutions ont été proposées pour limiter l'ensemble des problèmes décrits ci-dessus et particulièrement les problèmes liés aux empilements. On connaît par exemple une méthode [1] implémentée dans un spectromètre comportant notamment une opération de filtrage linéaire. Le but du filtrage proposé est d'éliminer le plus possible le bruit ajouté au signal utile, étant entendu que toute impulsion principale formée d'un empilement d'impulsions élémentaires fait partie dudit bruit. Bien qu'ayant permis certaines améliorations, cette méthode conduit à un compromis qui lui est spécifique et qui limite son champ d'utilisation. En effet, du fait de la nature du bruit présent dans ledit signal, le filtrage proposé est d'autant plus efficace qu'il opère sur un temps long, ce qui, inévitablement, augmente les risques de prise en compte de phénomènes d'empilement. En conséquence, cette méthode dépend fortement de l'activité de la source gamma analysée. Lorsque cette activité est faible, le risque d'empilement étant réduit, un filtrage efficace peut être mis en oeuvre. En revanche, lorsque cette activité dépasse un certain seuil, ledit temps, sur lequel le filtrage est mis en oeuvre, doit être raccourci pour limiter le nombre d'empilements dans le signal à traiter, ce qui réduit l'efficacité du débruitage et diminue donc la résolution de spectre finalement obtenue. En conséquence, des spectromètres utilisant une telle méthode souffrent donc d'une dégradation de la résolution lorsque le taux de comptage d'une source gamma augmente.

De nombreux fabricants comme CAMBERRA/EURISYS, ORTEC, ou XIA ont également développé des spectromètres numériques capables de s'affranchir des problèmes d'empilements. Mais les méthodes de traitement des impulsions restent conceptuellement proches des méthodes classiques qui reposent toujours sur un filtrage linéaire non récursif de type RIF (acronyme de l'expression « Réponse Impulsionnelle Finie »), comme celui proposé plus haut. Tel est le cas notamment du spectromètre « Digital Gamma Finder » du fabricant XIA. A cet égard, on trouvera des détails dans les références [2], [3], [4] en ce qui concerne XIA et dans les références [5], [6] en ce qui concerne CAMBERRA/EURISYS.

Il existe aussi d'autres méthodes qui permettent de résoudre en partie le problème d'empilement. Elles reposent sur une analyse de la forme d'un signal détecté [7], ou sur une comparaison de l'énergie cumulée par rapport à un seuil déterminé [8], [9]. Mais, ces méthodes sont fortement dépendantes du type de détecteur utilisé et demeurent finalement peu robustes lorsque les taux de comptage sont

élevés. On connaît également une autre méthode récente [10] qui permet de corriger des distorsions apportées par des détecteurs spécifiques (notamment un détecteur à base de Tellure de Cadmium) qui ne génèrent pas d'impulsions dont la surface est proportionnelle à l'énergie déposée par un photon. L'énergie déposée par le photon est estimée à partir de deux variables : la surface d'une part, et le temps de montée de l'impulsion associée audit photon d'autre part. Toutefois, comme toutes les méthodes de spectrométrie présentées ci-dessus, cette méthode repose uniquement sur des résultats expérimentaux. En outre, ces méthodes se contentent très généralement de supprimer du signal traité les impulsions empilées qu'elles ont détectées. Le signal final est bien dépourvu d'empilements mais certaines impulsions élémentaires et les informations qu'elles représentent disparaissent avec ladite suppression.

Ainsi, un inconvénient de ces méthodes est qu'elles ne permettent pas d'identifier toutes les impulsions élémentaires contenues dans une impulsion principale pour analyser l'information qu'elle représente. Un but de la présente invention est donc de s'affranchir de cet inconvénient. Afin d'atteindre ce but, elle propose une méthode d'identification efficace, notamment dans le domaine de la radioactivité gamma, basée non pas sur une approche expérimentale, mais sur une approche rigoureuse.

## A.4 Description de la méthode

Ainsi, la présente invention propose un procédé de mesure comprenant le traitement d'un signal comportant une succession d'impulsions principales de durée  $X'$  et d'énergie  $Y'$  espacées temporellement les unes des autres et pouvant être constituées chacune d'un empilement d'impulsions élémentaires de durée  $X$  et dont l'énergie est évaluée par une variable  $Y$  possédant une propriété d'additivité lesdites impulsions élémentaires ayant des instants d'apparition  $T_i$  qui suivent un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ , caractérisé en ce qu'il comporte les étapes consistant à :

- numériser ledit signal afin de disposer de données représentatives de celui-ci, à partir de ces données :
- mesurer la durée  $X'$  et l'énergie  $Y'$  de chaque impulsion principale afin de construire des couples Durée-Energie  $(X', Y')$ ,
- déterminer les couples d'énergie  $(X, Y)$  des impulsions élémentaires à partir des couples  $(X', Y')$  construits,
- déduire des couples  $(X, Y)$  déterminés, l'énergie  $Y$  de chaque impulsion élémentaire.

Certains aspects préférés mais non limitatifs de ce procédé sont les suivants :

- l'étape de détermination des couples Durée-Energie  $(X, Y)$  est mise en oeuvre en résolvant une formule de désempilement reliant une fonction des couples Durée-Energie  $(X', Y')$  des impulsions principales à une fonction des couples Durée-Energie  $(X, Y)$  des impulsions élémentaires empilées dans l'impulsion principale correspondante,
- ladite formule relie une loi de probabilité discrète des couples Durée-Energie  $(X', Y')$  des impulsions principales à une loi de probabilité discrète des couples Durée-Energie  $(X, Y)$  des impulsions élémentaires,
- dans l'étape de détermination des couples Durée-Energie  $(X, Y)$ , la loi de probabilité discrète des couples Durée-Energie  $(X', Y')$  est estimée à l'aide des couples Durée-Energie  $(X', Y')$  construits et d'un nombre d'occurrences associé à chaque dit couple  $(X', Y')$ , lesdites occurrences ayant été préalablement déterminées à partir desdites mesures,
- ladite formule est en outre dépendante de l'intensité  $\lambda$  du processus de Poisson,
- ladite formule est de la forme :

$$\sum_{t=0}^{\infty} z^t \left( \alpha^{t-K_t(s)} \right) = \frac{1}{1 - (\alpha z + (1 - \alpha)zB(z, s))},$$

où les variables  $z$  et  $s$  représentent des transformées en Z des durées et des énergies,  $t$  une durée,  $B(z, s)$  la transformée en Z de la densité de probabilité  $b_{t,e}$ ,  $b_{t,e}$  représentant la probabilité que la durée d'une impulsion principale soit égale à une valeur  $t$  et que son énergie soit égale à une

valeur  $e$ ,  $K_t(s)$  la transformée en Z d'une fonction dépendante de la densité de probabilité  $h_{t,e}$ ,  $h_{t,e}$  représentant la probabilité que la durée d'une impulsion élémentaire soit égale à une valeur  $t$  et que son énergie soit égale à une valeur  $e$ , et  $\alpha$  un paramètre dépendant de l'activité de la source analysée,

- on détermine l'intensité  $\lambda$  du processus de Poisson en mesurant les durées de séparation des impulsions principales,
- on détermine le paramètre  $\alpha$  en utilisant la formule suivante :  $\alpha = \exp(-\lambda T_e)$ , où  $T_e$  est une période d'échantillonnage associée à l'étape de numérisation,
- l'étape de déduction de l'énergie  $Y$  de chaque impulsion élémentaire comprend une étape de détermination d'une loi de probabilité discrète de ses énergies,
- la loi de probabilité discrète des énergies est une loi de probabilité marginale, suivant les énergies, de la loi de probabilité discrète des couples Durée-Energie  $(X, Y)$ ,
- on développe en série entière suivant les durées la fraction à droite de l'égalité dans ladite formule de désempilement pour déterminer les coefficients de cette série,
- les coefficients de ladite série entière sont identifiés aux coefficients contenus dans le terme à gauche de l'égalité dans ladite formule de désempilement, pour déterminer ladite densité de probabilité  $h_{t,e}$  relative aux couples Durée-Energie  $(X, Y)$  des impulsions élémentaires,
- ladite détermination des coefficients de la série entière et ladite étape d'identification des coefficients comporte, chacune, au moins un calcul de convolution discrète,
- ladite étape d'identification des coefficients comprend en outre un test de contrainte de positivité,
- les impulsions principales sont représentatives de flux principaux pouvant contenir chacun un empilement de flux élémentaires, chaque flux élémentaire étant représenté par une impulsion élémentaire,
- les flux sont des flux de photons,
- les photons sont des photons gamma,
- une énergie de chaque flux de photons est représentée par l'énergie de l'impulsion correspondante, et en ce que chaque énergie est déterminée à partir de la surface sous chaque impulsion correspondante,
- le procédé comprend une étape initiale de mesure dudit signal comportant une succession d'impulsions principales représentatives de phénomènes physiques,
- le procédé comprend au moins une étape consistant à fournir à un utilisateur une information relative audit signal,
- ladite information concerne les flux élémentaires,
- ladite information concerne l'énergie  $Y$  des impulsions élémentaires représentatives des flux élémentaires.

Un autre but de la présente invention est de proposer un dispositif d'analyse d'un signal comportant une succession d'impulsions principales de durée  $X'$  et d'énergie  $Y'$  espacées temporellement les unes des autres et pouvant être constituées d'un empilement d'impulsions élémentaires de durée  $X$  et d'énergie  $Y$ , lesdites impulsions élémentaires ayant des instants d'apparition  $T_i$  qui suivent un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ , caractérisé en ce que ledit dispositif comporte des moyens aptes à mettre en oeuvre le procédé selon les aspects préférés ci-dessus pris seuls ou en combinaison.

D'autres aspects, buts et avantages de la présente invention apparaîtront mieux à la lecture de la description détaillée suivante d'une forme de réalisation préférée de celle-ci, donnée à titre d'exemple non limitatif et faite en référence aux dessins annexés, sur lequel :

- la Figure A.1 représente schématiquement les éléments d'une chaîne d'acquisition numérique de spectrométrie gamma,
- la Figure A.2 illustre un spectre de raie d'une source gamma observable à partir d'un dispositif du type de la Figure A.1,
- la Figure A.3 montre, à titre illustratif, un exemple de signal temporel généré par un détecteur de photon gamma,
- la Figure A.4 montre, à titre illustratif, la distribution énergétique mesurée d'une source mono-

- énergétique de Césium 137,
- la Figure A.5 montre, à titre illustratif, une distribution énergétique d'une source d'activité émettant des photons à plusieurs énergies,
- la Figure A.6 illustre schématiquement un signal temporel issu d'un détecteur lent lorsqu'un phénomène d'empilement a lieu,
- la Figure A.7 illustre un spectre normalisé d'une source gamma lorsque aucun phénomène d'empilement n'a lieu,
- la Figure A.8 illustre un spectre normalisé de la source gamma analysée sur la Figure A.7 lorsqu'un phénomène d'empilement a lieu par augmentation de l'activité,
- la Figure A.9 représente schématiquement une portion de signal mesuré par le système selon l'invention, ce signal comportant deux impulsions principales,
- la Figure A.10 montre à titre illustratif le signal de la Figure A.9 lorsqu'il est numérisé par le système selon l'invention,
- la Figure A.11 représente un schéma bloc du procédé selon l'invention,
- la Figure A.12 montre un exemple d'histogramme bidimensionnel du couple  $X'$  et  $Y'$  des séquences d'occupation d'un signal traité par le procédé,
- la Figure A.13 montre un exemple d'histogramme bidimensionnel du couple  $X$  et  $Y$  des impulsions élémentaires dudit signal traité,
- la Figure A.14 illustre un schéma bloc d'un algorithme permettant d'implémenter une première partie du procédé de déempilement selon l'invention dans un dispositif électronique approprié,
- la Figure A.15 illustre un schéma bloc d'un algorithme permettant d'implémenter une deuxième partie du procédé de déempilement selon l'invention dans un dispositif électronique approprié,
- la Figure A.16 représente un spectre en énergie gamma observé du Cesium 137, le procédé selon l'invention n'étant pas mis en oeuvre.
- la Figure A.17 représente un spectre en énergie gamma observé du Cesium 137, le procédé selon l'invention étant mis en oeuvre.

A titre préliminaire, on désignera dans la suite du texte une séquence d'occupation comme une portion ininterrompue de signal pendant laquelle il y a toujours présence d'au moins une impulsion élémentaire, c'est-à-dire qu'à chaque instant l'amplitude de ce signal est supérieur à un seuil correspondant par exemple au niveau de bruit blanc du détecteur. En définitive, une séquence d'occupation correspond à une impulsion principale. Toutefois, cette nouvelle notion permet de désigner, fort utilement par la suite, une séquence de non-occupation comme une portion ininterrompue de signal pendant laquelle ce signal est inférieur voire égal à un seuil choisi (le seuil pouvant être de nouveau le niveau de bruit du détecteur). A titre d'exemple, la Figure A.9 représente schématiquement une portion de signal mesuré par le système selon l'invention, ledit signal comportant deux séquences d'occupation 20 et 21. La séquence d'occupation 20 ne contient pas d'empilement, tandis que la séquence 21 contient un empilement de deux impulsions élémentaires. Par ailleurs, on attire l'attention du lecteur sur le fait que l'on entend par durée  $X'$  ou  $X$  d'une impulsion, un temps correspondant à la largeur totale de ladite impulsion. A cet égard, dans la suite du texte, on désignera dans les formules les durées et les énergies par les notations suivantes :

- durées** :  $t$  pour une formule temporelle ou  $z$  lorsque la formule a été transformée en  $Z$ ,
- énergies**  $e$  pour une formule temporelle ou  $s$  lorsque la formule a été transformée en  $Z$ .

En référence maintenant à la Figure A.10, le système selon l'invention échantillonne et numérise l'ensemble d'un signal généré par le détecteur dans une étape de mesure afin de disposer d'un flux de données numériques 24 représentatives de ce signal ou plus généralement du flux de photons gamma associé. On notera que ledit échantillonnage fait intervenir la période d'échantillonnage  $T_e$  dont la valeur sera fixée à 1 dans cette description pour simplifier les écritures des formules ainsi que leur compréhension. Ce flux de données numériques est traité par le bloc de traitement sur la Figure A.1. Typiquement on utilise un circuit apte à réaliser des opérations sur des données numériques, tel qu'un processeur, un DSP (acronyme de l'expression anglo-saxonne « Digital Signal Processing »), un FPGA (acronyme de l'expression anglo-saxonne « FliFlop Programmable Gate Array ») ou tout autre circuit

équivalent. Dans ce bloc de traitement, on implémente le procédé selon la présente invention afin de désempiler les impulsions contenues dans le signal mesuré. On entend ici par « désempiler » tout traitement de l'information contenue dans les impulsions principales afin de résoudre partiellement ou totalement les problèmes apportés par les empilements d'impulsions élémentaires.

Le procédé de désempilement proposé est basé sur les hypothèses suivantes :

- les impulsions élémentaires ont des instants d'apparition qui suivent un processus homogène de Poisson d'intensité  $\lambda$ ,
- les variables représentant les énergies ont des propriétés additives.

Un schéma bloc du procédé est représenté sur la Figure A.11. On considère tout d'abord les données numériques représentatives des séquences d'occupation. On estime notamment leur durée  $X'$  ainsi que leur énergie  $Y'$  et on construit un ensemble 30 de couples Durée-Energie  $(X', Y')$  associés chacun à une séquence d'occupation particulière. On notera que l'énergie  $Y'$  d'une séquence d'occupation est évaluée à partir de l'aire présente sous cette séquence. Cette aire est calculée à partir d'amplitudes des données numérisées et de la résolution temporelle obtenue, cette dernière étant notamment dépendante des performances du bloc d'acquisition sur la Figure A.1. Il est évident que la précision d'estimation d'une aire croît avec la résolution temporelle, donc avec un facteur de sur-échantillonnage.

Une première série d'étapes (26 et 28) consiste ensuite à déterminer ladite intensité  $\lambda$  du processus de Poisson (ce paramètre  $\lambda$  sera nécessaire au niveau du bloc 27). A cet effet, on calcule les durées de séparation entre chaque séquence d'occupation à partir des couples  $(X', Y')$  des séquences d'occupation (bloc 26) et des instants d'arrivée de ces séquences d'occupation. Puis, on estime ladite intensité  $\lambda$  à partir des durées qui séparent les séquences d'occupation (bloc 28). Cette estimation est possible, car la demanderesse a déterminé que ces durées suivent une loi de probabilité exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Ce paramètre peut donc être estimé en caractérisant la loi exponentielle à partir des durées de séparation pouvant être estimées à partir des durées  $X'$  et des instants d'occurrence des impulsions principales mesurés. Le bloc 25 consiste à calculer un nombre d'occurrences par couple  $(X', Y')$  afin d'obtenir une information sur la présence relative des séquences d'occupation. A titre d'exemple illustratif, on peut notamment obtenir 10 couples (0.4ms, 1Mev), 2 couples (0.4ms, 1.2Mev) et 40 couples (1ms, 1Mev). Disposant ainsi d'un tableau de données contenant le nombre d'occurrences par couple  $(X', Y')$ , on peut alors obtenir un estimateur de la distribution statistique. Une représentation possible d'une telle distribution est illustrée sur la Figure A.12. On peut voir sur cette figure un histogramme bidimensionnel du couple  $X'$  et  $Y'$  des séquences d'occupation dans le signal traité. Il est évident qu'un tel histogramme n'est donné ici qu'à titre illustratif et que cet exemple n'est nullement limitatif. Sur cette figure, on peut observer distinctement un pic 100 qui correspond à la séquence d'occupation de durée d'indice 14 et d'énergie d'indice 28. D'après les mesures, cette séquence d'occupation est apparue 10000 fois environ dans le signal issu du détecteur. Ainsi, d'une certaine manière, le bloc 25 consiste à construire un tableau de données représentatives d'un histogramme bidimensionnel selon les durées et les énergies.

Un autre bloc 27 consiste ensuite à relier les couples  $(X', Y')$  à des couples Durée-Energie  $(X, Y)$  d'impulsions élémentaires. En procédant de la sorte, on dispose pour la première fois d'une information relative aux impulsions élémentaires contenues dans le signal issu du détecteur. Plus précisément, le passage des impulsions principales aux impulsions élémentaires est mis en oeuvre au moyen d'une formule qui relie une loi de probabilité discrète des couples  $(X', Y')$  des impulsions principales à une loi de probabilité discrète du couple  $(X, Y)$  des impulsions élémentaires. Une telle formule, que l'on désigne par formule de désempilement, est donnée ci-dessous.

$$\sum_{t=0}^{\infty} z^t \left( \alpha^{t-K_t(s)} \right) = \frac{1}{1 - (\alpha z + (1 - \alpha)zB(z, s))}, \quad (\text{A.1})$$

où  $t$  représente une durée et les variables  $z$  et  $s$  représentent des transformées en  $Z$  des durées  $t$  et des énergies  $e$ .  $B(z, s)$  est la transformée en  $Z$  de la densité de probabilité  $b_{t,e}$  que la durée d'une impulsion principale soit égale à une valeur représentée par l'indice de durée  $t$  et que son énergie soit égale à une valeur représentée par l'indice  $e$  ( $t$  et  $e$  sont des entiers). Une équation de  $B(z,s)$  est de la forme

suivante :

$$B(z, s) = \sum_{t \geq 1} \sum_{e \geq 1} b_{t,e} z^t s^e . \quad (\text{A.2})$$

$K_t(s)$  est une fonction dépendante de la densité de probabilité  $h_{t,e}$  que la durée d'une impulsion élémentaire soit égale à une valeur représentée par l'indice de durée  $t$  et que son énergie soit égale à une valeur représentée par l'indice  $e$ . Cette fonction s'exprime sous la forme :

$$K_t(s) = \sum_{e=1}^{\infty} k_{t,e} s^e = \sum_{e=1}^{\infty} s^e \left( \sum_{j=1}^{t-1} \sum_{k=1}^j h_{k,e} \right) . \quad (\text{A.3})$$

Finalement le paramètre  $\alpha$  est lié à l'activité de la source analysée et dépend notamment de ladite intensité  $\lambda$  du processus de Poisson. On comprend maintenant l'intérêt d'avoir déterminé ce paramètre  $\lambda$  avec les blocs 26 et 28. En ce qui concerne ledit paramètre  $\alpha$ , sa détermination en fonction du paramètre  $\lambda$  est mise en oeuvre grâce à la formule (4).

$$\alpha = \exp(-\lambda T_e) , \quad (\text{A.4})$$

où  $T_e$  est une période du signal qui échantillonne le signal issu du détecteur.

Lorsque le bloc 27 est terminé, on dispose d'un tableau de données 32 relatives aux couples  $(X, Y)$  des impulsions élémentaires contenues dans le signal. En d'autres termes on est capable à ce niveau de construire un nouvel histogramme bidimensionnel des durées et des énergies desdites impulsions élémentaires. Un tel histogramme est représenté à titre d'exemple et de manière non limitative sur la Figure A.13. En comparaison avec la Figure A.12, on peut observer que les durées des impulsions ont diminué. Les impulsions principales contenant des empilements d'impulsions élémentaires ont bien disparu au profit desdites impulsions élémentaires.

Le bloc 29 met en oeuvre un calcul de la loi de probabilité marginale suivant les énergies de la loi de probabilité discrète des couples  $(X, Y)$ . On détermine ainsi chaque énergie  $Y$  en effectuant, à partir des couples  $(X, Y)$ , une somme sur les durées associées à l'énergie  $Y$  choisie. Exprimée sous forme d'une équation, ladite détermination de l'occurrence d'une énergie  $e$ , notée  $G_e$  dans la suite du texte, est la suivante :

$$G_e = \sum_{k=1}^{NB\_D} h_{k,e} , \quad (\text{A.5})$$

où  $k$  est l'indice des durées et NB\_D le nombre de canaux en durée.

Le procédé proposé dans la présente invention nécessite une implémentation des différentes formules ci-dessus dans un dispositif approprié, afin d'obtenir, au final, des données 31 relatives au spectre des énergies  $Y$  des impulsions élémentaires contenues dans le signal. Comme évoqué précédemment, un tel dispositif peut être un DSP, un FPGA, un ASIC (acronyme de l'expression anglo-saxonne « Application Specific Integrated Circuit ») ou tout autre circuit électronique équivalent. Un choix judicieux devra être effectué en fonction de contraintes liées à l'application visée, tel que le coût, la taille, la performance, la modularité, etc. Dans tous les cas, ladite implémentation comporte notamment deux étapes essentielles que l'on va maintenant expliquer. Bien entendu, l'homme du métier reconnaîtra, à la lecture de la description ci-dessous, qu'il existe d'autres variantes possibles et que la proposition faite ici n'est nullement limitative.

D'après la formule (A.1), on peut reconnaître que l'expression à gauche de l'égalité est de la forme d'une série entière dont les coefficients correspondent au terme entre parenthèses, c'est-à-dire  $\alpha^{t-K_t(s)}$ . Compte tenu de cette propriété intéressante, une première étape de l'implémentation proposée consiste à développer en série entière le terme à droite de l'égalité et à déterminer l'ensemble des coefficients de cette série. En d'autres termes, on recherche les coefficients  $y_t(s)$  dans la formule suivante :

$$\frac{1}{1 - (\alpha z + (1 - \alpha)zB(z, s))} = \sum_{t \geq 0} z^t y_t(s) , \quad (\text{A.6})$$

où  $t$  est un entier correspondant à une durée.

### A.4.1 Première étape : Recherche des coefficients d'une série entière

Une telle étape met en oeuvre un algorithme basé sur une relation de récurrence. Pour ce faire, on considère ledit terme à droite de l'égalité (A.1) comme une réponse impulsionnelle d'un filtre RII (acronyme de l'expression « Réponse Impulsionnelle Infinie ») dont on détermine les coefficients  $y_t(s)$  selon les énergies. La transformée en Z de la fonction de transfert  $Y/X$  d'un tel filtre permet d'après ledit terme à droite de l'égalité d'écrire :

$$X(z, s) = Y(z, s)[1 - (\alpha z + (1 - \alpha)zB(z, s))] , \quad (\text{A.7})$$

soit

$$X(z, s) = Y(z, s)1 - \alpha z Y(z, s) + (1 - \alpha)zB(z, s)Y(z, s) , \quad (\text{A.8})$$

En calculant la transformée en Z inverse de la formule (A.8) selon uniquement les durées  $z$ , on obtient :

$$x_t(s) = y_t(s) - \alpha y_{t-1}(s) - ((1 - \alpha)b(s) * y(s))_{t-1} \quad (\text{A.9})$$

$$\text{soit } y_t(s) = \alpha y_{t-1}(s) + ((1 - \alpha)b(s) * y(s))_{t-1} + x_t(s) \quad (\text{A.10})$$

$$\text{avec } b_t(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e \geq 1} b_{t,e} s^e . \quad (\text{A.11})$$

On notera ici que le signe  $*$  désigne l'opérateur de convolution.

D'après la formule (A.10), on peut déterminer récursivement les coefficients  $y_t(s)$  pour une énergie  $s$  donnée. A cet effet, étant donné que l'on s'intéresse à la réponse impulsionnelle dudit filtre,  $x_t(s)$  est un Dirac bidimensionnel, les coefficients  $b_t(s)$  dans la formule (A.11) sont connus à partir des données relatives à l'histogramme des impulsions principales et le paramètre  $\alpha$  est connu de la formule (A.4).

Un schéma bloc d'un algorithme pouvant être implémenté dans un dispositif tel que mentionné plus haut et basé principalement sur la formule (A.10) est illustré sur la Figure A.14. Une première étape 200 consiste à initialiser certaines variables dont  $x_t(s)$ , qui représente l'entrée du filtre et qui prend les valeurs de la transformée en Z selon les énergies d'un Dirac bidimensionnel. Par ailleurs, la durée  $t$  est initialisée à 1. Dans l'étape 201, on initialise la sortie  $y_t(s)$  du filtre. Plus précisément, on fixe une première durée ( $t = 0$ ) et on initialise à 1 toutes les valeurs relatives aux énergies de la variable  $y_0(s)$ . A ce stade, on peut commencer à calculer  $y_t(s)$  à partir de l'équation (A.10). Afin d'atteindre ce but, on met en oeuvre deux boucles imbriquées sur les durées  $t$  et sur les énergies  $s$ . La première boucle sur les durées comprend les étapes 202, 203 et 204, et la deuxième boucle sur les énergies comprend les étapes 202 à 206. À l'étape 202, la formule (A.10) est déterminée pour une énergie  $s$  donnée. Par exemple, au premier passage dans cette étape 202, c'est  $y_1(s=0)$  qui est calculée, puis, après une première itération dans la boucle des durées  $t$ , c'est  $y_2(0)$  qui est déterminée. Ainsi, grâce à cette première boucle on calcule l'ensemble des valeurs  $y_t(0)$ . L'étape 203 est un test qui permet de déterminer si la boucle sur les durées doit continuer. Ce test consiste à comparer la variable des durées  $t$  à un nombre de canaux en durée maximale prédéfinie (noté NB\_D). Si le test est positif, l'étape 204 est alors mise en oeuvre pour incrémenter la variable des durées  $t$ . Le cas échéant, l'algorithme sort de ladite première boucle, et teste, à l'étape 205, si la deuxième boucle doit continuer. On compare donc, dans cette étape 205, la variable  $s$  à un nombre de canaux en énergie maximale prédéfinie ( $NB_E$ ). Si le test est positif, l'algorithme passe à l'étape 206 où l'énergie  $s$  est incrémentée et où la variable des durées  $t$  est initialisée comme à l'étape 200, à la valeur 1. Ensuite, l'algorithme se retrouve de nouveau à l'étape 202 et l'ensemble des valeurs  $y_t(1)$  va maintenant être déterminé. A titre d'exemple, le premier coefficient calculé est  $y_1(1)$ , puis, après la première incrémentation de  $t$ , l'étape 202 calcule  $y_2(1)$ , etc... L'algorithme se termine finalement à l'étape 207 lorsqu'on sort de la deuxième boucle sur les énergies.

On dispose finalement d'une matrice sur les durées et les énergies dont les éléments sont les coefficients recherchés  $y_t(s)$  de la réponse impulsionnelle du filtre RII, ou en d'autres termes les coefficients recherchés de ladite série entière dans la formule (A.6).

### A.4.2 Deuxième étape : Identification des coefficients

Une deuxième étape consiste maintenant à identifier les coefficients ainsi déterminés avec les coefficients de la série entière à gauche de l'égalité dans la formule de désempilement (A.1). D'après (A.1) et (A.6), on peut écrire :

$$\alpha^{t-K_t(s)} = y_t(s) . \quad (\text{A.12})$$

En remplaçant l'activité  $\alpha$  par (A.4), on obtient :

$$y_t(s) = e^{-\lambda t} \exp(\lambda K_t(s)) . \quad (\text{A.13})$$

On développe maintenant en série entière l'exponentielle contenant le terme

$$y_t(s) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda K_t(s))^n}{n!} , \quad (\text{A.14})$$

puis, afin de rendre possible l'implémentation d'une telle formule dans le dispositif choisi, on effectue une troncature de la série entière :

$$y_t(s) \approx e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{MAX\_C} \frac{(\lambda K_t(s))^n}{n!} , \quad (\text{A.15})$$

Finalement, en appliquant la transformée en Z inverse selon les énergies au second terme de l'égalité (A.15), on aboutit à la formule suivante :

$$y_{t,e} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{MAX\_C} \frac{(\lambda)^n}{n!} (k_{t,e})^{(2)*n} , \quad (\text{A.16})$$

où  $k_{t,e}$  est la transformée en Z inverse de  $K_t(s)$  selon les énergies  $s$ . On notera ici, que la notation  $(2)*n$  utilisée dans la formule (A.16) désigne la convolution  $n$ -ième selon les énergies  $e$ .

Connaissant  $y_{t,e}$ , les coefficients  $k_{t,e}$  sont déterminés à partir de la formule (A.16), puis les coefficients  $h_{t,e}$  sont déduits de la relation (A.3) en mettant en oeuvre une double différentiation, et, finalement, on effectue une somme sur les durées selon les énergies des coefficient  $h_{t,e}$  pour déterminer chaque énergie  $Y$  des impulsions élémentaires contenues dans le signal.

On propose maintenant un algorithme récursif qui permet d'implémenter cette deuxième étape d'identification dans le dispositif choisi. De nouveau, l'homme du métier reconnaîtra les nombreuses variantes possibles du mode de réalisation proposé ici. Les étapes principales dudit algorithme sont données à titre illustratif sur la Figure A.15. On rappelle ici que ces étapes font intervenir des calculs basés essentiellement sur les formules (A.16) et (A.3).

Dans la première étape 210, on détermine l'expression mathématique  $y_{t,e} \exp(\lambda t)$  pour commencer à déterminer la somme sur l'indice  $n$  dans le terme à droite de l'égalité (A.16). Par conséquent cette expression vient de la formule (A.16) lorsque l'on fait passer l'exponentielle à gauche de l'égalité. La flèche représentée à l'étape 210 sur la Figure A.15 désigne une opération d'assignation de valeur à une variable, en l'occurrence  $y_{t,e}$  dans le cas présent. Ensuite, l'étape 211 consiste à initialiser le terme  $k_{t,e}^{(2)*n}$  contenu dans la formule (A.16). Les valeurs de ce terme sont stockées dans une variable notée  $g_t(e)$  sur la Figure A.15. On notera que  $g_t(e)$  est la variable qui stocke les convolutions  $n$ -ièmes selon les énergies des coefficients  $k_{t,e}$ . D'autres variables telles que l'énergie, la durée, le nombre de canaux maximal en durée  $NB\_D$  et le nombre de canaux maximal en énergie  $NB\_E$  sont initialisées. Suivent ensuite deux boucles imbriquées à partir de l'étape 212. Une première boucle sur les énergies comprend les étapes 212, 213 et 214. Elle permet de déterminer les convolutions  $n$ -ièmes ou encore des coefficients  $k_{t,e}$  pour une durée  $t$  donnée. La seconde boucle comprend les étapes 212 à 221. Elle porte sur les durées  $t$  et elle permet de calculer les coefficients  $k_{t,e}$  selon les durées.

Nous allons maintenant décrire plus précisément chacune de ces deux boucles. Comme évoqué plus haut, la première boucle sur les énergies commence à l'étape 212. Dans cette étape, on calcule la convolution de  $y_t(e)$  selon les énergies avec  $g_{t-1}(e)$  et on stocke cette valeur dans  $g_t(e)$ . Un test sur l'indice des énergies est alors effectué à l'étape 213 pour détecter une sortie éventuelle de cette première boucle sur les énergies. Tant que l'énergie en cours est inférieure à  $NB_E$ , on incrémente cette énergie à l'étape 214 et on recommence à l'étape 212. Une fois que les convolutions  $n$ -ièmes sont déterminées selon les énergies pour la durée  $t$  en cours, on passe à l'étape 215 qui calcule puis stocke dans une variable, notée  $temp$ , une partie de la somme présente à droite de l'égalité dans la formule (A.16). Plus précisément la variable  $temp$  prend les valeurs suivantes :

$$temp = \sum_{k=1}^{MAX\_C} \lambda^{k+1} g_t(e), \quad (\text{A.17})$$

avec  $t$  la durée en cours dans la deuxième boucle et  $MAX\_C$  indice de troncature du développement en série entière de l'exponentielle. Cette variable  $temp$  est ensuite utilisée à l'étape 216 pour calculer l'ensemble des coefficients  $k_{t,e}$  suivant les énergies et pour la durée  $t$  en cours. Le calcul desdits coefficients  $k_{t,e}$  est le suivant :

$$k_{t,e} = (y_{t,e} - temp)/\lambda. \quad (\text{A.18})$$

Ils sont donc calculés en effectuant la différence entre ladite somme de la formule (A.16) et ladite partie de la somme de la même formule. Ceci revient à calculer l'expression suivante :

$$k_{t,e} = \frac{1}{\lambda} \left( \sum_{n=1}^{MAX\_C} \frac{\lambda^n}{n!} (k_{t,\cdot})_e^{(2)*n} - \sum_{n=1}^{MAX\_C} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} (k_{t,\cdot})_e^{(2)*n+1} \right). \quad (\text{A.19})$$

Une fois les coefficients  $k_{t,e}$  suivant les énergies et pour une durée  $t$  donnée déterminés, on effectue un test de contrainte de positivité à l'étape 217 afin de garantir que la valeur obtenue est cohérente avec une densité de probabilité. Le test consiste à déterminer si les inéquations suivantes sont vérifiées ou non :

$$k_{t,e} - 2k_{t-1,e} + k_{t-2,e} > 0 \text{ et } t > 1 \quad (\text{A.20})$$

On détermine si à la durée précédente  $t - 1$  la double dérivée numérique est positive. Dans le cas négatif, l'algorithme passe à l'étape 219 qui fixe les coefficients  $h_{t,e}$  correspondant à la valeur nulle. Puis, à l'étape 218, on stocke dans la variable  $g_t(e)$  ces coefficients  $k_{t,e}$  déterminés. En revanche, si le test 217 est positif, l'étape 219 est évitée et on passe directement à l'étape 218. A l'étape 220, le test de la deuxième boucle sur les durées détermine si les calculs selon les durées des coefficients  $k_{t,e}$  (ou  $g_t(e)$ ) sont terminés. Dans la négative, on passe à l'étape 221 où la durée est incrémentée et l'indice des énergies est réinitialisé à la valeur nulle. On recommence ensuite au début de l'étape 212 avec cette nouvelle durée. Au contraire, si les calculs sont terminés, on sort de la deuxième boucle sur les durées. En effet, les coefficients  $k_{t,e}$  suivant les énergies et les durées sont maintenant déterminés.

Comme évoqué plus haut, on déduit maintenant les coefficients  $h_{t,e}$  à partir de la relation (A.3). Cette opération de double dérivation est implémentée à l'étape 222. À la fin de cette étape, on dispose de l'ensemble des coefficients  $h_{t,e}$  représentatifs de la densité de probabilité des couples durée/énergie des impulsions élémentaires contenues dans le signal traité. Une dernière étape 223 détermine les énergies des impulsions élémentaires et les stocke dans une variable  $m$  en fonction des énergies. Afin d'atteindre un tel but, les coefficients  $h_{t,e}$  sont additionnés suivant les durées, et ce pour chaque énergie. On notera que cette étape correspond au calcul de ladite probabilité marginale suivant les énergies de la densité de probabilité discrète des couples durée/énergie des impulsions élémentaires. Les énergies des impulsions élémentaires stockées en mémoire sont finalement fournies à un utilisateur à l'aide d'un moyen de visualisation afin que celui-ci identifie les radionucléides présents et établisse un diagnostic (une imprimante, un écran ou tout autre dispositif dont la fonction est équivalente). L'homme du métier trouvera ici un certain nombre de variantes évidentes. À titre d'exemple, les informations fournies par le procédé peuvent être relatives à des étapes intermédiaires (représentation graphique

des histogrammes des couples Durée-Energie d'impulsions principales ou d'impulsions élémentaires, etc...).

On présente maintenant quelques résultats, non limitatifs, obtenus par mise en oeuvre du procédé selon l'invention à l'aide des algorithmes présentés ci-dessus. La Figure A.16 représente un spectre 49 en énergie gamma observé pour le Cesium 137. Le dispositif de spectrométrie est tel que des empilements se produisent. En outre ce dispositif n'utilise pas encore le procédé de désempliment selon l'invention. On peut constater que ce spectre contient une raie fondamentale 50 à une énergie  $E_3$ , ainsi qu'une seconde raie 51 à une énergie  $E_4$  correspondant à un empilement de deux photons d'énergie  $E_3$ . La Figure A.17 montre un spectre 52 de la même source gamma (le Césium 137) lorsque le procédé selon l'invention est utilisé dans ledit dispositif. La raie 51 d'énergie  $E_4$  a disparu ; seule celle correspondant à l'énergie  $E_3$  demeure dans le spectre de sorte que ce dernier est rendu conforme à celui du césium 137. En outre, on peut remarquer sur la Figure A.17 que le plafond de bruit 53 est fortement réduit par rapport à celui observé sur la Figure A.16. A titre d'information ce plafond était notamment dû à une combinaison d'empilements et d'effets Compton. Les résultats obtenus sont donc très satisfaisants. Ils révèlent l'efficacité du procédé de mesure selon l'invention ainsi que sa faisabilité industrielle par implémentation des algorithmes proposés dans des dispositifs électroniques appropriés.

Plus généralement, la présente invention offre par ailleurs de nombreux avantages :

- une meilleure identification des énergies émises, et de leur occurrence,
- à la différence des méthodes de filtrage par élimination évoqué dans l'introduction, une prise en compte de tout le signal mesuré, sans éliminer de partie utile de ce signal,
- aucune nécessité d'hypothèse sur la forme des impulsions,
- une bonne fiabilité du procédé indépendamment de l'activité de la source, que celle-ci soit faible ou élevée (cependant une condition nécessaire au bon fonctionnement du procédé est qu'il ne doit pas y avoir d'empilement permanent des impulsions élémentaires),
- possibilité d'appliquer directement le procédé au signal mesuré ou bien de le mettre en oeuvre à posteriori,
- utilisation de très peu d'approximations ce qui rend le procédé plus juste numériquement que les méthodes de l'art antérieur.

Bien entendu, la présente invention ne se limite nullement à la forme de réalisation décrite ci-dessus et représentée sur les dessins. En particulier, la présente invention peut être mise en oeuvre dans d'autres domaines de spectrométrie (par exemple, la spectrométrie alpha, neutronique, et plus généralement tout pour tout type de corpuscule) et sur différents types de détecteurs, notamment des détecteurs de taille et de forme différentes. Et plus généralement, elle peut servir aux applications dans lesquelles on recherche une contribution de signaux élémentaires contenus, par empilement, dans un signal principal, chaque signal pouvant être représentatif d'un flux au sens général du terme. De manière non limitative, il peut s'agir d'un flux de photons, d'éléments fluorescents ou encore d'éléments dans une file d'attente dans un système de communication, etc... Par exemple dans le cas des files d'attente on peut, par équivalence au mode de réalisation décrit dans la présente invention, associer à la variable des durées  $X'$  une durée de connexion et à la variable des énergies  $Y'$  une bande passante.

Par ailleurs, il n'est nullement obligatoire qu'une énergie  $Y'$  soit évaluée par l'estimation de la surface sous une impulsion. Dans le cas du mode de réalisation décrit dans la présente invention, une détermination par la surface convient parfaitement, puisqu'une relation simple relie cette surface à l'énergie d'un photon gamma. Cependant, tel n'est pas nécessairement le cas dans des applications différentes, et l'homme du métier comprendra, ici, qu'un des concepts de la présente invention repose, de manière très générale, sur l'utilisation d'une énergie pour représenter un poids d'une impulsion élémentaire dans une impulsion principale. La méthode d'estimation de ce poids peut donc s'avérer très différente selon l'application. À titre d'exemple non limitatif, un poids pourrait correspondre à une amplitude d'une impulsion élémentaire, une durée spécifique, etc. On rappelle ici, que seules les contraintes suivantes doivent être respectées pour appliquer le procédé selon l'invention :

- les instants d'apparition des impulsions élémentaires suivent un processus de Poisson homogène,
- les impulsions principales ont une durée déterminée  $X$ ,

- les variables  $Y$  représentant les énergies des impulsions élémentaires ont des propriétés additives.

## A.5 Revendications du brevet

1. Procédé de mesure comprenant le traitement d'un signal 11 comportant une succession d'impulsions principales 17 de durée  $X'$  et d'énergie  $Y'$  espacées temporellement les unes des autres et pouvant être constituées chacune d'un empilement d'impulsions élémentaires 15 de durée  $X$  et dont l'énergie est évaluée par une variable  $Y$  possédant une propriété d'additivité, lesdites impulsions élémentaires 15 ayant des instants d'apparition  $T_i$  qui suivent un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ , caractérisé en ce qu'il comporte les étapes consistant à :
  - numériser ledit signal afin de disposer de données 24 représentatives de celui-ci, à partir de ces données 24 :
  - mesurer la durée  $X'$  et l'énergie  $Y'$  de chaque impulsion principale 17 afin de construire des couples Durée-Energie  $(X', Y')$ ,
  - déterminer les couples d'énergie  $(X, Y)$  des impulsions élémentaires 15 à partir des couples  $(X', Y')$  construits,
  - déduire des couples  $(X, Y)$  déterminés, l'énergie  $Y$  de chaque impulsion élémentaire 15.
2. Procédé selon la revendication 1, caractérisé en ce que l'étape de détermination des couples Durée-Energie  $(X, Y)$  est mise en oeuvre en résolvant une formule de désempilement reliant une fonction des couples Durée-Energie  $(X', Y')$  des impulsions principales à une fonction des couples Durée-Energie  $(X, Y)$  des impulsions élémentaires.
3. Procédé selon la revendication 2, caractérisé en ce que ladite formule relie une loi de probabilité discrète des couples Durée-Energie  $(X', Y')$  des impulsions principales à une loi de probabilité discrète des couples Durée-Energie  $(X, Y)$  des impulsions élémentaires.
4. Procédé selon la revendication 3, caractérisé en ce que dans l'étape de détermination des couples Durée-Energie  $(X, Y)$ , la loi de probabilité discrète des couples Durée-Energie  $(X, Y)$  est estimée à l'aide des couples Durée-Energie  $(X', Y')$  construits et d'un nombre d'occurrence associé à chaque dit couple  $(X', Y')$ , lesdites occurrences ayant été préalablement déterminée à partir desdites mesures.
5. Procédé selon l'une des revendications 2 à 4, caractérisé en ce que ladite formule est en outre dépendante de l'intensité  $\lambda$  du processus de Poisson.
6. Procédé selon l'une des revendications 2 à 5, caractérisé en ce que ladite formule de désempilement est de la forme :

$$\sum_{t=0}^{\infty} z^t \left( \alpha^{t-K_t(s)} \right) = \frac{1}{1 - (\alpha z + (1 - \alpha)zB(z, s))},$$

où les variables  $z$  et  $s$  représentent des transformées en  $Z$  des durées et des énergies,  $t$  une durée,  $B(z,s)$  la transformée en  $Z$  de la densité de probabilité  $b_{t,e}$ ,  $b_{t,e}$  représentant la probabilité que la durée d'une impulsion principale soit égale à une valeur  $t$  et que son énergie soit égale à une valeur  $e$ ,  $K_t(s)$  la transformée en  $Z$  d'une fonction dépendante de la densité de probabilité  $h_{t,e}$ ,  $h_{t,e}$  représentant la probabilité que la durée d'une impulsion élémentaire soit égale à une valeur  $t$  et que son énergie soit égale à une valeur  $e$ , et  $\alpha$  un paramètre dépendant de l'activité de la source analysée.

7. Procédé selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce que l'on détermine l'intensité  $\lambda$  du processus de Poisson en mesurant les durées de séparation des impulsions principales 17.
8. Procédé selon l'une des revendications 6 à 7, caractérisé en ce qu'on détermine le paramètre  $\alpha$  en utilisant la formule suivante :

$$\alpha = \exp(-\lambda T_e),$$

où  $T_e$  est une période d'échantillonnage associée à l'étape de numérisation.

9. Procédé selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce que l'étape de déduction de l'énergie  $Y$  de chaque impulsion élémentaire 15 comprend une étape de détermination d'une loi de probabilité discrète de ces énergies.
10. Procédé selon la revendication précédente, caractérisé en ce que la loi de probabilité discrète des énergies est une loi de probabilité marginale, suivant les énergies, de la loi de probabilité discrète des couples Durée-Energie  $(X, Y)$ .
11. Procédé selon l'une des revendications 6 à 10, caractérisé en outre en ce qu'on développe en série entière suivant les durées la fraction à droite de l'égalité dans ladite formule de désempilement pour déterminer les coefficients de cette série.
12. Procédé selon la revendication 11, caractérisé en ce que les coefficients de ladite série entière sont identifiés aux coefficients contenus dans le terme à gauche de l'égalité dans ladite formule de désempilement, pour déterminer ladite densité de probabilité  $h_{t,e}$  relative aux couples Durée-Energie  $(X, Y)$  des impulsions élémentaires 15.
13. Procédé selon l'une des revendications 11 à 12, caractérisé en ce que ladite détermination des coefficients de la série entière et ladite étape d'identification des coefficients comportent, chacune, au moins un calcul de convolution discrète.
14. Procédé selon l'une des revendications 12 à 13, caractérisé en ce que ladite étape d'identification des coefficients comprend en outre un test de contrainte de positivité (217).
15. Procédé selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce que les impulsions principales sont représentatives de flux principaux pouvant contenir chacun un empilement de flux élémentaires, chaque flux élémentaire étant représenté par une impulsion élémentaire.
16. Procédé selon la revendication 15, caractérisé en ce que les flux sont des flux de photons 3.
17. Procédé selon la revendication 16, caractérisé en ce que les photons 3 sont des photons gamma.
18. Procédé selon l'une des revendications 16 à 17, caractérisé en ce qu'une énergie de chaque flux de photons 3 est estimée par l'énergie de l'impulsion correspondante, et en ce que l'énergie de chaque impulsion est estimée en fonction de la surface 13 sous chaque impulsion correspondante.
19. Procédé selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce qu'il comprend une étape initiale de mesure dudit signal comportant une succession d'impulsions principales représentatives de phénomènes physiques.
20. Procédé selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce qu'il comprend au moins une étape consistant à fournir à un utilisateur une information relative audit signal.
21. Procédé selon la revendication précédente, caractérisé en ce ladite information concerne les flux élémentaires.
22. Procédé selon la revendication 21, caractérisé en ce ladite information concerne l'énergie  $Y$  des impulsions élémentaires représentatives des flux élémentaires.
23. Dispositif d'analyse d'un signal 11 comportant une succession d'impulsions principales 17 de durée  $X'$  et d'énergie  $Y'$  espacées temporellement les unes des autres et pouvant être constituées d'un empilement d'impulsions élémentaires 15 de durée  $X$  et d'énergie  $Y$ , lesdites impulsions élémentaires 15 ayant des instants d'apparition  $T_i$  qui suivent un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ , caractérisé en ce que ledit dispositif comporte des moyens aptes à mettre en oeuvre le procédé selon l'une des revendications précédentes.

## A.6 Références bibliographiques

- [1] G.F. Knoll : Radiation Detection and Measurement. Wiley, 2nd ed., 1989,
- [2] Brevet Xia : US5.873.054,
- [3] Brevet Xia US5.774.522 ,
- [4] Brevet Xia US5.684.850 ,

- [5] Brevet Camberra/Eurisys : US5.337.603,
- [6] Brevet Camberra/Eurisys : US5.206.174,
- [7] Brevet US 5.884.234,
- [8] Brevet US 5.067.090,
- [9] Brevet US 5.349.193,
- [10] Brevet US 5.821.538.

### A.7 Figures

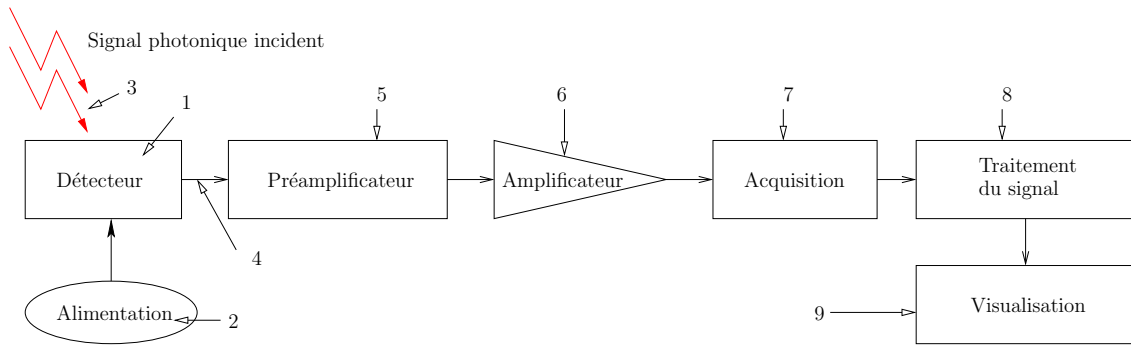


FIG. A.1 – Dispositif instrumental schématisé.

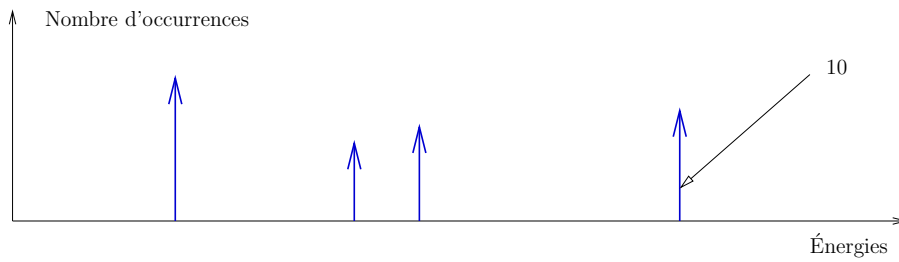


FIG. A.2 – Schéma d'un spectre de raies d'une source gamma.

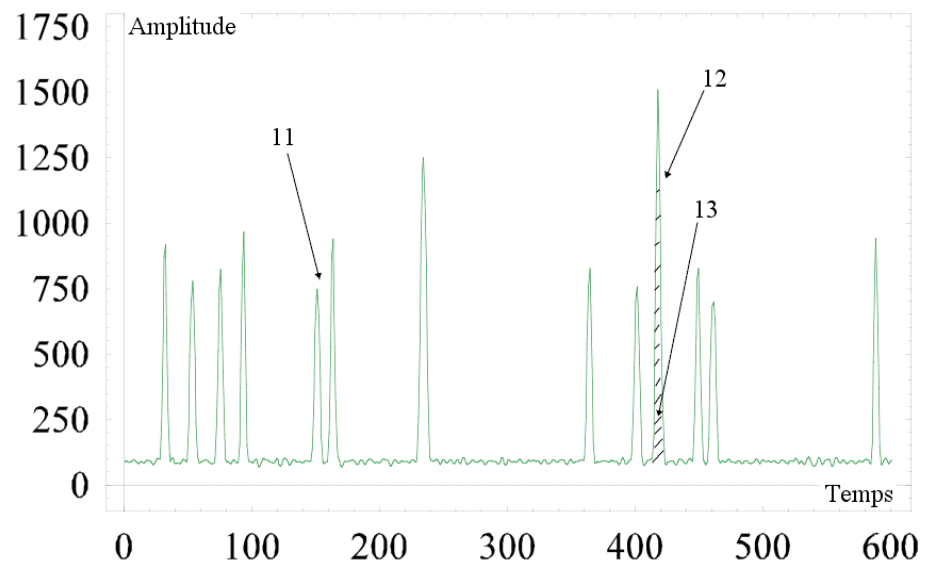


FIG. A.3 – Signal temporel généré par un détecteur de photon gamma.

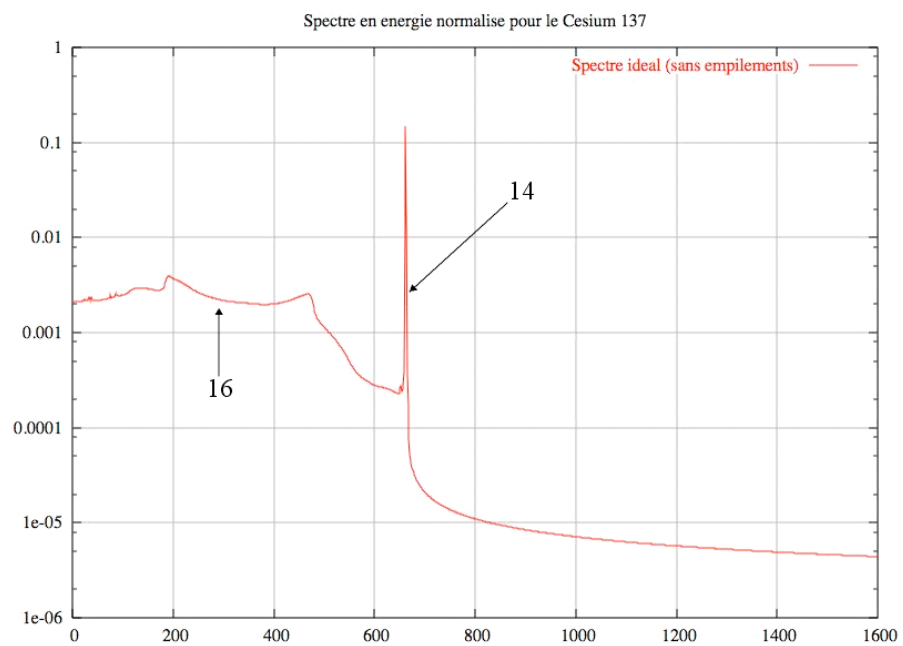


FIG. A.4 – Spectre de Césium 137.

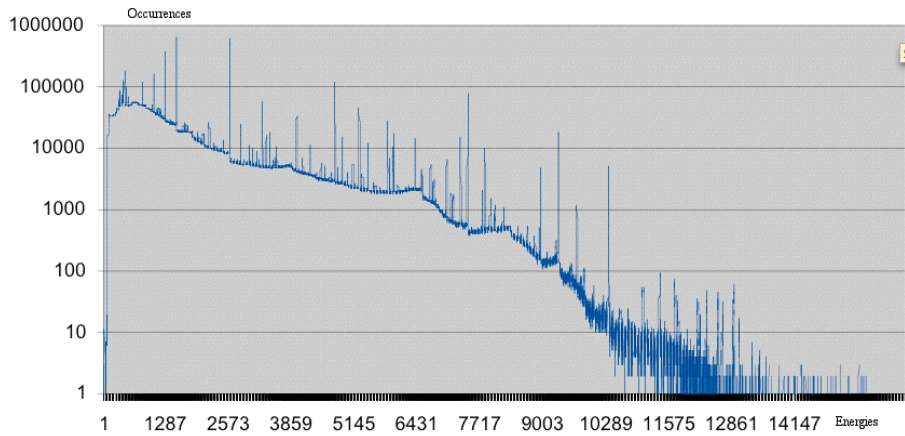


FIG. A.5 – Spectre en énergie de Césium et de Pechblende.

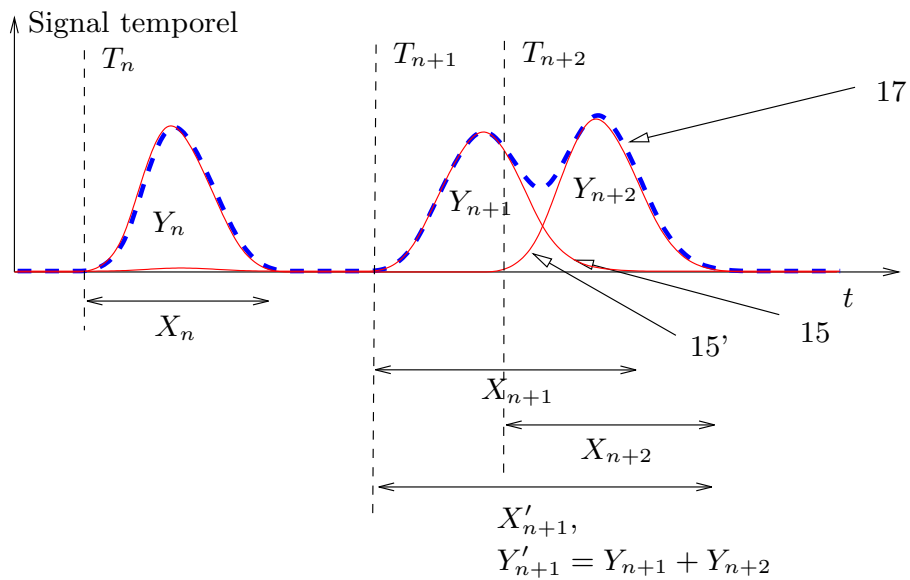


FIG. A.6 – Signal temporel issu d'un détecteur lent lorsqu'un phénomène d'empilement a lieu.

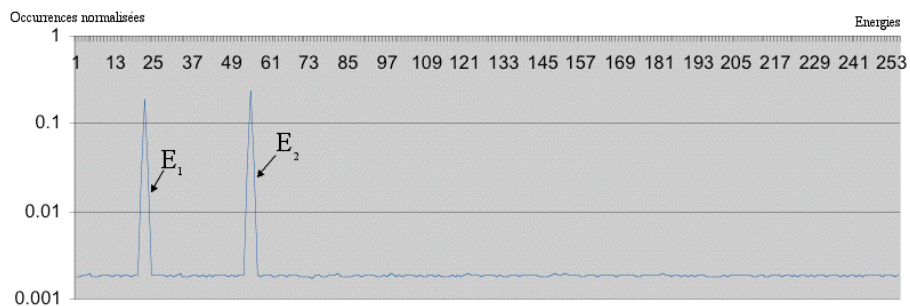


FIG. A.7 – Spectre en énergie simulé.

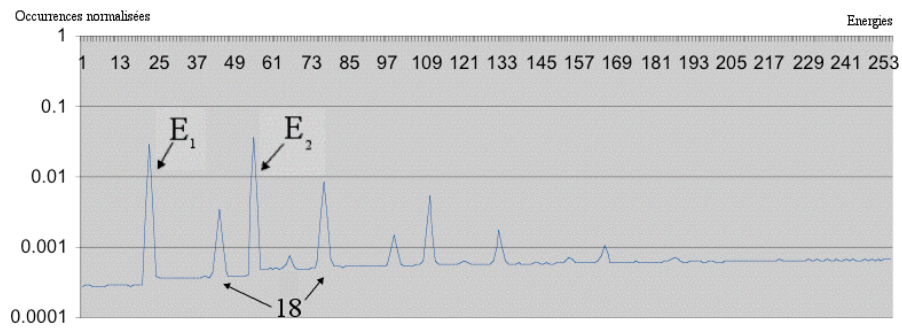


FIG. A.8 – Spectre en énergie simulé avec empilements.

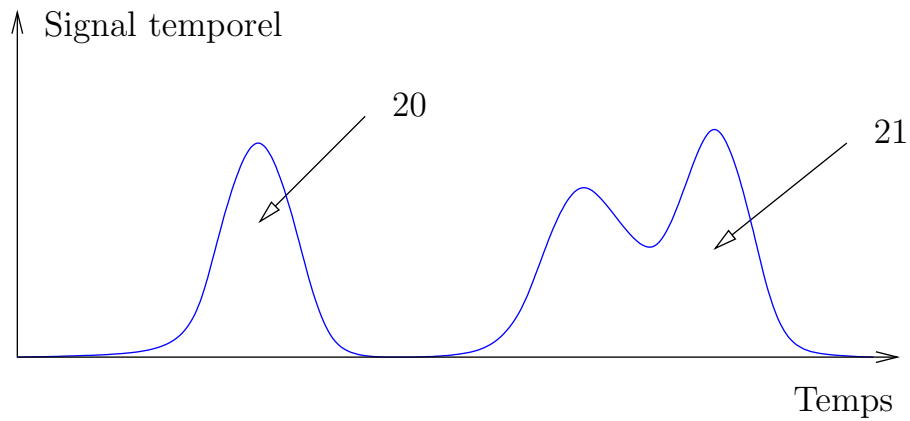


FIG. A.9 – Portion de signal avec deux impulsions principales.

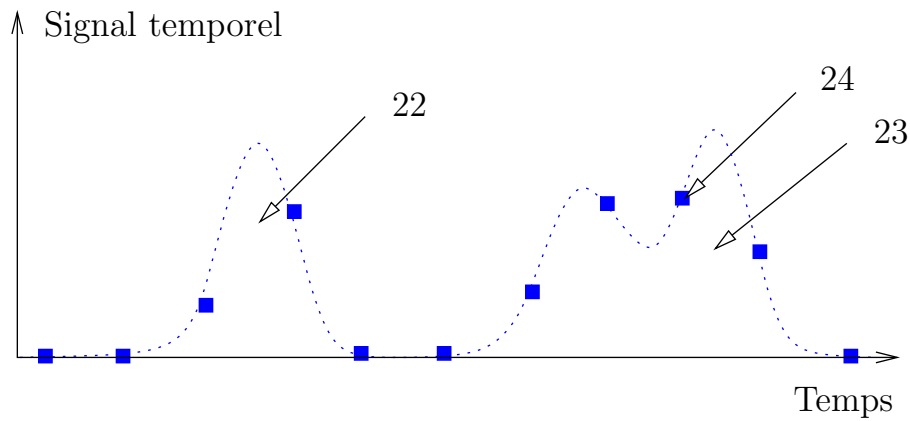


FIG. A.10 – Signal échantillonné et quantifié.

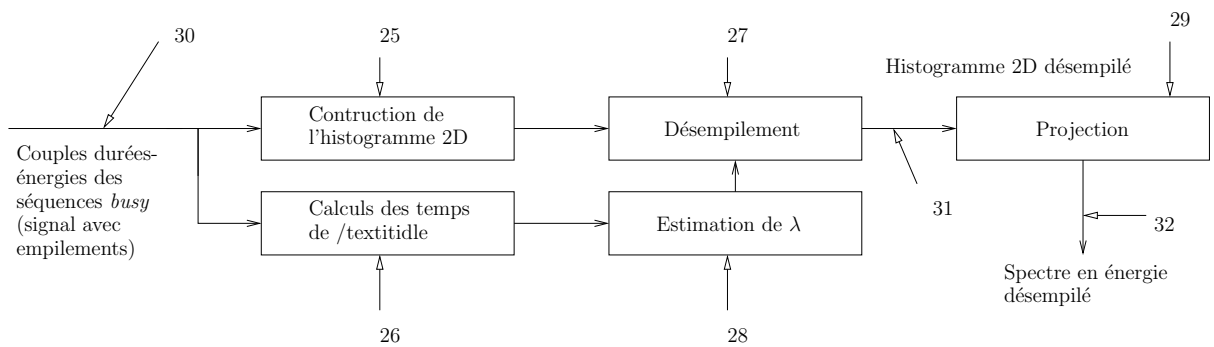


FIG. A.11 – Schéma-bloc de l'invention complète.

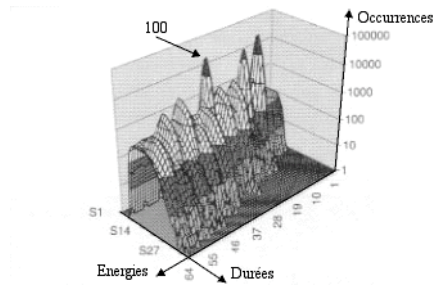


FIG. A.12 – Histogramme bidimensionnel non traité.

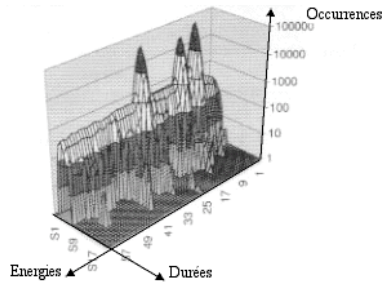


FIG. A.13 – Histogramme bidimensionnel corrigé.

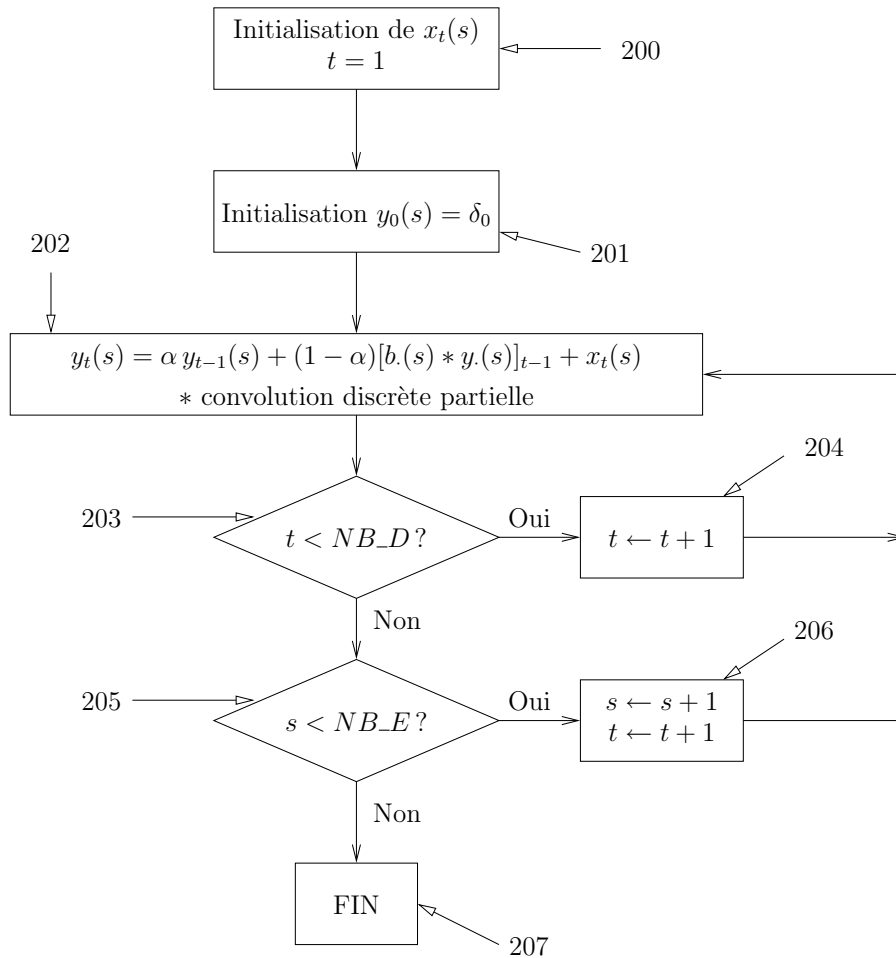


FIG. A.14 – Schéma-bloc de la première partie de l’algorithme.

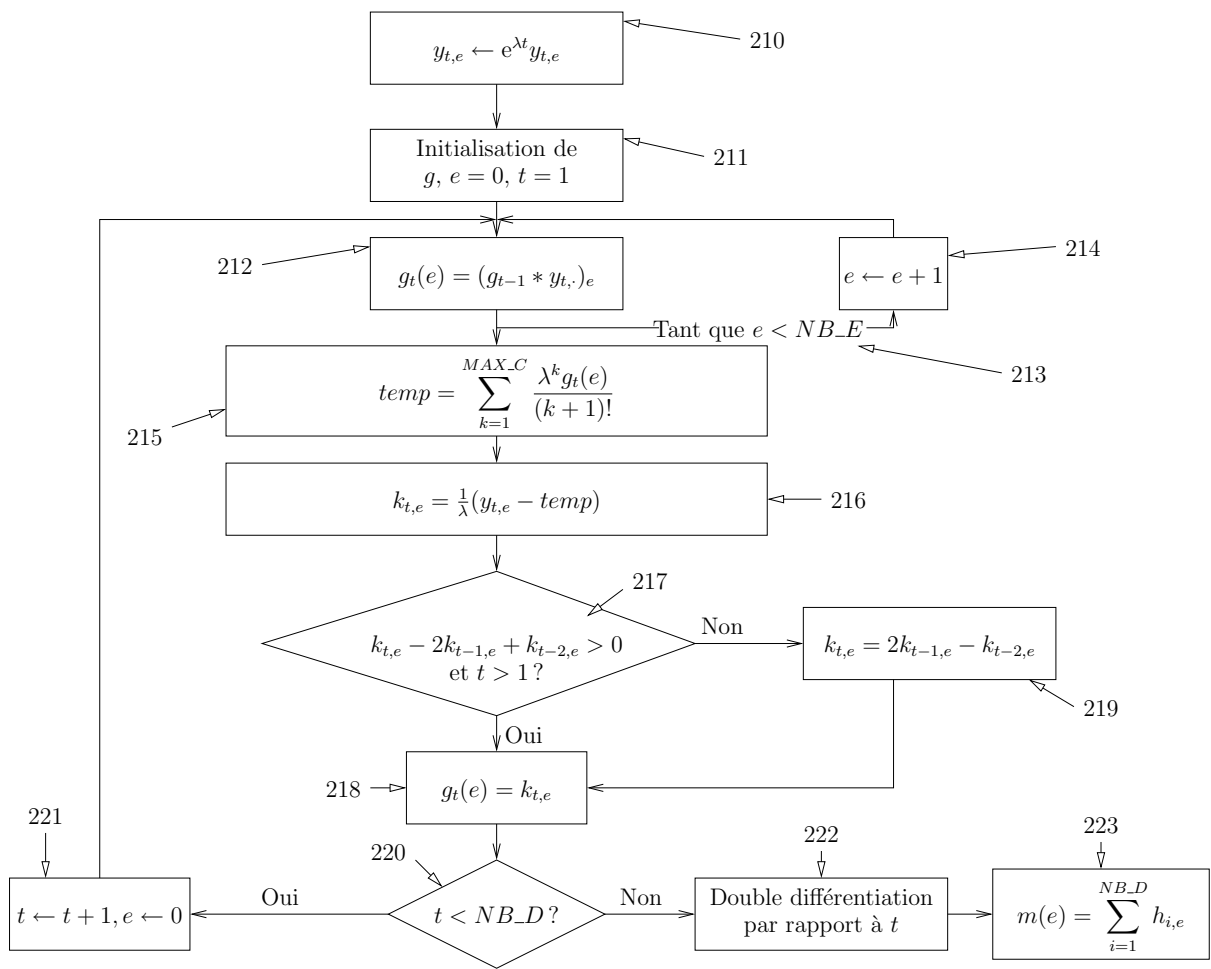


FIG. A.15 – Schéma-bloc de la deuxième partie de l’algorithme.

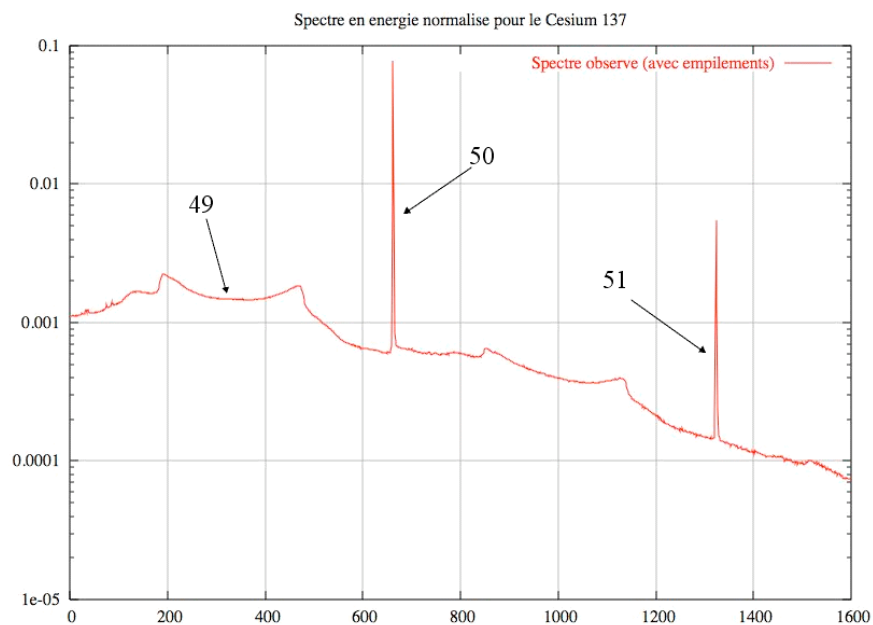


FIG. A.16 – Spectre en énergie observé.

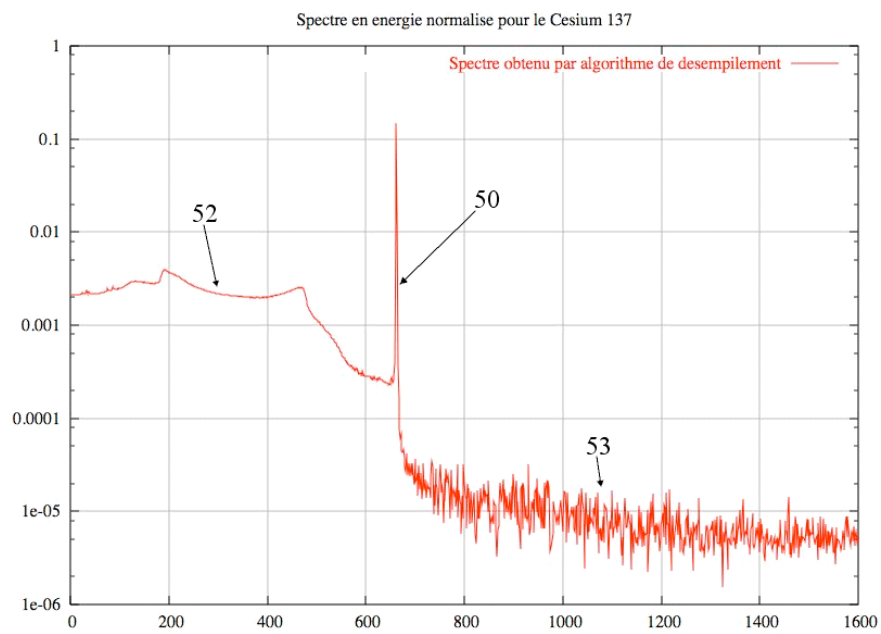


FIG. A.17 – Spectre en énergie corrigé.

## Annexe B

# Méthodes numériques d'inversion de la transformée de Laplace

### Sommaire de l'annexe

---

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>B.1</b> | <b>Transformée de Laplace de mesures positives et de fonctions</b>          | <b>119</b> |
| <b>B.2</b> | <b>Propriétés usuelles de la transformée de Laplace</b>                     | <b>120</b> |
| B.2.1      | Propriétés de linéarité   | 120        |
| B.2.2      | Propriétés d'échelle et de translation                                      | 121        |
| B.2.3      | Dérivabilité, intégrabilité et convolution                                  | 121        |
| B.2.4      | Théorème taubérien  | 122        |
| <b>B.3</b> | <b>Inversion théorique de la transformée de Laplace</b>                     | <b>123</b> |
| B.3.1      | Inversion théorique de la transformée de Laplace d'une mesure               | 123        |
| B.3.2      | Inversion théorique de la transformée de Laplace d'une fonction             | 124        |
| <b>B.4</b> | <b>Méthodes usuelles d'inversion numérique de la transformée de Laplace</b> | <b>125</b> |
| <b>B.5</b> | <b>Inversion numérique par FFT</b>  | <b>125</b> |
| B.5.1      | Description de la méthode   | 125        |
| B.5.2      | Implémentation pratique de la méthode de Fourier                            | 126        |

---

Cette annexe présente quelques rappels sur la transformée de Laplace monolatère de fonctions et les méthodes d'inversion numérique associées, afin de justifier le choix de nos algorithmes. La transformée de Laplace peut être considérée comme un opérateur agissant sur un ensemble de mesures et étendue aux cas de fonctions. Nous donnons dans cette partie ces deux définitions, ainsi que quelques transformées usuelles. Dans toute la suite, nous ne considérerons que la transformée de Laplace monolatère, c'est-à-dire opérant sur des fonctions à support dans  $\mathbb{R}_+$ .

## B.1 Transformée de Laplace de mesures positives et de fonctions

Nous donnons ici la définition de la transformée de Laplace dans le cas de mesures positives sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Définition B.1.1 (Transformée de Laplace d'une mesure positive).** Soit  $\mu$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}_+$ . L'ensemble  $I$  des complexes  $s$  tels que

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-sx} \mu(dx) \right| < +\infty$$

est soit vide, soit un demi-plan de la forme  $\{\operatorname{Re}(z) > a\}$ . Lorsque cet ensemble n'est pas vide, la transformée de Laplace de  $\mu$  est la fonction  $\mathcal{L}\mu$  définie sur  $I$  par :

$$\mathcal{L}\mu(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-sx} \mu(dx)$$

et le nombre  $a$  est l'**abscisse de convergence absolue** de la transformée de Laplace de  $\mu$ .

Le théorème d'injectivité permet d'identifier une fonction et sa transformée, ce qui est à la base des procédures d'inversion.

**Théorème B.1.1 (Théorème d'injectivité).** *Deux mesures positives sur  $\mathbb{R}_+$  dont les transformées de Laplace coïncident sur un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$  sont égales presque partout.*

*Indications de preuve :* La démonstration de ce théorème B.1.1 peut être trouvée dans [Feller, 1966, Chapitre 13] et repose sur le théorème de prolongement analytique, qui dit que deux fonctions holomorphes qui sont égales sur un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$  sont presque partout égales. On pourra se référer à [Rudin, 1987] pour plus de détails sur ce théorème puissant d'analyse complexe.  $\square$

En suivant ce qui a été fait pour les mesures, il est naturel de définir la transformée de Laplace d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  comme la différence des transformées de Laplace des mesures  $f^+(x) dx$  et  $f^-(x) dx$ . Nous introduisons ici l'espace des fonctions dont la transformée de Laplace est définie.

**Définition B.1.2.** *On dit que  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  est à croissance au plus exponentielle s'il existe un réel positif  $C$  et un réel  $a$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq Ce^{ax}$ . On note  $\mathcal{E}_a$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  à croissance au plus exponentielle de paramètre  $a$ , et l'on note :*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \mathcal{E}_a$$

*l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}_+$  à croissance au plus exponentielle.*

Il est alors immédiat, à l'aide des théorèmes usuels sur l'intégrabilité des fonctions, que toute fonction à croissance au plus exponentielle admet une transformée de Laplace sur un demi-plan. Ce demi-plan est alors défini en fonction de l'abscisse de convergence absolue.

## B.2 Propriétés usuelles de la transformée de Laplace

Nous donnons dans cette partie les propriétés principales de la transformée de Laplace. Les propriétés élémentaires sont similaires à celles de la transformée de Fourier ; les preuves de ces dernières peuvent être trouvées dans [Bayen and Margaria, 1988] ou [Lacroix, 2000].

### B.2.1 Propriétés de linéarité

En toute rigueur, la transformée de Laplace n'est pas un opérateur linéaire, car deux fonctions de  $\mathcal{E}$  peuvent avoir deux abscisses de convergence différentes. Nous pouvons toutefois faire cet abus de langage en nous basant sur les deux théorèmes ci-dessous.

**Proposition B.2.1 (Additivité).** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{E}$  d'abscisses de convergence absolues associées  $a$  et  $a'$ . Alors la transformée de Laplace de  $f + g$  est définie,  $a$  pour abscisse de convergence absolue  $\max(a, a')$  et :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > \max(a, a') \Rightarrow \mathcal{L}(f + g)(z) = \mathcal{L}f(z) + \mathcal{L}g(z).$$

**Proposition B.2.2 (Multiplication par un scalaire).** *Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{E}$  d'abscisse de convergence absolue associée  $a$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors la transformée de Laplace de  $\lambda f$  est définie,  $a$  pour abscisse de convergence absolue  $a$  et :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > a \Rightarrow \mathcal{L}(\lambda f)(z) = \lambda \mathcal{L}f(z).$$

*Eléments de preuve :* La démonstration des Propositions B.2.1 et B.2.2 est immédiate en revenant à la définition.  $\square$

Dans toute la suite, nous dirons que la transformée de Laplace est un opérateur linéaire.

### B.2.2 Propriétés d'échelle et de translation

Les propriétés ci-dessous sont utilisées pour le calcul effectif des transformées de Laplace. Leurs démonstrations se font également en revenant à la définition de cet opérateur.

**Proposition B.2.3 (Translation).** *Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{E}$  d'abscisse de convergence absolue associée  $a$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors, si l'on note  $H$  la fonction de Heaviside,  $g$  la fonction définie par  $g(t) = H(t - \lambda)f(t - \lambda)$  et  $h$  la fonction définie par  $h(t) = e^{-\lambda t}f(t)$ , on a :*

$$\mathcal{L}g(z) = e^{-\lambda z}\mathcal{L}f(z),$$

$$\mathcal{L}h(z) = \mathcal{L}f(z + \lambda).$$

**Proposition B.2.4.** *Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{E}$  d'abscisse de convergence absolue associée  $a$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors, si l'on note  $g$  la fonction définie par  $g(t) = f(\lambda t)$ , on a :*

$$\mathcal{L}g(z) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}f\left(\frac{z}{\lambda}\right).$$

La discussion concernant les abscisses de convergence des transformées de Laplace des fonctions translatées ou dilatées est faite dans [Doetsch, 1974].

### B.2.3 Dérivabilité, intégrabilité et convolution

Nous donnons dans ce paragraphe les théorèmes liant les opérateurs de dérivation et d'intégration à celui de la transformée de Laplace. Ces théorèmes peuvent se redémontrer en utilisant la définition et en intégrant par parties.

**Proposition B.2.5 (Dérivée de la transformée de Laplace).** *Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{E}$  d'abscisse de convergence absolue associée  $a$  et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors la fonction  $g$  définie par  $g(t) = (-t)^n f(t)$  admet une transformée de Laplace et l'on a :*

$$\mathcal{L}g(z) = (\mathcal{L}f)^{(n)}(z).$$

**Proposition B.2.6 (Transformée de Laplace de la dérivée).** *Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{E}$  continue et  $C^1$  par morceaux d'abscisse de convergence absolue associée  $a$ . Si  $f' \in \mathcal{E}$ , alors on a :*

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}f(z) - f(0^+).$$

**Proposition B.2.7 (Transformée de Laplace d'une primitive).** *Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{E}$ . On a :*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^\cdot f(x) dx\right)(z) = \frac{\mathcal{L}f(z)}{z}.$$

Nous rappelons également la transformation de l'opérateur de convolution  $*$  en opérateur de multiplication dans  $\mathbb{C}$ .

**Théorème B.2.1 (Convolution).** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{E}$ . Alors  $f * g \in \mathcal{E}$  et :*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f \times \mathcal{L}g.$$

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que si  $f(t) \stackrel{+\infty}{\asymp} O(e^{at})$  et si  $g(t) \stackrel{+\infty}{\asymp} O(e^{a't})$ , alors ces deux fonctions sont des  $O(e^{\max(a,a')t})$ . Posons  $b \stackrel{\text{def}}{=} \max(a, a')$ , alors :

$$\begin{aligned} |f * g(t)| &\leq \int_0^t |f(x)| \cdot |g(t-x)| dx \\ &\leq CC' \int_0^t e^{bx} e^{b(t-x)} dx \\ &= CC' t e^{bt} \\ &\leq CC' e^{(b+1)t} \end{aligned} \tag{B.1}$$

(B.1) montre donc que  $f * g \in \mathcal{E}$ .

Soit  $A > 0$ , et posons  $f_z(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t)e^{-st}$  et  $g_z(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(t)e^{-st}$ . On a successivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(z) &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^t f(x)g(t-x) dx \right) e^{-zt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^t f_z(x)g_z(t-x) dx \right) dt \\ &= \int_0^A \left( \int_0^t f_z(x)g_z(t-x) dx \right) dt + \int_A^{+\infty} \left( \int_0^t f_z(x)g_z(t-x) dx \right) dt \\ &= \int_0^A \left( \int_0^A f_z(x)g_z(t-x) dx \right) dt + \int_A^{+\infty} \left( \int_0^t f_z(x)g_z(t-x) dx \right) dt \end{aligned}$$

Posons  $I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^A \left( \int_0^A f_z(x)g_z(t-x) dx \right) dt$  et  $I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_A^{+\infty} \left( \int_0^t f_z(x)g_z(t-x) dx \right) dt$ ; nous avons :

$$|I_2| \leq C^2 \int_A^{+\infty} t e^{-bt} dt = C^2 \frac{1+bA}{b^2} e^{-bA} \quad (\text{B.2})$$

D'après (B.2),  $I_2$  converge donc vers 0 quand  $A$  tend vers l'infini. D'autre part :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^A f_z(t) \int_0^A g_z(x-t) dx dt \\ &= \int_0^A f_z(t) \int_0^{A-t} g_z(x) dx dt \\ &= \int_0^{A/2} f_z(t) \int_0^{A/2} g_z(x) dx dt + \int_0^{A/2} f_z(t) \int_{A/2}^{A-t} g_z(x) dx dt \\ &\quad + \int_{A/2}^A f_z(t) \int_0^{A-t} g_z(x) dx dt . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Quand  $A \rightarrow +\infty$ , la première intégrale de (B.3) converge vers  $\mathcal{L}f(z) \times \mathcal{L}g(z)$  et les deux autres sont majorées par  $C^2 \int_0^{+\infty} e^{-bt} dt \int_{A/2}^{+\infty} e^{-bx} dx = \frac{C^2 e^{-bA/2}}{b^2}$ , qui converge vers 0 quand  $A \rightarrow +\infty$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

### B.2.4 Théorème taubérien

Les théorèmes taubériens permettent d'établir un lien entre le comportement en  $+\infty$  d'une fonction et le comportement en 0 de sa transformée de Laplace lorsque ladite fonction est une primitive d'une mesure positive, si l'on ne considère que la restriction à  $\mathbb{R}_+^*$  de cette transformée. Nous donnons ici le résultat le plus général à titre indicatif.

**Définition B.2.1 (Variation lente à l'infini d'une fonction).** Soit  $L$  une fonction positive et définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $L$  varie lentement à l'infini si :

$$\forall x > 0 \quad \frac{L(tx)}{L(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1 .$$

$L$  varie lentement en 0 si  $x \mapsto L(1/x)$  varie lentement à l'infini.

**Théorème B.2.2 (Tauber).** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ , positive, croissante et continue à droite dont la transformée de Laplace  $\mathcal{L}f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Soit  $\rho \in \mathbb{R}_+$  et  $L$  une fonction lentement variable à l'infini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Quand  $z \rightarrow 0$ ,

$$\mathcal{L}f(z) \sim \frac{1}{z^{\rho+1}} L\left(\frac{1}{z}\right).$$

2. Quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$f(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} t^\rho L(t).$$

Ce théorème reste valable lorsqu'on échange les rôles de 0 et de  $+\infty$ .

Les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale sont une conséquence du Théorème B.2.2. Une démonstration du théorème B.2.2 peut être trouvée dans [Feller, 1966, Chapitre 13, théorème 5.2].

Nous détaillons à présent deux formules d'inversion théoriques, dont l'une servira de base à une méthode numérique.

### B.3 Inversion théorique de la transformée de Laplace

Dans cette partie, nous donnons deux résultats sur l'inversion théorique de la transformée de Laplace de mesures et de fonctions. Ces résultats débouchent sur des méthodes d'inversion qui sont soit numériquement coûteuses, soit trop spécifiques. Ceci conduit naturellement à tester des méthodes d'inversion numérique de cette transformée.

#### B.3.1 Inversion théorique de la transformée de Laplace d'une mesure

Il existe une formule d'inversion théorique pour les transformées de Laplace d'une mesure. La démonstration de la Proposition B.3.1 et du Théorème B.3.1 se trouve dans [Feller, 1966, Chapitre 13].

**Définition B.3.1 (Fonction complètement monotone).** Une fonction  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  est complètement monotone si elle est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et si pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\forall s > 0 \quad (-1)^n \phi^{(n)}(s) > 0.$$

La proposition suivante est importante, car elle donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit la transformée de Laplace d'une mesure.

**Proposition B.3.1.** Une fonction  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  est la transformée de Laplace d'une mesure positive sur  $\mathbb{R}_+$  si et seulement si elle est complètement monotone. Si de plus,  $\phi(0) = 1$ ,  $\phi$  est la transformée de Laplace d'une mesure de probabilité.

**Théorème B.3.1.** Soit  $m$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}_+$ , donc la transformée de Laplace est définie sur  $\mathbb{C}_+^*$ . Alors, pour tout  $x > 0$  tel que  $m(\{x\}) = 0$ , on a :

$$m([0; x]) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n \leq ax} \frac{(-a)^n}{n!} \phi^{(n)}(a).$$

Le Théorème B.3.1 ne permet pas de déboucher sur une implémentation pratique d'inversion de transformées de Laplace.

### B.3.2 Inversion théorique de la transformée de Laplace d'une fonction

Dans le cas d'une fonction analytique, on peut essayer de trouver sa transformée de Laplace inverse par des opérations élémentaires de translation ou de dilatation, dans le but de simplifier la fonction en une combinaison linéaire (éventuellement infinie) de fonctions dont la transformée de Laplace inverse est connue ou référencée, par exemple dans [Abramowitz and Stegun, 1972]. Lorsque cette méthode est impossible, on peut utiliser une formule dérivant du théorème de Mellin-Fourier, qui est décrit ci-dessous.

**Théorème B.3.2 (Mellin-Fourier).** *Soit  $f \in \mathcal{E}$  telle que  $|f(t)| \leq Ce^{at}$ ,  $C^1$  par morceaux. Alors pour  $t > 0$  et  $b > a$ ,*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{b-ir}^{b+ir} \mathcal{L}f(z)e^{zt} dz ,$$

où l'on intègre le long d'un chemin paramétrant le segment  $[b-ir; b+ir]$  dans le sens des ordonnées croissantes.

*Démonstration :* Soit  $b > a$  et  $g$   $C^1$  par morceaux, définie par  $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t)e^{-bt}$ . Puisque  $b > a$ , la fonction  $g$  est sommable, donc d'après le théorème de Dirichlet :

$$\frac{1}{2}(g(t+0) + g(t-0)) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \tilde{g}(u)e^{iut} du , \quad (\text{B.4})$$

où  $\tilde{g}$  est la transformée de Fourier de  $g$ . D'autre part :

$$\tilde{g}(u) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(b+iu)t} dt = \mathcal{L}g(b+iu) \quad (\text{B.5})$$

Par conséquent, en utilisant B.4 et B.5, on a par changement de variable :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) &= e^{bt} \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \mathcal{L}f(b+iu)e^{iut} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \mathcal{L}f(b+iu)e^{(b+iu)t} du \\ &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{b-ir}^{b+ir} \mathcal{L}f(z)e^{zt} dz \end{aligned}$$

□

Le théorème de Mellin-Fourier ne permet toutefois pas de trouver la transformée de Laplace inverse associée à une fonction  $F$  en remplaçant dans la formule du Théorème B.3.2  $\mathcal{L}f$  par  $f$ . En effet, il existe des fonctions analytiques  $F$  (par exemple  $F : z \mapsto e^{z^2}$ ) telle que l'intégrale  $\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z)e^{zt} dz$  converge vers une valeur indépendante de  $b$  et qui ne sont la transformée de Laplace d'aucune fonction. Le théorème de Bromwich donne une condition suffisante pour que la formule de Mellin-Fourier soit applicable.

**Théorème B.3.3 (Bromwich-Riemann).** *Soit  $F$  une fonction analytique sur  $\text{Re}(z) > a$ . Pour  $b > a$ ,  $r > 0$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on pose :*

$$f_{r,b}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-ir}^{b+ir} F(z)e^{zt} dz .$$

Supposons qu'il existe  $\alpha > 1/2$  et  $C > 0$  tels que pour  $\text{Re}(z) > a$  :

$$|F(z)| \leq C(1 + |z|)^{-\alpha} ,$$

et qu'il existe un  $b_0 > a$  tel que  $f_{r,b_0}$  converge simplement vers  $f \in \mathcal{E}$  quand  $r \rightarrow +\infty$ . Alors, pour tout  $b > a$ ,  $f_{r,b}$  converge simplement vers la même fonction  $f$  et  $F$  est la transformée de Laplace de  $f$ .

Le Théorème B.3.3 permet de calculer l'inverse d'une transformée de Laplace via le calcul des résidus, en fermant le segment  $[b - ir; b + ir]$  pour obtenir un contour sur lequel la fonction  $z \mapsto F(z)e^{zt}$  soit intégrable, puis en faisant tendre  $r$  vers l'infini. Dans un cas général, ceci n'est bien sûr pas applicable directement, car les pôles de  $F$  sont a priori inconnus. Toutefois, la condition suffisante indiquée dans ce théorème est à la base de nombreuses méthodes d'inversion numérique, notamment la méthode de Fourier, qui est décrite par la suite.

## B.4 Méthodes usuelles d'inversion numérique de la transformée de Laplace

Il existe de nombreuses procédures d'inversion de la transformée de Laplace, dont on peut retrouver la description dans [Davies and Martin, 1979], ou plus récemment dans [Frolov and Kitaev, 1998]. La méthode par tabulation (se ramener par des opérations élémentaires à des transformées de Laplace connues, par exemple tabulées dans [Abramowitz and Stegun, 1972]) ne suffit en effet pas toujours, notamment quand la transformée à inverser n'est connue que numériquement.

On peut distinguer quatre méthodes classiques pour effectuer cette opération :

1. Décomposer la transformée dans une base de fonctions dont la transformée de Laplace inverse est connue, puis inverser. Cette base peut être celle des fonctions de Laguerre (cf. [Abate *et al.*, 1996b] et [Abate and Whitt, 1998]), des polynômes de Legendre (cf. [Boumenir, 2000]), des fonctions trigonométriques (cf. [Whitt, 1999]), etc...
2. Estimer la transformée par une fraction rationnelle, qui elle est facilement inversible. Cette idée est à la base de la méthode par approximants de Padé (cf. [Davies and Martin, 1979]) ou de la méthode par décomposition en fraction continue (cf. [Abate and Whitt, 1999]).
3. Utiliser des formules d'inversion ponctuelles, puis répéter cette opération sur une grille de points convenablement choisis ; les principales méthodes qui découlent de cette idée sont basées sur la formule de Post-Widder (cf. [Al-Shuaibi, 2001] ou [Abate *et al.*, 1996a]) ou les noyaux de Gaver (cf. [Valko and Vajda, 2002]).
4. Utiliser la formule de Bromwich-Riemann, soit en calculant les résidus, soit en estimant numériquement l'intégrale du Théorème B.3.3 ; cette formule est à la base des méthodes de Fourier, décrites dans [Abate *et al.*, 1996b] ou [D'Amore *et al.*, 1999].

Remarquons que la quatrième méthode est très proche de la première, en considérant que la base de projection est celle des exponentielles complexes pour le cas des méthodes de Fourier. En pratique, le calcul des approximants de Padé peut être lourd en termes de temps de calcul, et les formules d'inversion ponctuelles donnent des résultats moins bons que celles plus globales.

La méthode d'inversion numérique que nous utilisons appartient donc à la quatrième catégorie, et repose sur l'utilisation de la FFT pour estimer l'intégrale de Bromwich. Cet algorithme, basé sur [D'Amore *et al.*, 1999] et sur [Brancik, 1999], est détaillé ci-dessous.

## B.5 Inversion numérique par FFT

### B.5.1 Description de la méthode

Supposons que la transformée à inverser  $F$  vérifie les hypothèses du théorème de Bromwich-Riemann<sup>1</sup> ; il existe par conséquent un réel  $c$  tel que :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt} dz \quad (\text{B.6})$$

<sup>1</sup>La plupart des densités de probabilité usuelles vérifient ces hypothèses.

On cherche à déterminer  $f(t)$  pour  $t \in [0; t_{max}]$ . Alors, si l'on considère une subdivision  $(z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de l'axe d'intégration, c'est-à-dire  $z_k = c + ip_k$ , on a :

$$f(t) \approx \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(z_k)(z_{k+1} - z_k) \exp(tz_k) \quad (\text{B.7})$$

Par commodité de calcul, nous choisissons  $p_k = k\pi/t_{max}^2$ , l'équation (B.7) devient alors :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2t_{max}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} F\left(c + i\frac{k\pi}{t_{max}}\right) \exp\left(ct + i\frac{k\pi t}{t_{max}}\right) \\ &= \frac{e^{ct}}{2t_{max}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} F\left(c + i\frac{k\pi}{t_{max}}\right) \exp\left(i\frac{k\pi t}{t_{max}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

En pratique, la somme de l'équation (B.8) est tronquée, donc on estime la fonction  $f$  au point  $t$  de la manière suivante :

$$f(t) \approx \frac{e^{ct}}{2t_{max}} \operatorname{Re} \left( \sum_{k=-n}^n F\left(c + i\frac{k\pi}{t_{max}}\right) \exp\left(i\frac{k\pi t}{t_{max}}\right) \right) \quad (\text{B.9})$$

ou encore :

$$f(t) \approx \frac{e^{ct}}{t_{max}} \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n F\left(c - i\frac{k\pi}{t_{max}}\right) \exp\left(-i\frac{k\pi t}{t_{max}}\right) - \frac{F(c)}{2} \right) \quad (\text{B.10})$$

### B.5.2 Implémentation pratique de la méthode de Fourier

En pratique, si l'on cherche à estimer la fonction sur  $[0; t_{max}]$ , on estime ponctuellement la fonction sur une grille de  $n+1$  points équirépartis  $(t_m)_{0 \leq m \leq n}$ , où  $n$  est l'indice de troncature de la somme. Nous menons dans la suite le calcul en partant de l'équation (B.10), mais il se mène de la même manière à partir de l'équation (B.9).

Posons pour tout entier relatif  $k$   $F_k \stackrel{\text{def}}{=} F\left(c - i\frac{k\pi}{t_{max}}\right)$  et notons  $FFT$  et  $IFFT$  respectivement les opérateurs de transformée de Fourier discrète et transformée de Fourier discrète inverse ; on a, en posant  $t_m = mt_{max}/n$  :

$$\begin{aligned} f(t_m) &\approx \frac{e^{ct_m}}{t_{max}} \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n F_k \exp\left(-i\frac{k\pi t_m}{t_{max}}\right) - \frac{F_0}{2} \right) \\ &= \frac{e^{ct_m}}{t_{max}} \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n F_k \exp\left(-i\frac{km\pi}{n}\right) - \frac{F_0}{2} \right) \\ &= \frac{e^{ct_m}}{t_{max}} \operatorname{Re} \left( FFT((F_i)_{0 \leq i \leq n})_m - \frac{F_0}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Un calcul analogue, en partant de (B.9), permet également d'écrire :

$$f(t_m) = \frac{e^{ct_m}}{2t_{max}} \operatorname{Re} (FFT((F_i)_{0 \leq i \leq n})_m + (n+1)IFFT((F_i)_{0 \geq i \geq -n})_m - F_0) \quad (\text{B.12})$$

Afin d'augmenter la précision du résultat, il peut être utile de faire suivre cette étape d'un accélérateur de convergence, de type sommation d'Euler (cf. [O'Conneide, 1997]) ou Wynn-Rho ; on pourra se référer à [Valko and Abate, 2003] pour une revue des différents accélérateurs existants.

<sup>2</sup>Ce choix sera motivé par la suite par l'emploi des transformées de Fourier rapides, qui permettent d'obtenir très rapidement les résultats souhaités.

## Annexe C

# Élimination du bruit additif pour les histogrammes 2D — Applications pour le désempilement à temps discret

### Sommaire de l'annexe

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>C.1 Problématique</b> . . . . .                                      | <b>127</b> |
| C.1.1 Exemples introductifs . . . . .                                   | 128        |
| <b>C.2 Méthode de débruitage par gradients multiplicatifs</b> . . . . . | <b>129</b> |
| C.2.1 Modélisation et résultats . . . . .                               | 129        |
| C.2.2 Initialisation . . . . .  | 129        |
| <b>C.3 Simulations sur des signaux synthétiques</b> . . . . .           | <b>130</b> |

---

Nous donnons dans cette Annexe une méthode permettant de traiter le problème du bruit additif gaussien avant l'application de l'algorithme de désempilement à temps discret. Nous ne disposons ici que d'un histogramme bidimensionnel, que nous cherchons à « déconvoluer ».

### C.1 Problématique

Le problème lié à la déconvolution de densité est le suivant : considérons une suite de variables aléatoires réelles  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  indépendantes et identiquement distribuées, de densité commune  $\mu$  inconnue. On fait l'hypothèse que l'on observe  $\{y_n\}_{1 \leq n \leq N}$  définie par :

$$Y_n = X_n + \varepsilon_n, \tag{C.1}$$

où  $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de densité connue  $\nu$ . On suppose que pour tous entiers  $m$  et  $n$ ,  $X_m$  est indépendante de  $\varepsilon_n$ . L'objectif est donc, à partir des observations  $\{y_n\}_{1 \leq n \leq N}$ , d'estimer la densité  $\mu$ .

Ce modèle simple peut être utilisé pour le traitement du bruit additif gaussien, qui intervient fréquemment en traitement du signal. L'hypothèse d'indépendance faite plus haut est telle que, si l'on note  $\mu_o$  la densité de probabilité associée à  $\{y_n\}_{1 \leq n \leq N}$ , on a directement de (C.1) :

$$\mu_o = \mu * \nu, \tag{C.2}$$

où  $*$  est l'opérateur de convolution. L'objectif est alors, connaissant  $\nu$  et  $\mu_o$ , de retrouver  $\mu$ . Une littérature abondante existe concernant le problème (C.2), car il présente de très nombreuses applications pratiques. On s'intéresse alors souvent soit à la rapidité de convergence des estimateurs proposés pour la déconvolution, soit à la classe de fonctions pour laquelle ces estimateurs s'appliquent.

De nombreuses méthodes ont été proposées pour le problème de la déconvolution de densités sous ces hypothèses : citons les méthodes basées sur l'inversion de la transformée de Fourier décrite par exemple dans [Devroye, 1989] et [Fan, 1991], et les méthodes par seuillage de coefficients d'ondelettes que l'on peut par exemple retrouver dans [Pensky and Vidakovic, 1999] (il est également possible de « mélanger » plusieurs approches dans des problèmes plus complexes, voir [Johnstone *et al.*, 2004]). De telles méthodes peuvent être utilisées en traitement *a priori* des séquences *busy* observées, ce qui permettrait d'améliorer les performances de l'algorithme proposé pour la correction d'empilements. Nous ne les détaillerons pas ici.

Dans le cas de l'algorithme développé pour le modèle à temps discret, nous ne disposons plus des observations directes des séquences *busy*, mais un histogramme construit à partir de ces observations. Il est certes possible de se ramener au cas précédent par retraitage de couples d'observations, mais la procédure est alors rallongée d'autant. Nous présentons ici un algorithme basé sur un gradient à incrément multiplicatif, qui garantit la positivité du résultat obtenu. Des exemples sont présentés sur des données synthétiques, qui montrent la validité de ces algorithmes.

Les méthodes par gradients multiplicatifs (telles que décrite par exemple dans [Lee and Seung, 2001]) sont utilisées dans de nombreux algorithmes d'optimisation sous contraintes, qui peuvent être appliqués par exemple en classification (voir [Sha *et al.*, 2003]) et en traitement de la parole (voir [Saul *et al.*, 2003]). Nous détaillons tout d'abord l'idée générale par l'étude d'un exemple introductif, puis nous décrivons le résultat principal.

### C.1.1 Exemples introductifs

Considérons tout d'abord le problème de recherche d'un minimum d'une fonction  $F$  ; la méthode la plus simple, dans le cas où il s'agit d'une minimisation sans contraintes et où la fonction est suffisamment régulière, est la méthode itérative du gradient, donnée par l'algorithme suivant :

- Initialisation du point de départ  $x_0$ .
- Itération  $x_{n+1} = x_n - \eta_n \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_n)$ .

TAB. C.1 – Algorithme du gradient additif

où  $(\eta_n)$  est une suite convergeant vers  $0^1$ .

Lorsque l'optimisation se fait sous contraintes de positivité, l'algorithme C.1.1 ne permet pas de conclure, car l'incrément additif aboutit parfois à des violations de contraintes. Il est alors préférable de remplacer le premier algorithme par un algorithme à gradient multiplicatif. Cet algorithme permet alors de forcer la contrainte de positivité, et fournit un algorithme plus adapté au cadre de l'optimisation sous contraintes. D'autres exemples d'algorithmes d'apprentissage avec mise à jour multiplicative sont détaillés, notamment dans l'étude de réduction de formes quadratiques, dans [Sha *et al.*, 2003].

- Initialisation du point de départ  $x_0$ .
- Itération  $x_{n+1} = x_n \exp\left(-\eta_n \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_n)\right)$ .

TAB. C.2 – Algorithme du gradient multiplicatif

Considérons à présent un problème d'ordre plus statistique, à savoir celui d'un mélange gaussien :

$$\mu = \sum_{i=1}^N p_i g_i,$$

où  $g_i$  est une densité de probabilité associée à une loi gaussienne monodimensionnelle, de moyenne  $m_i$  et de variance  $\sigma_i^2$ , et  $(p_i)$  est une distribution de probabilité discrète. L'objectif est ici de déterminer les

<sup>1</sup>On pourra se référer à [Robert and Casella, 2004] pour des conditions éventuellement stochastiques sur la suite  $(\eta_n)$

paramètres  $m_i$ ,  $\sigma_i^2$  et  $p_i$ , connaissant les observations  $\{Y_k\}_{1 \leq k \leq n}$  de la loi  $\mu$ . Une méthode répandue pour ce problème est l'utilisation de l'algorithme EM (Expectation-Maximisation) décrit dans [Dempster *et al.*, 1977]. Dans le cas d'un mélange gaussien, l'expression des itérations sur les poids  $p_i$  est de la forme

$$p_i^{(n+1)} = p_i^{(n)} \times M^{(n)},$$

où  $M^{(n)} \geq 0$ , ce qui garantit la positivité des poids estimés.

Dans les deux exemples introduits ci-dessus, on remarque qu'un pas multiplicatif permet dans certains cas de mieux « coller » aux données, ainsi qu'a-priori que l'on a sur les résultats que l'on cherche à obtenir. Lorsque l'on veut déconvoluer deux densités, nous savons déjà que nous cherchons à reconstruire une fonction positive d'intégrale égale à 1. Ces considérations mènent à une modélisation matricielle du problème de déconvolution de densité, ainsi qu'à un algorithme, qui sont détaillés dans le paragraphe suivant.

## C.2 Méthode de débruitage par gradients multiplicatifs

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à des densités de probabilité bidimensionnelles et discrètes, afin que l'analogie densité - matrice soit directe. Cette analogie sera faite dans toute la suite. Il est toujours possible de se ramener à ce cas, éventuellement en considérant un histogramme discret en lieu et place de la densité réelle.

### C.2.1 Modélisation et résultats

Soit  $H$  la matrice associée à une densité,  $W$  la matrice de bruit et  $V$  l'histogramme discret observé. Le produit de convolution des densités se ramène alors à un produit matriciel et l'on a :

$$V = W \times H. \quad (\text{C.3})$$

Le problème que l'on se pose formellement est alors de minimiser  $C(W, H, V)$  où  $C$  est une fonction de coût, sous les contraintes  $W \geq 0$  et  $H \geq 0$  (au sens où tous les coefficients des matrices  $W$  et  $H$  doivent être positifs, non au sens de la positivité des formes quadratiques associées à ces matrices). La fonction de coût choisie est ici associée à la norme euclidienne pour les matrices, c'est-à-dire :

$$C(W, H, V) = \|WH - V\|^2 = \sum_{i,j} ((WH)_{ij} - V_{ij})^2 \quad (\text{C.4})$$

Nous donnons à présent le théorème utilisé pour l'élimination du bruit additif par gradients multiplicatifs. La démonstration peut être trouvée dans [Lee and Seung, 2001], et suit à peu près le même raisonnement que la démonstration de la méthode EM.

**Théorème C.2.1 (Lee & Sha).** *Soit la factorisation définie en (C.3) ; la récurrence sur les coefficients de  $H$  et  $W$  suivante :*

$$H_{ij}^{(n+1)} = H_{ij}^{(n)} \frac{((W^{(n)})^T \times V)_{ij}}{((W^{(n)})^T \times W^{(n)} \times H^{(n)})_{ij}} \quad W_{ij}^{(n+1)} = W_{ij}^{(n)} \frac{(V \times (H^{(n)})^T)_{ij}}{(W^{(n)} \times H^{(n)} \times (H^{(n)})^T)_{ij}}$$

*fait décroître la fonction de coût  $C$  introduite en (C.4).*

### C.2.2 Initialisation

Le Théorème C.2.1 permet de proposer une méthode de déconvolution de densités de probabilité à partir d'histogrammes empiriques et une méthode d'apprentissage du modèle du bruit additif, ce qui est susceptible d'améliorer les résultats obtenus par l'algorithme de désempilement dans le cas de données discrètes. Le principal inconvénient de cette méthode (inhérent à toute méthode de gradients) repose sur le choix de  $H^{(0)}$  et  $W^{(0)}$ . Néanmoins, dans le cas de détecteur HPGe, le signal initial est

faiblement bruité, ce qui veut dire que l'histogramme déconvolué doit être proche de l'histogramme construit à partir des observations. On choisit donc

$$H^{(0)} = V .$$

Le choix de  $W^{(0)}$  est un peu plus délicat. En première approximation, on peut supposer que le signal est bruité par un bruit gaussien, donc on peut estimer la variance pour peu que l'on dispose d'un nombre suffisant de séquences *idle*. Un bon choix de  $W^{(0)}$  présuppose par conséquent la connaissance du signal temporel, ce qui est raisonnable. On peut également remarquer que  $W^{(0)}$  a une structure Toeplitz qui montre la convolution.

### C.3 Simulations sur des signaux synthétiques

Nous simulons  $N = 10^6$  échantillons tirés aléatoirement suivant la loi d'un mélange de deux gaussiennes bidimensionnelles, c'est-à-dire :

$$\mu \sim p_1 \mathcal{N}(M_1, \Sigma_1^2) + (1 - p_1) \mathcal{N}(M_2, \Sigma_2^2), \quad (\text{C.5})$$

avec

$$p_1 = 0.8, M_1 = [100, 20]^T, M_2 = [225, 25]^T, \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

La Figure C.1 représente pour mémoire la densité que l'on cherche à retrouver, la Figure C.2 représente la densité avec empilements (en haut à gauche), la densité avec empilements bruitée (en haut à droite), la densité bruitée désempilée directement (en bas à gauche) et la densité déconvoluée par gradients multiplicatifs, puis désempilée (en bas à droite). On remarque que la déconvolution pré-désempilement améliore sensiblement les performances de notre algorithme de désempilement, puisque la densité retrouvée est très proche de celle utilisée pour les simulations, ce qui semble valider a posteriori le choix de nos points initiaux  $W^{(0)}$  et  $H^{(0)}$ . La garantie de positivité apportée par la méthode des gradients multiplicatifs semble donc améliorer la robustesse de l'ensemble.

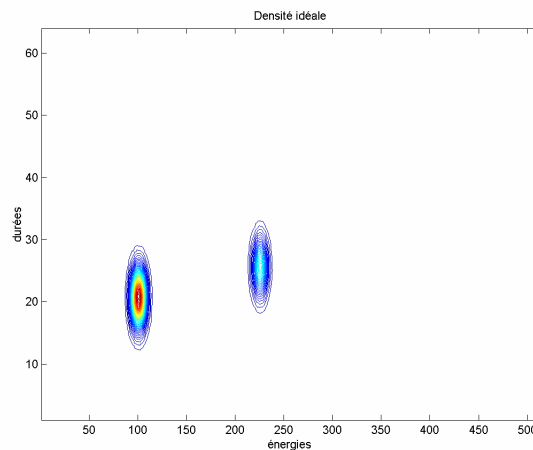


FIG. C.1 – Histogramme de la densité idéale vu de dessus

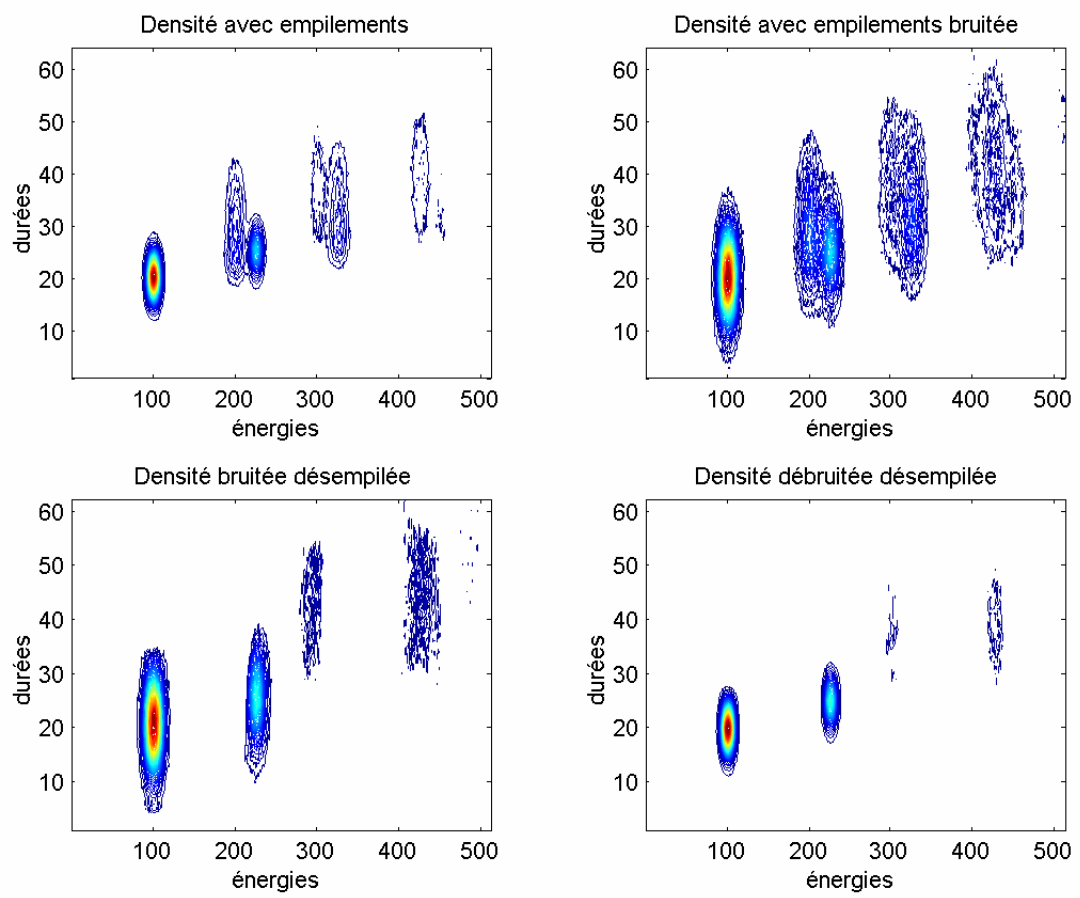


FIG. C.2 – Comparaison entre les densités bidimensionnelles



## Annexe D

# Nonparametric inference about photon energy from indirect measurements

Cette annexe présente le texte de l'article soumis à *Bernoulli*. En plus des résultats, nous présentons ici une version raffinée de l'estimateur qui, sous réserve que  $X$  soit bornée presque sûrement, atteint une vitesse de convergence minimax usuelle en estimation non-paramétrique.

### Abstract

We consider a density estimation problem arising in nuclear physics. Gamma photons are impinging on a semiconductor detector, producing pulses of current. The integral of this pulse is equal to the total amount of charges created by the photon in the detector, which is linearly related to the photon energy. Because the inter-arrival of photons can be shorter than the charge collection time, pulses associated to different photons may overlap leading to a phenomenon known as pileup. The distortions on the photon energy spectrum estimate due to pileup becomes worst when the photon rate increases, making pileup correction techniques a must for high-counting rate experiments. In this paper, we present a novel technique to correct pileup, which extends a method introduced in [Hall and Park, 2004] for the estimation of the service time from the busy period in M/G/ $\infty$  models. It is based on a novel formula linking the joint distribution of the energy and duration of the cluster of pulses and the distribution of the energy of the photons. We then assess the performance of this estimator by providing an expression of its integrated square error. A limited Monte-Carlo experiment is presented to illustrate on practical examples the benefits of the pileup correction.

*Keywords* : indirect observations ; marked Poisson processes ; nonlinear inverse problems ; nonparametric density estimation

### D.1 Introduction

We consider a problem occurring in nuclear spectroscopy. A radioactive source (a mixture of radionuclides) emits photons which impinge on a semiconductor detector. Photons (X and gamma rays) interact with the semiconductor crystal to produce electron-hole pairs. The migration of these pairs in the semiconductor produce a finite duration pulse of current. Under appropriate experimental conditions (ultra-pure crystal, low temperature), the integral over time of this pulse of current corresponds to the total amount of electron-hole pairs created in the detector, which is proportional to the energy deposited in the semiconductor (see for instance [Knoll, 1989] or [Leo, 1994]). In most classical semiconductor radiation detectors, the pulses amplitudes are recorded and sorted to produce histograms showing, as a function of energy, the number of photons absorbed by the detector. This histogram is used as an estimate of the photon energy distribution (called the *energy spectrum*).

The times between pulses generated by a radiation detector are known as inter-arrival times. The inter-arrival times of pulses are independent of the electrical pulses, and can therefore be shorter than

the typical duration of the charge collection, thus creating *clusters* (see Figure D.1). In gamma ray spectrometry, this phenomenon is referred to as *pileup*. The phenomenon of pileup causes a distortion of the acquired energy spectrum which becomes more severe as the incoming counting rate increases. This problem has been studied by many authors in the field of nuclear instrumentation since the 1960's (see [Bristow, 1990] for a detailed review of these early contributions ; classical pileup correction techniques are detailed in the [ANSI, 1999]).

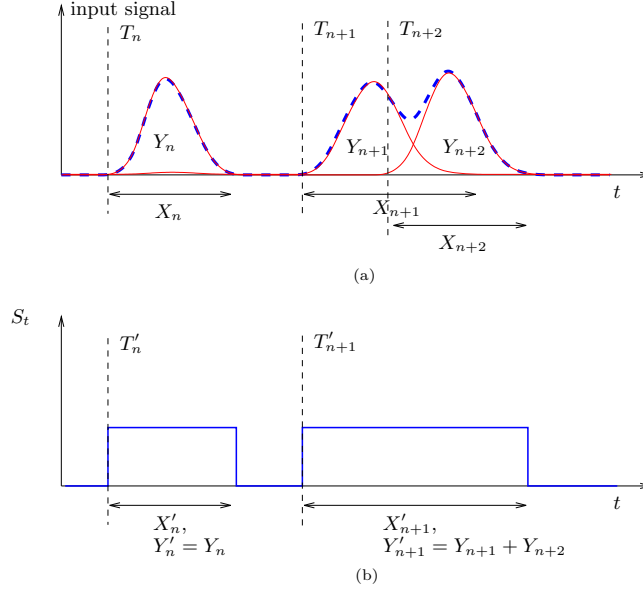


FIG. D.1 – Illustration of the pile-up phenomenon. (a) : input signal with arrival times  $T_j$ , lengths  $X_j$  and energies  $Y_j$ ,  $j = n, \dots, n + 2$ ; (b) : associated on-off process  $S_t$ ,  $S_t = 1$  if the system is busy at time  $t$  and  $S_t = 0$  otherwise.

In mathematical terms, the problem can be formalized as follows. Denote by  $\{T_k, k \geq 1\}$  the sequence of arrival times of the photons, assumed to be the ordered points of an homogeneous Poisson process. The current intensity as a function of time can be modeled as a shot-noise process

$$W(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 1} F_k(t - T_k), \quad (\text{D.1})$$

where  $\{F_k(s), k \geq 1\}$  are the contributions of each individual photon to the overall intensity. By analogy with queuing models, we call  $\{W(t), t \geq 0\}$  the *workload* process. The current pulse  $\{F_k(s), k \geq 1\}$  are assumed to be independent copies of a continuous time stochastic process  $\{F(s), s \geq 0\}$  whose path has a finite support  $[0, X]$  a.s., where  $X$  is the pulse duration (the duration of the charge collection). The integral of the pulse  $Y \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^X F(s) ds$  is equal to the total amount of charge collected for a single photon. Under appropriate experimental condition, this quantity may be shown to be linearly related to the photon energy ; for simplicity  $Y$  is referred to as the *energy* in the sequel.

The restriction of the workload process to a maximal segment where it is positive (resp. 0) is referred to as a *busy* (resp. *idle*) *period* ; in the coverage process literature, these quantities are also referred to as *spacings* and *clumps*. An idle period followed by a busy period is called a *cycle*.

In our experimental setting, the sequence of pulse duration and energy  $\{(X_k, Y_k), k \geq 1\}$  is not directly observed. Instead, the only available data are the durations of the busy and idle periods and the total amounts of charge collected on busy periods. Define the on-off process

$$S_t = \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{[T'_k, T'_k + X'_k)}(t), \quad (\text{D.2})$$

where  $\{T'_k, k \geq 1\}$  is the ordered sequence of busy periods arrivals and  $\{X'_k, k \geq 1\}$  the corresponding sequence of durations. We further define, for all  $k \geq 1$ ,  $Y'_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_{T'_k}^{T'_k + X'_k} W(t) dt$ , the total amount of

charge of the  $k$ -th busy period. Finally we denote by  $Z_k$  the duration of the  $k$ -th idle period,  $Z_1 = T_1$  and, for all  $k \geq 2$ ,  $Z_k = T'_k - (T'_{k-1} + X'_{k-1})$ . We consider the problem of estimating the distribution of the photon energy  $Y$ , having observed  $n$  cycles  $\{(Z_k, X'_k, Y'_k), k = 1, \dots, n\}$ . In the terminology introduced by [Pyke, 1958], this corresponds to a type II counter.

The problem shares some similarity with service time distribution from busy and idle measurements in a M/G/ $\infty$  model (see for instance [Baccelli and Brémaud, 2002]). Note indeed that the M/G/ $\infty$  model is a particular instance of the above setting, as it corresponds to having  $F = \mathbb{1}_{[0, X)}$ , so that  $X = Y$ . There exists a vast literature in this particular case. [Takacs, 1962] (see also [Hall, 1988]) has derived a closed-form relation linking the cumulative distributions functions (cdfs) of the service time  $X$  and busy period  $X'$ . [Bingham and Pitts, 1999] derived from this formula an estimator of the service time distribution  $X$ , which they apply to the study of biological signals. An alternative estimator has been recently introduced in [Hall and Park, 2004], in which a kernel-estimator of the probability density function (pdf) of  $X$  is derived in a nonparametric framework, together with a bound of the pointwise error.

Although our estimator can be applied to the M/G/ $\infty$  framework (thus allowing a comparison with [Hall and Park, 2004] in this special case), we stress on the fact that we are dealing here simultaneously with durations and energies, without assuming any particular dependence structure between them. Secondly, the main emphasis in the photon problem consists in estimating the distribution of the photon energy and not the distribution of the duration, in sharp contrast with the M/G/ $\infty$  problem.

The paper is organized as follows. We give the notations and main assumptions in Section D.2, and enounce the basic properties of the model. In Section D.3 we present an inversion formula relating the Laplace transform of the cluster duration/energy to the Laplace transform of the density function of interest. We also derive an estimator of this function, which is based on an empirical version of the inversion formula and kernel smoothing. Our main result is presented in Section D.4, showing that this estimator achieves standard minimax rates in the sense of the Integrated Squared Error when the pulse duration is almost-surely upper bounded. The study of this error is detailed in Section D.5. Some applications and examples are shown in Section D.6. Since the present paper is directed towards establishing a theory, practical aspects are not discussed in much details in the present contribution and we refer to [Trigano *et al.*, 2005] for a thorough discussion of the implementation and applications to real data. Proofs of the different propositions are presented in appendix.

## D.2 Notations and main assumptions

All along the paper, we suppose that

- (H-1)  $\{T_k, k \geq 1\}$  is the ordered sequence of the points of a homogenous Poisson process on the positive half-line with intensity  $\lambda$ .
- (H-2)  $\{(X, Y), (X_k, Y_k), k \geq 1\}$  is a sequence of indépendantes et identiquement distribuées  $(0, \infty)^2$ -valued random variables with probability distribution denoted by  $P$  and independent of  $\{T_k, k \geq 1\}$ . In addition,  $\mathbb{E}[X]$  and  $\mathbb{E}[Y]$  are finite.

In other words,  $\{(T_k, X_k, Y_k), k \geq 1\}$  is a Poisson point process with control measure  $\lambda \text{Leb} \otimes P$ , where  $\text{Leb}$  denotes the Lebesgue measure on the positive half-line. Let us recall a few basic properties satisfied under this assumption by the sequence  $\{(Z_k, X'_k, Y'_k), k \geq 1\}$  defined in the introduction. By the lack of memory property of the exponential distribution, the idle periods are indépendantes et identiquement distribuées with common exponential distribution with parameter  $\lambda$ . Moreover they are independent of the busy periods, which also are indépendantes et identiquement distribuées. We denote by  $(X', Y')$  a couple having the same distribution as the variables of the sequence  $\{(X'_k, Y'_k), k \geq 1\}$  and by  $P'$  its probability measure. Using that  $\mathbb{E}[X]$  and  $\mathbb{E}[Y]$  are finite, it is easily shown that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X'] &= \{\exp(\lambda \mathbb{E}[X]) - 1\} / \lambda \\ \mathbb{E}[Y'] &= \mathbb{E}[Y] \exp(\lambda \mathbb{E}[X]).\end{aligned}$$

Our goal is the nonparametric estimation of the distribution of  $Y$ ; hence we assume that

(H-3)  $Y$  admits a probability density function denoted by  $m$ , i.e.  $\int_{x>0} P(dx, dy) = m(y)\text{Leb}(dy)$ .

As mentioned in Section D.1, the marks  $\{(X_k, Y_k), k \geq 1\}$  are not directly observed but, instead, we observe the sequence  $\{(T'_k, X'_k, Y'_k), k = 1, \dots, n\}$ , i.e. the arrival times, duration and integrated energy of the successive busy periods. These quantities are recursively defined as follows. Let  $T'_1 = T_1$  and for all  $k \geq 2$ ,

$$T'_k = \inf \left\{ T_i : T_i > \left( T'_{k-1} \vee \max_{j \leq i-1} (T_j + X_j) \right) \right\}; \quad (\text{D.3})$$

for all  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} X'_k &= \max_{T_i \in [T'_k, T'_{k+1}[} \{T_i + X_i\} - T'_k, \\ Y'_k &= \sum_{i \geq 1} Y_i \mathbb{1}(T'_k \leq T_i < T'_{k+1}). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

**Remark D.2.1.** *In this paper, it is assumed that the experiment consists in collecting a number  $n$  of cycles. Hence, the total duration of the experiment is equal to  $T'_n + X'_n$  and is therefore random. A classical renewal argument shows that, as  $n \rightarrow \infty$ ,  $(T'_n + X'_n)/n$  converges a.s. to the mean duration of a cycle,  $1/\lambda + \mathbb{E}[X'] = \lambda \exp(\lambda \mathbb{E}[X])$ . Another approach, which is more sensible in certain scenarios, is to consider that the total duration of the experiment is given, say equal to  $\mathbb{T}$ . In this case, the number of cycles is random, equal to the renewal process of the busy cycles,  $N_{\mathbb{T}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}\{T'_k \leq \mathbb{T}\}$ . As  $\mathbb{T} \rightarrow \infty$ , the Blackwell theorem shows that  $N_{\mathbb{T}}/\mathbb{T} \rightarrow 1/\lambda \exp(\lambda \mathbb{E}[X])$ , showing that the asymptotic theory in both cases can be easily related.*

### D.3 Inversion formula and estimation

Let  $\tilde{P}'$  be a probability measure on  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  equipped with the Borel  $\sigma$ -algebra; for all  $(s, p) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+$ , where  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) \geq 0\}$ , we define its Laplace transform (or moment generating function)  $\mathcal{L}\tilde{P}'$  as :

$$\mathcal{L}\tilde{P}'(s, p) = \iint e^{-s\tau - p\varepsilon} \tilde{P}'(d\tau, d\varepsilon).$$

The following theorem provides a relation between the joint distribution of the individual pulses energies and durations  $P$  and the moment-generating function of the distribution of the energies and durations of the busy periods  $\mathcal{L}P'$ ; this key relation will be used to derive an estimator of  $m$ .

**Theorem D.3.1.** *Under Assumptions (H-1)–(H-2), for all  $(s, p) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+$ ,*

$$\int_{\tau=0}^{+\infty} e^{-(s+\lambda)\tau} \{a(\tau, p) - 1\} d\tau = \frac{\lambda \mathcal{L}P'(s, p)}{s + \lambda} \frac{1}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s, p)}, \quad (\text{D.5})$$

where

$$a(\tau, p) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\lambda \mathbb{E}[e^{-pY}(\tau - X)_+]). \quad (\text{D.6})$$

*Proof.* See Section D.10. □

**Remark D.3.1.** *Observe that the integral in (D.5) can be replaced by  $\int_{\tau=-\infty}^{\infty}$  since, in (D.6),  $a(\tau, p) = 0$  for  $\tau < 0$ . Moreover, from (D.6), we trivially get  $|a(\tau, p)| \leq \exp(\lambda\tau)$  for  $\text{Re}(p) \geq 0$ ; hence this integral is well defined for  $\text{Re}(s) > 0$  and  $\text{Re}(p) \geq 0$ .*

The relation (D.5) is rather involved and it is perhaps not immediately obvious to see how this relation may yield to an estimator of the distribution of the energy. By logarithmic differentiation with respect to  $x$ , (D.6) implies

$$\frac{\partial}{\partial x} \log a(x, p) = \lambda \mathbb{E}[e^{-pY} \mathbb{1}(X \leq x)]. \quad (\text{D.7})$$

We consider a kernel function  $K$  that integrates to 1 and denote by  $K^*$  its Fourier transform,  $K^*(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)e^{-i\nu y} dy$ , so that  $K^*(0) = 1$ . We further assume that  $K^*$  is integrable, so that, for any  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$K(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^*(\nu)e^{i\nu y} d\nu .$$

Hence, from (D.7) and Fubini's theorem, we have, for any bandwidth parameter  $h > 0$  and all  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \log a(x, i\nu) K^*(h\nu) e^{i\nu y} d\nu \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^*(h\nu) e^{i\nu(y-Y)} \mathbb{1}(X \leq x) d\nu \right] \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{h} K \left( \frac{y-Y}{h} \right) \mathbb{1}(X \leq x) \right] . \quad (\text{D.9})$$

Taking the limits  $x \rightarrow \infty$  and  $h \rightarrow 0$  in the previous equation leads to the following explicit inversion formula which will be used to derive our estimator. For any continuity point  $y$  of the density  $m$ , we have

$$m(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \log a(x, i\nu) K^*(h\nu) e^{i\nu y} d\nu \right\} . \quad (\text{D.10})$$

We now observe that for any  $p \in \mathbb{C}^+$ , the RHS of (D.5) is integrable on a line  $\{c + i\omega, \omega \in \mathbb{R}\}$  where  $c$  is an arbitrary positive number. By inverting the Laplace transform, (D.5) implies that, for all  $p \in \mathbb{C}^+$  and  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$a(x, p) = 1 + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{L}P'(c + i\omega, p)}{c + i\omega + \lambda} \frac{e^{(c+\lambda+i\omega)x}}{c + i\omega + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(c + i\omega, p)} d\omega . \quad (\text{D.11})$$

Our estimator of  $m$  is based on (D.10) and (D.11) but we need first to estimate  $\lambda$ , the intensity of the underlying Poisson process. Since the idle periods are independent and identically distributed according to an exponential distribution with intensity  $\lambda$ , we use maximum-likelihood estimator based on the durations of the idle periods  $\{Z_k, k = 1, \dots, n\}$ , namely,

$$\hat{\lambda}_n \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k \right)^{-1} . \quad (\text{D.12})$$

The function  $a(x, i\nu)$  can be estimated from  $\{(X'_k, Y'_k), k = 1, \dots, n\}$  by plugging in (D.11) an estimate of the Laplace transform  $\mathcal{L}P'$  of the joint distribution of the busy period duration and energy. More precisely, let  $\hat{P}'_n$  be the associated empirical measure : for any bivariate measurable function  $g$ , we denote by

$$\hat{P}'_n g \stackrel{\text{def}}{=} \iint g(x, y) \hat{P}'_n(dx, dy) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(X'_k, Y'_k) .$$

We consider the following estimator

$$\begin{aligned} \hat{a}_n(x, i\nu) &= 1 + \\ & \frac{\hat{\lambda}_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\lambda}_n \widehat{\mathcal{L}P}'_n(c + i\omega, i\nu)}{c + i\omega + \hat{\lambda}_n} \frac{e^{(\lambda+c+i\omega)x}}{c + i\omega + \hat{\lambda}_n - \widehat{\mathcal{L}P}'_n(c + i\omega, i\nu)} d\omega . \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

where

$$\widehat{\mathcal{L}P}'_n(c + i\omega, i\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\hat{P}'_n(c + i\omega, i\nu) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-(c+i\omega)X'_k - i\nu Y'_k} , \quad (\text{D.14})$$

In practice, the numerical computation of this integral (and also the one in (D.21) below) can be done by using efficient numerical packages (we can refer to [Gautschi, 1997] for an overview of

numerical integration methods). Since the integrand is infinitely differentiable and has a modulus decaying as  $|\omega|^{-2}$  when  $\omega \rightarrow \pm\infty$ , the errors in computing this integrals numerically can be made arbitrary small. The numerical error will thus not be taken into account here for brevity.

In order to estimate  $\lambda^{-1}\partial \log a/\partial x$ , we also need to estimate the partial derivative  $\partial a/\partial x$ . Because the function  $x \mapsto a(x, i\nu)$  (see (D.11)) is defined as an inverse Fourier transform of an integrable function, it is tempting to estimate its partial derivative simply by multiplying by a factor  $\lambda + c + i\omega$  its Fourier transform prior to inversion. This approach however is not directly applicable, because multiplying the integrand by  $\omega$  in (D.11) leads to a non absolutely convergent integral. As observed by [Hall and Park, 2004] in a related problem, it is possible to get rid of this difficulty by finding an explicit expression of the singular part of this function, which can be computed and estimated. Note first that, for any  $s$  and  $p$  with non-negative real parts,  $|\mathcal{L}P'(s, p)| \leq 1$ ; on the other hand,  $\operatorname{Re}(s) > 0$  implies  $|\lambda/(s + \lambda)| < 1$ . Therefore, for all  $(\omega, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{c + i\omega + \lambda - \lambda\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)} = \frac{1}{c + i\omega + \lambda} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{\lambda\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)}{\lambda + c + i\omega} \right)^n .$$

Using the latter equation, we obtain

$$\frac{\lambda\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)}{c + i\omega + \lambda} \frac{1}{c + i\omega + \lambda - \lambda\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)} = A_1(\omega, i\nu) + A_2(\omega, i\nu) \quad (\text{D.15})$$

where we have defined

$$\begin{aligned} A_1(\omega, i\nu) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)}{(c + i\omega + \lambda)^2} , \\ A_2(\omega, i\nu) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\{\lambda\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)\}^2}{(c + i\omega + \lambda)^2} \frac{1}{c + i\omega + \lambda - \lambda\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)} . \end{aligned}$$

It is easily seen that the functions  $\omega \mapsto A_k(\omega, i\nu)$ ,  $k = 1, 2$  are integrable. Hence we may define, for  $k = 1, 2$ , and all real numbers  $x$  and  $\nu$ ,

$$a_k(x, i\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} A_k(\omega, i\nu) e^{(\lambda+c+i\omega)x} d\omega \quad (\text{D.16})$$

and therefore, using (D.11) and (D.15),  $a(x, i\nu) = 1 + \lambda a_1(x, i\nu) + \lambda a_2(x, i\nu)$ , which finally yields

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \log a(x, i\nu) = \frac{1}{a(x, i\nu)} \left[ \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial x} \right] (x, i\nu) . \quad (\text{D.17})$$

Recall that the moment generating function of a gamma distribution with shape parameter 2 and scale parameter  $\lambda$  is given by  $x \mapsto \lambda^2/(\lambda - x)^2$ . It follows that, for all  $\tau \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(c+i\omega)\tau}}{(\lambda + c + i\omega)^2} d\omega = \tau_+ e^{-\lambda\tau} .$$

Using Fubini's theorem and this equation, we obtain, for all real numbers  $x$  and  $\nu$ ,

$$\begin{aligned} a_1(x, i\nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[e^{-((c+i\omega)X' + i\nu Y')}] e^{(\lambda+c+i\omega)x}}{(\lambda + c + i\omega)^2} d\omega \\ &= e^{\lambda x} \mathbb{E} \left[ e^{-i\nu Y'} (x - X')_+ e^{-\lambda(x-X')} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (x - X')_+ e^{\lambda X' - i\nu Y'} \right] , \end{aligned}$$

and, differentiating this latter expression w.r.t.  $x$ , we obtain

$$\frac{\partial a_1}{\partial x}(x, i\nu) = \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}(X' \leq x) e^{\lambda X' - i\nu Y'} \right] . \quad (\text{D.18})$$

On the other hand, note that  $|A_2(\omega, i\nu)| = O(|\omega|^{-3})$  as  $\omega \rightarrow \pm\infty$ , the derivative of  $a_2$  can (and will) be computed by multiplying the integrand in (D.16) by  $\lambda + c + i\omega$ , namely,

$$\frac{\partial a_2}{\partial x}(x, i\nu) = \frac{\lambda}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)\}^2}{c + i\omega + \lambda} \frac{e^{(\lambda+c+i\omega)x}}{c + i\omega + \lambda - \lambda\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu)} d\omega. \quad (\text{D.19})$$

Eq. (D.19) and (D.18) then yield the following estimators for  $\partial a_k/\partial x$ ,  $k = 1, 2$ ,

$$\widehat{I}_{1,n}(x, i\nu) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(X'_k \leq x) e^{\widehat{\lambda}_n X'_k - i\nu Y'_k} \quad (\text{D.20})$$

$$\widehat{I}_{2,n}(x, i\nu) = \frac{\widehat{\lambda}_n e^{(c+\widehat{\lambda}_n)x}}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{\widehat{\mathcal{L}P}'_n(c + i\omega, i\nu)\}^2}{c + i\omega + \widehat{\lambda}_n} \frac{e^{i\omega x}}{c + i\omega + \widehat{\lambda}_n - \widehat{\lambda}_n \widehat{\mathcal{L}P}'_n(c + i\omega, i\nu)} d\omega \quad (\text{D.21})$$

where  $\widehat{\lambda}_n$  and  $\widehat{\mathcal{L}P}'_n$  are given respectively by (D.12) and (D.14). From (D.10) and (D.17), we finally define the following estimator for the energy distribution density function :

$$\widehat{m}_{x,h,n}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\widehat{I}_{1,n} + \widehat{I}_{2,n}}{\widehat{a}_n}(x, i\nu) \right] K^*(h\nu) e^{i\nu y} d\nu, \quad (\text{D.22})$$

where  $\widehat{a}_n$ ,  $\widehat{I}_{1,n}$  and  $\widehat{I}_{2,n}$  are respectively defined in (D.13), (D.20) and (D.21).

## D.4 Main result

We denote respectively by  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_2$  and  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}(\beta)}$  the infinite norm, the  $L^2$ -norm and the Sobolev norm of exponent  $\beta$ , that is the norm endowing the Sobolev space

$$\mathcal{W}(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) ; \|g\|_{\mathcal{W}(\beta)}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\nu|)^{2\beta} |g^*(\nu)|^2 d\nu < \infty \right\},$$

where  $g^*$  denotes the Fourier transform of  $g$ . Consider the following assumption on the kernel.

(H-4)  $K^*$  has a compact support, and there exists constants  $C_K > 0$  and  $l \geq \beta$ . such that for all  $\nu \in \mathbb{R}$ ,

$$|1 - K^*(\nu)| \leq C_K \frac{|\nu|^l}{(1 + |\nu|)^l}.$$

We may now state the main result of this section, which establish the rate of convergence of the integrated square error.

**Theorem D.4.1.** *Let  $\beta$ ,  $C$  and  $x$  be positive numbers. Assume (H-1)–(H-4) and suppose that  $X \leq x$  a.s. and  $\|m\|_{\mathcal{W}(\beta)} \leq C$ . Then there exists  $C' > 0$  only depending on  $K$ ,  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\beta$ ,  $x$  and  $C$  such that, for all  $M > 0$ ,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n^{\beta/(1+2\beta)} \|\widehat{m}_{x,h_n,n} - m\|_2 \geq M) \leq C' M^{-2}. \quad (\text{D.23})$$

where  $h_n = n^{-1/(1+2\beta)}$ .

*Proof.* See Section D.8. □

**Remark D.4.1.** *In the application we have considered, the condition  $X \leq x$  assumption is always satisfied. Indeed, the pulse duration corresponds to the duration of the charge collection, and therefore to the lifetime of the pairs of electron-holes in the semiconductor detector. This lifetime is always finite and depends primarily of the geometry of the detector.*

**Remark D.4.2.** However, the condition  $X \leq x$  a.s. can actually be circumvented if, at fixed  $x > 0$ , one considers  $\widehat{m}_{x,h_n,n}$  as an estimator of  $m_x$ , defined as the density of the measure  $\int_{\tau=0}^x P(d\tau, dy)$ , which is always defined under Assumption (H-3).

**Remark D.4.3.** If  $X$  and  $Y$  are independent, then  $m_x(y) = m(y)\mathbb{P}(X \leq x)$  so that, for all  $x$  such that  $\mathbb{P}(X \leq x) > 0$ , we obtain an estimator of  $m$  up to a multiplicative constant.

**Remark D.4.4.** In the  $M/G/\infty$  case, i.e. if  $X = Y$  a.s.,  $m_x = m \mathbb{1}_{[0,x]}$ . Hence, since

$$\|(\widehat{m}_{x,h_n,n} - m) \mathbb{1}_{[0,x]}\|_2^2 \leq \|(\widehat{m}_{x,h_n,n} - m \mathbb{1}_{[0,x]})\|_2^2,$$

our results apply to the locally integrated error for estimating  $m \mathbb{1}_{[0,x]}$ . As a comparison, the rate of our estimator is given by the smoothness of  $m \mathbb{1}_{[0,x]}$ , whereas the rate of the estimator proposed in [Hall and Park, 2004] for estimating the time service density is given by the smoothness of the pdf of  $X'$  (see [Hall and Park, 2004, Eq. (3.7)]).

**Remark D.4.5.** The estimators in (D.23) are functions of  $\{(Z_k, X'_k, Y'_k), k = 1, \dots, n\}$ , where  $n$  is the number of observed cycles. For  $t \in \mathbb{R}_+$ , denote by  $\mathcal{N}_t$  the renewal process associated to the arrivals of the photons,  $\mathcal{N}_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}\{T_k \leq t\}$ . The number of arrivals during  $n$  cycles is equal to  $\tilde{n} = \mathcal{N}_{T'_n + X'_n}$  and is therefore random. As  $n$  tends to infinity,  $(T'_n + X'_n)/n$  converges a.s. to the mean of the cycle duration,  $\exp(\lambda \mathbb{E}[X])/\lambda$  and it can be easily shown that the  $n$ -th return to an idle period (that is,  $T'_n + X'_n$ ) is a stopping time with respect to the natural history of  $\mathcal{N}_t$ . Therefore, by the Blackwell theorem,  $\mathcal{N}_{T'_n + X'_n}/(T'_n + X'_n)$  converges to  $\lambda$ . Therefore,  $\tilde{n}/n = \mathcal{N}_{T'_n + X'_n}/n$  converges a.s. to  $\exp(\lambda \mathbb{E}[X])$ . It is well known that the minimax integrated rate for estimating  $m$  from  $\{Y_k, k = 1, \dots, \tilde{n}\}$  with  $m$  in a  $\beta$ -Sobolev ball is  $\tilde{n}^{1/(1+2\beta)}$ , the only non-standard feature being that the density estimator is calculated by using a random number of data, which does not alter the density's estimator first-order property. Since  $\tilde{n}/n$  converges a.s. to a constant, Theorem D.4.1 shows that the rates achieved by our estimator is the minimax integrated rate.

## D.5 Decomposition of the error

We give in this section theoretical results for the proposed estimators by introducing auxiliary variables, which will be used in the proof of the main theorem. For any positive numbers  $W$ ,  $x$  and  $\lambda$ , define

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_n(W) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(\omega, \nu) \in [-W, W]^2} |\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu) - \widehat{\mathcal{L}P}'_n(c + i\omega, i\nu)|; \\ \widehat{E}_n(W; x, \tilde{\lambda}) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\nu \in [-W, W]} \left| \int \mathbb{1}_{[0,x]}(\tau) e^{\tilde{\lambda}(\tau-x)} e^{-i\nu y} (P' - \widehat{P}'_n)(d\tau, dy) \right|. \end{aligned}$$

Proposition D.5.1 provides bounds for the random variables  $\widehat{\Delta}_n$  and  $\widehat{E}_n$ .

**Proposition D.5.1.** Assume (H-1)–(H-2). Then  $M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\max\{X', Y'\})$  is finite and the following inequalities hold for all  $\varepsilon > 0$ ,  $r > 0$  and  $W > 1$  :

$$\mathbb{P}(|\widehat{\Delta}_n(W)| \geq \varepsilon) \leq \frac{4r M_1}{\varepsilon} + \left(1 + \frac{W}{r}\right)^2 \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{16}\right); \quad (\text{D.24})$$

$$\sup_{x, \tilde{\lambda} > 0} \mathbb{P}(|\widehat{E}_n(W; x, \tilde{\lambda})| \geq \varepsilon) \leq \frac{4r M_1}{\varepsilon} + \left(1 + \frac{W}{r}\right) \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{16}\right). \quad (\text{D.25})$$

*Proof.* See Appendix D.9 □

Since our estimate depends on  $\hat{\lambda}_n$  and  $\widehat{\mathcal{L}P}'_n$ , we introduce auxiliary functions to exhibit both dependencies. Define the following functions depending on reals  $h, x, \tilde{\lambda}$  and on any probability measure  $\tilde{P}'$  :

$$\tilde{a}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{\tilde{\lambda}e^{(c+\tilde{\lambda})x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{L}\tilde{P}(c+i\omega, i\nu)}{c+i\omega+\tilde{\lambda}} \frac{e^{i\omega x}}{c+i\omega+\tilde{\lambda}-\tilde{\lambda}\mathcal{L}\tilde{P}(c+i\omega, i\nu)} d\omega \quad (\text{D.26})$$

$$\tilde{I}_1(x, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_{\{\tau \leq x\}} e^{\tilde{\lambda}\tau - i\nu\varepsilon} \tilde{P}'(d\tau, d\varepsilon)$$

$$\tilde{I}_2(x, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\lambda}e^{(\tilde{\lambda}+c)x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathcal{L}\tilde{P}(c+i\omega, i\nu))^2}{c+i\omega+\tilde{\lambda}} \frac{e^{i\omega x}}{c+i\omega+\tilde{\lambda}-\tilde{\lambda}\mathcal{L}\tilde{P}(c+i\omega, i\nu)} d\omega$$

and define

$$\tilde{m}(y; x, h, \tilde{\lambda}, \tilde{P}') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2}{\tilde{a}}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') \right] K^*(h\nu) e^{i\nu y} d\nu \quad (\text{D.27})$$

whenever the integral is well defined. Hence, by (D.6), (D.13), (D.19), (D.18), (D.20) and (D.21), for  $i = 1, 2$ ,

$$\tilde{a}(x, i\nu; \lambda, P') = a(x, i\nu) \quad \text{and} \quad \tilde{I}_i(x, i\nu; \lambda, P') = \frac{\partial a_i}{\partial x}(x, i\nu), \quad (\text{D.28})$$

$$\tilde{a}(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n) = \hat{a}_n(x, i\nu) \quad \text{and} \quad \tilde{I}_i(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n) = \hat{I}_{i,n}(x, i\nu) \quad (\text{D.29})$$

and  $\hat{m}_{x,h,n}(y) = \tilde{m}(y; x, h, \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n)$ . Now define

$$b_1(y) \stackrel{\text{def}}{=} m(y) - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{h} K \left( \frac{y-Y}{h} \right) \right]; \quad (\text{D.30})$$

$$b_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{h} K \left( \frac{y-Y}{h} \right) \right] - \tilde{m}(y; x, h, \lambda, P'); \quad (\text{D.31})$$

$$V_1(y) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{m}(y; x, h, \lambda, P') - \tilde{m}(y; x, h, \hat{\lambda}_n, P'); \quad (\text{D.32})$$

$$V_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{m}(y; x, h, \hat{\lambda}_n, P') - \hat{m}_{x,h,n}(y) \quad (\text{D.33})$$

so that, by definition,

$$\hat{m}_{x,h,n} - m = b_1 + b_2 + V_1 + V_2. \quad (\text{D.34})$$

In this decomposition,  $b_1$  and  $b_2$  are deterministic functions and  $V_1, V_2$  are random processes. We now provide bounds for these quantities in the  $L^2$  sense.

**Theorem D.5.1.** *Let  $\beta, x$  and  $h$  be positive numbers and  $n$  be a positive integer. Assume (H-1)–(H-4). If  $m \in \mathcal{W}(\beta)$ , then we have*

$$\|b_1\|_2^2 \leq C_K^2 h^{2\beta} \|m\|_{\mathcal{W}(\beta)}^2; \quad (\text{D.35})$$

$$\|b_2\|_2^2 \leq \|K\|_2^2 h^{-1} \mathbb{P}[X > x]. \quad (\text{D.36})$$

Moreover, there exist positive constants  $M$  and  $\eta$  only depending on  $c$  and  $\lambda$  such that the two following assertions hold.

(i) We have

$$\|V_1\|_2^2 \leq M^2 \|K\|_2^2 (1+x)^2 h^{-1} e^{4(c+2\lambda)x} (\hat{\lambda}_n - \lambda)^2 \quad (\text{D.37})$$

on the event

$$E_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ |\hat{\lambda}_n - \lambda| \leq \eta (1+x)^{-1} e^{-(c+2\lambda)x} \right\}. \quad (\text{D.38})$$

(ii) For all  $W \geq 1$  such that  $[-Wh, Wh]$  contains the support of  $K^*$ , we have

$$\|V_2\|_2^2 \leq M^2 \|K\|_2^2 h^{-1} e^{4(c+2\lambda)x} \left[ \widehat{\Delta}_n(W) + W^{-1} + \widehat{E}_n(W; x, \hat{\lambda}_n) \right]^2 \quad (\text{D.39})$$

on the event  $E_1$  intersected with the event

$$E_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \widehat{\Delta}_n(W) + W^{-1} \leq \eta e^{-(c+2\lambda)x} \right\}. \quad (\text{D.40})$$

*Proof.* See Appendix D.7.  $\square$

In this result,  $b_1$  is the usual bias in kernel nonparametric estimation;  $b_2$  is a non-usual bias term which only vanishes when  $X$  is bounded, it correspond to the fact that the limit  $x \rightarrow \infty$  is not attained in (D.10); the fluctuation term  $V_1$  accounts for the error in the estimation of  $\lambda$  by  $\hat{\lambda}_n$  and is of order  $h^{-1}\sqrt{n}$  for fixed  $x$  and  $V_2$  accounts for the error in the estimation of  $\mathcal{L}P'$  by  $\widehat{\mathcal{L}P}'_n$  and, by using Proposition D.5.1, it can be showed to be “almost” of order  $h^{-1}\sqrt{n}$  for  $W$  chosen to diverge quickly enough with respect to  $n$ . The events  $E_1$  and  $E_2$  have probability tending to 1 as  $n$  tend to infinity; they are induced by the fraction present in the definition (D.22) of the estimator as they primarily avoid the denominator to get close to zero.

We now give a result on the consistency of our estimator, and also on a rate of convergence, based on Theorem D.5.1 and Proposition D.5.1 by imposing a superexponential tail for  $X$ .

**Corollary D.5.1.** *Let  $\beta > 0$  and  $\gamma > 1$ . Assume (H-1)–(H-4) and suppose that  $m \in \mathcal{W}(\beta)$  and  $\mathbb{P}[X > x] = O(e^{-|x|^\gamma})$ . Then, for all  $\epsilon > 0$ , as  $n \rightarrow +\infty$ ,*

$$\|m - \widehat{m}_{x_n, h_n, n}\|_2^2 = O_{\mathbb{P}}\left(n^{\epsilon-2\beta/(1+2\beta)}\right), \quad (\text{D.41})$$

where  $h_n \asymp n^{-1/(1+2\beta)}$  and  $x_n \asymp (\log n)^{\gamma'}$  with  $\gamma' \in (\gamma^{-1}, 1)$ .

*Proof.* We set  $W_n \stackrel{\text{def}}{=} n$ . By Proposition D.5.1, we get by choosing  $\epsilon = C(\log(n)/n)^{1/2}$  and  $r = n^{-1/2}$  :

$$\mathbb{P}(|\widehat{\Delta}_n(W_n)| \geq C(\log(n)/n)^{1/2}) \leq \frac{4}{C} \log^{-1/2}(n) + (1 + \sqrt{n})^2 n^{-C/16}$$

which tends to 0 as  $n \rightarrow \infty$  for  $C > 32$ . Hence,

$$|\widehat{\Delta}_n(W_n)| = O_{\mathbb{P}}\{(\log(n)/n)^{1/2}\}.$$

Similarly, because  $\hat{\lambda}_n$  is independent of  $\{(X'_k, Y'_k), k = 1, \dots, n\}$ , one has that  $|\widehat{E}_n(W_n; x_n, \hat{\lambda}_n)| = O_{\mathbb{P}}\{(\log(n)/n)^{1/2}\}$ . For any  $\delta_1 \geq 0$ ,  $\delta_2 > 0$  and  $\epsilon > 0$ , one has that

$$x_n^{\delta_1} \exp(\delta_2 x_n) = o(n^\epsilon). \quad (\text{D.42})$$

Since  $\hat{\lambda}_n = \lambda + O_{\mathbb{P}}(n^{-1/2})$  and  $|\widehat{\Delta}_n(W_n) + W_n^{-1}| = O_{\mathbb{P}}((\log(n)/n)^{1/2})$ ,  $E_1$  and  $E_2$  have probability tending to one, so that, applying again (D.42) and the bounds of Theorem D.5.1 finally give, for all  $\epsilon > 0$ ,

$$\|V_i\| = O_{\mathbb{P}}\left((h_n n)^{\epsilon-1/2}\right), \quad i = 1, 2.$$

Now using the superexponential tail assumption for  $X$ , we have  $\mathbb{P}(X > x_n) = O(\exp\{-\log^{\gamma'}(n)\}) = o(n^\epsilon)$  for all  $\epsilon > 0$  and the result follows.  $\square$

As seen from (D.41), the estimator almost achieves the standard nonparametric minimax rate  $n^{-\beta/(1+2\beta)}$  that one would obtain by observing  $\{(X_k, Y_k), k = 1, \dots, n\}$  directly. If  $X$  is bounded, then the rate can be made more precise as in Theorem D.4.1 : by taking  $x$  equal to an upper bound for  $X$  (so that  $b_2 = 0$ ) and  $h_n \asymp n^{-1/(1+2\beta)}$ , one easily gets from the above proof that

$$\|m - \widehat{m}_{x, h_n, n}\|_2^2 = O_{\mathbb{P}}\left(\log(n) n^{-2\beta/(1+2\beta)}\right), \quad (\text{D.43})$$

thus a lost of  $\log(n)$  in comparison with the claimed rate. This  $\log(n)$  can in fact be removed as shown in Appendix D.8.

## D.6 Applications — Discussion

The present paper is directed towards the construction of an estimator and deriving elements of its asymptotic theory. We will therefore satisfy ourselves by providing simple examples and will refer the reader to [Trigano *et al.*, 2005] for an in-depth discussion of the selection of the tuning parameters (*e.g.* the kernel bandwidth, the truncation bound, etc) and the analysis of many different data sets.

We first consider a simulated data set. Samples are drawn from the following the density

$$f(x, y) = \mathcal{N}_{20,3}(x) \times (0.6\mathcal{N}_{100,6}(y) + 0.4\mathcal{N}_{130,9}(y)) , \quad (\text{D.44})$$

where  $\mathcal{N}_{a,b}$  denotes the gaussian distribution of mean  $a$  and standard deviation  $b$  truncated to  $\mathbb{R}_+$ ; The intensity of the Poisson process is set to  $\lambda = 0.04$ ; Figure D.2 shows the true density and a kernel estimate of the marginal of the piled-up distribution  $g$ , based on  $10^5$  samples. Figure D.3 displays the

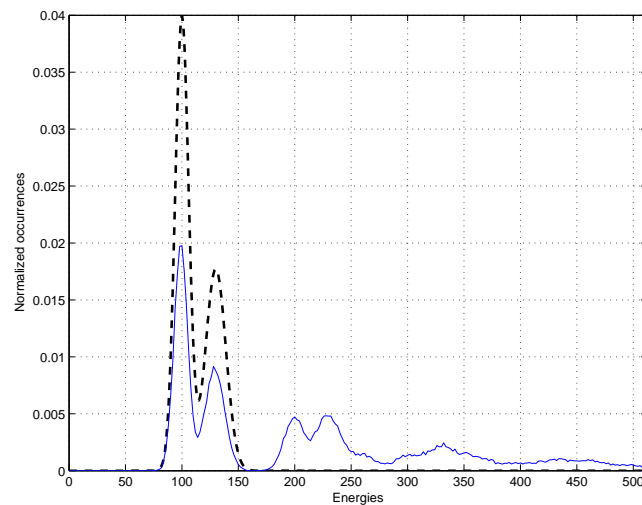


FIG. D.2 – dashed line : marginal density of the energy for the pdf (D.44); solide line : kernel density estimator of the pileup observations based on  $10^5$  samples.

difference between the true and the estimated density, obtained using the kernel bandwidth  $h = 2$  and the upper bound  $x = 80$ . The pileup correction is very effective, the estimated energy distribution  $\hat{m}_{T,h,n}$  captures most of the important features of the original distribution  $m$ . Note that the second sharp mode of the original density is well recovered after the pileup correction, whereas it is severely distorted in absence of pileup correction. The fake modes at 200 and 230 are totally removed after pileup correction.

| $n$   | ISE                   | $c$     | ISE                   | $T$                    | ISE                   |
|-------|-----------------------|---------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
|       |                       | 1       | $2.232 \cdot 10^{-2}$ | 20                     | $5.417 \cdot 10^{-3}$ |
| 1000  | $4.760 \cdot 10^{-3}$ | 0.1     | $3.852 \cdot 10^{-4}$ | 40                     | $1.905 \cdot 10^{-4}$ |
| 5000  | $1.089 \cdot 10^{-3}$ | 0.01    | $4.002 \cdot 10^{-4}$ | 60                     | $3.836 \cdot 10^{-4}$ |
| 10000 | $3.852 \cdot 10^{-4}$ | 0.001   | $4.348 \cdot 10^{-4}$ | 80                     | $5.100 \cdot 10^{-4}$ |
| 20000 | $2.042 \cdot 10^{-4}$ | 0.0001  | $3.852 \cdot 10^{-4}$ | 100                    | $2.229 \cdot 10^{-2}$ |
|       |                       | 0.00001 | $4.426 \cdot 10^{-4}$ | $\max_{i \leq n} X'_i$ | $2.231 \cdot 10^{-2}$ |

TAB. D.1 – Integrated Square Error Monte-Carlo estimates as  $n$ ,  $c$  or  $T$  varies.

We now present some results using a model of the energy distribution of the Cesium 137 radionuclide (including Compton effect). We draw  $n = 500000$  samples of  $(X, Y)$  using the adaptive rejection sampling algorithm; the number of samples seems may appear to be large, but such large number

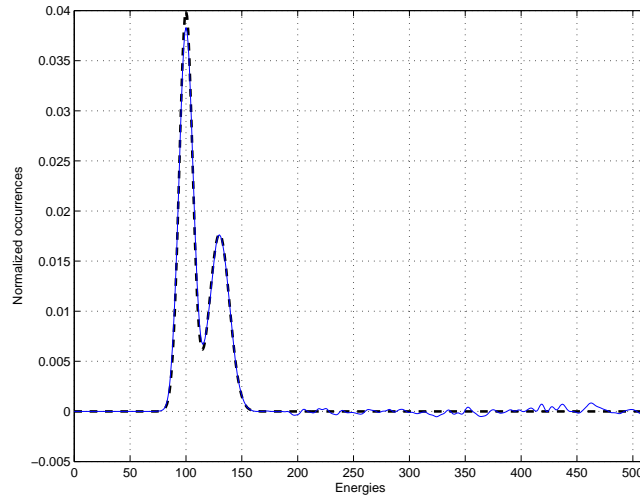


FIG. D.3 – dashed line : marginal density of the energy for the pdf (D.44) ; solid line : estimator  $\hat{n}_{T,h,n}$ .

are commonly used in nuclear spectrometry, especially when active sources are measured. Figure D.4 illustrates the differences between the distribution of the observations when the counting rate  $\lambda$  is low (dashed curve) (that is when the piled-up phenomenon is negligible), an distribution of the same element when the counting rate is high (solid curve) ; we can remark that the Compton continuum (which is the smooth part of the density on the left of the spike) is also distorted, since electrical pulses generated by Compton photons are also susceptible to pile-up.

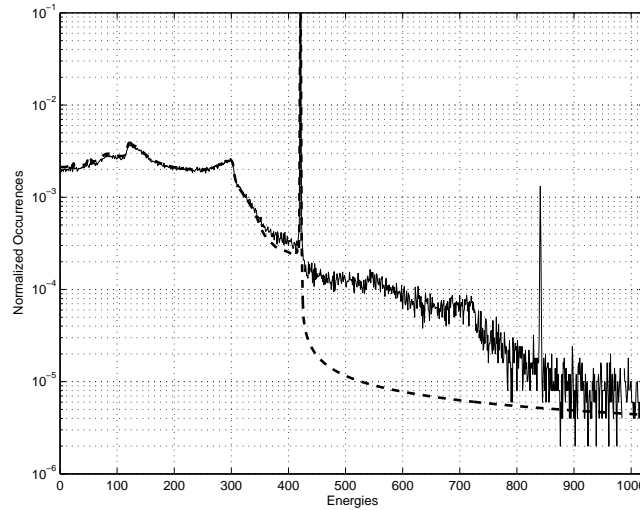
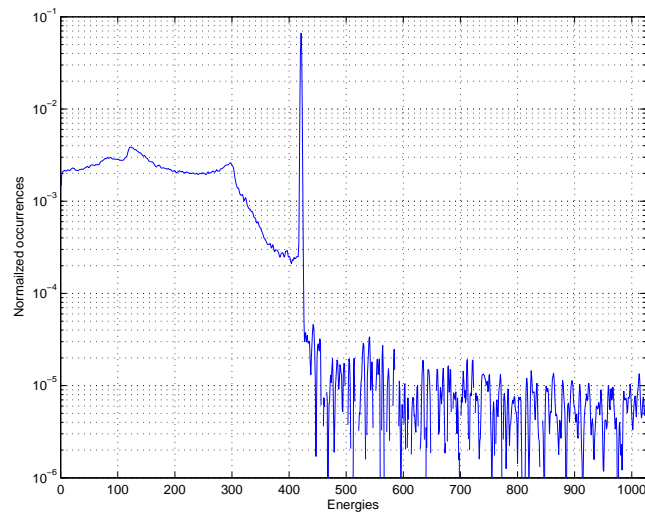


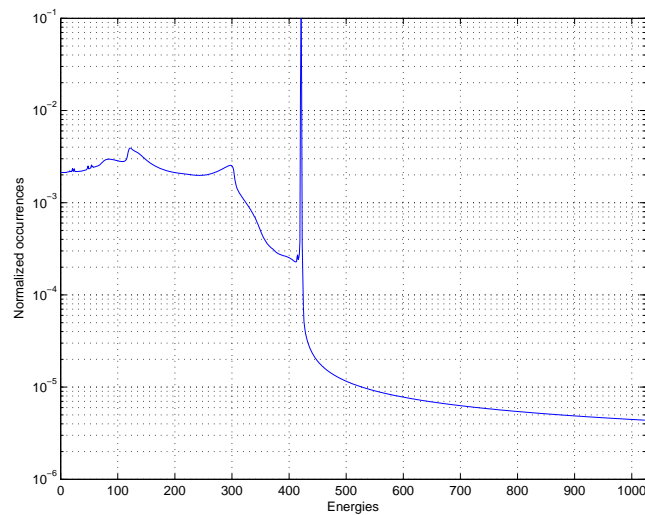
FIG. D.4 – Illustration of ideal and piled-up energy spectra of the Cs 137 element

Figure D.5 illustrates the behaviour of our estimator and compares it with the ideal energy spectrum. We observe good adequation between both densities and pile-up correction in the histograms.

We now discuss on the choice of the parameters  $c$ ,  $T$  and  $h$ . It appears that the parameter  $c$  has little influence, provided it is not chosen too large to avoid numerical issues. This is hardly surprising, since the Bromwich integral used to compute the inverse Laplace transform does not theoretically depend on the choice of  $c$  (see e.g. [Doetsch, 1974]). The choice of the parameter  $T$  is more delicate, when the impulse durations are not upper-bounded, and this choice must be examined using the upper bounds of Theorem D.5.1. On the one hand, choosing  $T$  too small introduces a bias in (D.22), since the



(a)



(b)

FIG. D.5 – Energy spectrum of the Cs 137 element — (a) Estimate  $\hat{m}_{T,h,n}$ ; (b) Ideal probability density function

control of the bias term  $b_2$  is not guaranteed in that case; on the other hand, taking  $T$  too large does not ensure that the variance term  $V_1$  and  $V_2$  are controlled, since in this case the conditions (D.38) and (D.40) may not be satisfied. However, in our practical applications, an approximate bound of  $X$  can be determined and the number of samples  $n$  is generally large enough for allowing to choose this bound for  $T$ . In standard nonparametric estimation, there are several ways of choosing a data-driven bandwidth parameter. It is not yet clear how these methods can be adapted to this non-standard density estimation scenario, except in special cases. For instance, when  $X$  and  $Y$  are independent, it is easily seen that  $Y'$  is an infinite mixture of the auto-convolutions of the density  $m$  and thus has a density with similar smoothness (this can be seen in Figures D.2 and D.4 where  $X$  and  $Y$  have been drawn independently). A possible approach would then consist in using an automatic bandwidth selector (such that cross validation) on the observations  $\{Y'_k, k = 1, \dots, n\}$ , and use the obtained optimal bandwidth for the estimator  $\hat{m}_{T,h,n}$ . This type of ideas and other discussions on practical applications of these results are discussed in the companion paper [Trigano *et al.*, 2005].

## D.7 Proof of Theorem D.5.1

**Bound for  $b_1$ .** Observe that  $b_1$  is the usual bias in non-parametric kernel estimation. The bound of the integrated error is classically given, for density in a Sobolev space, by

$$\|b_1\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |1 - K^*(h\nu)|^2 |m^*(\nu)|^2 d\nu \leq C_K^2 h^{2\beta} \|m\|_{\mathcal{W}(\beta)}^2,$$

which shows (D.35).

**Bound for  $b_2$ .** By (D.9), (D.17), (D.27) and (D.28), we find

$$b_2(y) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{h} K \left( \frac{y - Y}{h} \right) \mathbb{1}(X > x) \right].$$

An application of the Cauchy-Schwarz Inequality yields (D.36).

**Bound for  $V_1$ .** We will show below that there exist positive constants  $M$  and  $\eta$  such that, on  $E_1$  (as defined in (D.38)),

$$\sup_{\nu \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \left[ \frac{\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2}{\tilde{a}} \right] (x, i\nu; \hat{\lambda}_n, P') \right| \leq M(1+x) e^{(2c+4\lambda)x}. \quad (\text{D.45})$$

Using (D.27) and (D.32), the Parseval Theorem and the latter relation imply

$$\|V_1\|_2^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| M(1+x) e^{(2c+4\lambda)x} (\hat{\lambda}_n - \lambda) \right|^2 |K^*(h\nu)|^2 d\nu$$

on the event  $E_1$ , which yields (D.37). Hence it remains to show (D.45).

First observe that, by definition of  $\tilde{I}_1$ , one gets trivially, for all  $\tilde{\lambda} > 0$ ,

$$|\tilde{I}_1(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| \leq e^{\tilde{\lambda}x} \quad \text{and} \quad \left| \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \tilde{I}_1(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P') \right| \leq x e^{\tilde{\lambda}x}. \quad (\text{D.46})$$

Inserting (D.6) into (D.28), we get, for all  $\nu \in \mathbb{R}$ ,

$$|\tilde{a}(x, i\nu; \lambda, P')| = \exp(\lambda \mathbb{E}[\cos(\nu Y)(x - X)_+]) \in [e^{-\lambda x}, e^{\lambda x}]. \quad (\text{D.47})$$

Let  $\eta_0 > 0$  to be chosen later. From (D.26), Lemma D.11.1 shows that, there exists a constant  $M_1$  only depending on  $\lambda$ ,  $c$  and  $\eta_0$  such that, for all  $\tilde{\lambda}$  in  $[0, \lambda + \eta_0]$  and  $\nu \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| (\tilde{a}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P') - 1) e^{-(\tilde{\lambda}+c)x} - (\tilde{a}(x, i\nu; \lambda, P') - 1) e^{-(\lambda+c)x} \right| \leq M_1 |\tilde{\lambda} - \lambda|. \quad (\text{D.48})$$

From (D.47) and (D.48) and since, for all real  $y$ ,  $|1 - e^y| \leq |y|e^{|y|}$ , we get, for all  $\tilde{\lambda}$  in  $[0, \lambda + \eta_0]$  and  $\nu \in \mathbb{R}$ ,

$$|\tilde{a}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| \geq |\tilde{a}(x, i\nu; \lambda, P')| e^{(\tilde{\lambda}-\lambda)x} - |e^{(\tilde{\lambda}-\lambda)x} - 1| - M_1 |\tilde{\lambda} - \lambda| e^{(\tilde{\lambda}+c)x},$$

hence

$$|\tilde{a}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| \geq e^{(\tilde{\lambda}-2\lambda)x} - [M_1 e^{(\tilde{\lambda}+c)x} + x e^{|\tilde{\lambda}-\lambda|x}] |\tilde{\lambda} - \lambda|.$$

Note that, taking  $\eta_0 = c$  and  $M'_1 = M_1 \vee 1$ , the term between brackets is at most  $M'_1 e^{(\tilde{\lambda}-2\lambda)x} (1 + x) e^{(c+2\lambda)x}$  for  $\tilde{\lambda} \in [\lambda - \eta_0, \lambda + \eta_0]$  so that we get, on the event  $E_1$  with  $\eta \leq \eta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\eta_0 \wedge (M'_1)^{-1}/2\}$ ,

$$|\tilde{a}(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, P')| \geq \frac{1}{2} e^{(\hat{\lambda}_n - 2\lambda)x}. \quad (\text{D.49})$$

From (D.26) and using similar bounds as in Lemma D.11.1, one easily shows that, for some constant  $M_2$  only depending on  $\lambda$ ,  $c$  and  $\eta_1$ , for all  $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$  such that  $|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq \eta_1$ ,

$$|\tilde{a}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| \leq M_2 e^{(\tilde{\lambda}+c)x} \quad \text{and} \quad \left| \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{\lambda}}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P') \right| \leq M_2 (1+x) e^{(\tilde{\lambda}+c)x}, \quad (\text{D.50})$$

$$|\tilde{I}_2(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| \leq M_2 e^{(\tilde{\lambda}+c)x} \quad \text{and} \quad \left| \frac{\partial \tilde{I}_2}{\partial \tilde{\lambda}}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P') \right| \leq M_2 (1+x) e^{(\tilde{\lambda}+c)x}. \quad (\text{D.51})$$

Collecting (D.46), (D.49) and the two last displayed bounds shows that (D.45) holds on  $E_1$ , for any  $\eta \leq \eta_1$ .

**Bound for  $V_2$ .** Since the support of  $K^*$  is included in  $[-Wh, Wh]$ , By Parseval Theorem, (D.27) and (D.33), the claimed bound is implied by

$$\sup_{|\nu| \leq W} \left| \frac{\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2}{\tilde{a}}(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, P') - \frac{\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2}{\tilde{a}}(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n) \right| \leq M e^{2(c+2\lambda)x} \left[ \widehat{\Delta}_n(W) + W^{-1} + \widehat{E}_n(W; x, \hat{\lambda}_n) \right], \quad (\text{D.52})$$

which we now show. Using (D.26), we may write

$$|\tilde{a}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') - \tilde{a}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| = \left| \frac{\tilde{\lambda} e^{(c+\tilde{\lambda})x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega)] d\omega \right|, \quad (\text{D.53})$$

where  $\Psi$  is defined in Lemma D.11.1, and where the complex functions  $\tilde{z}$  and  $z$  are defined as

$$z(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{i\omega T} \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu); \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu))$$

and

$$\tilde{z}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{i\omega T} \mathcal{L}\tilde{P}(c + i\omega, i\nu); \mathcal{L}\tilde{P}(c + i\omega, i\nu)).$$

Using (D.53) and assertion (ii) of Lemma D.11.1, there exists  $M_1 > 0$  such that, for all  $\tilde{\lambda} \leq \lambda + \eta_1$ ,

$$\sup_{|\nu| \leq W} |\tilde{a}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P') - \tilde{a}(x, i\nu; \tilde{\lambda}, \hat{P}'_n)| \leq M_1 e^{(c+\tilde{\lambda})x} \left( \widehat{\Delta}_n(W) + \frac{1}{W} \right). \quad (\text{D.54})$$

It is also clear that for all  $\tilde{\lambda} \leq \lambda + \eta_1$ ,

$$\sup_{|\nu| \leq W} |\tilde{I}_1(x, i\nu; \tilde{\lambda}, \hat{P}'_n) - \tilde{I}_1(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| \leq e^{\tilde{\lambda}x} \widehat{E}_n(W; \tilde{\lambda}, x) \quad (\text{D.55})$$

and

$$|\tilde{I}_2(x, i\nu; \tilde{\lambda}, \tilde{P}') - \tilde{I}_2(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| = \left| \frac{e^{(c+\tilde{\lambda})x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega)] d\omega \right|,$$

with

$$z(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{i\omega T} (\mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu))^2; \mathcal{L}P'(c + i\omega, i\nu))$$

and

$$\tilde{z}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{i\omega T} (\mathcal{L}\tilde{P}(c + i\omega, i\nu))^2; \mathcal{L}\tilde{P}(c + i\omega, i\nu)).$$

Consequently, using assertion (ii) of Lemma D.11.1, we have for all  $\tilde{\lambda} \leq \lambda + \eta_1$ ,

$$\sup_{|\nu| \leq W} |\tilde{I}_2(x, i\nu; \tilde{\lambda}, \hat{P}'_n) - \tilde{I}_2(x, i\nu; \tilde{\lambda}, P')| \leq M_2 e^{(\tilde{\lambda}+c)x} \left( \widehat{\Delta}_n(W) + \frac{1}{W} \right). \quad (\text{D.56})$$

We now derive a lower bound for  $\hat{a}_n(x, i\nu) = a(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n)$ ; By (D.54), we get

$$\inf_{|\nu| \leq W} |\hat{a}(x, i\nu)| \geq \inf_{|\nu| \leq W} |\tilde{a}(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, P')| - M_1 e^{(c+\hat{\lambda}_n)x} \left( \widehat{\Delta}_n(W) + \frac{1}{W} \right)$$

Recall that  $E_1$  and  $E_2$  are defined in (D.38) and (D.40) respectively. Using (D.49), which holds on  $E_1$  for any  $\eta \leq \eta_1$ , we get, on  $E_1 \cap E_2$ ,

$$\inf_{|\nu| \leq W} \left| \tilde{a}(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n) \hat{a}_n(x, i\nu) \right| \geq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - M_1 \eta \right] e^{(2\hat{\lambda}_n - 4\lambda)x}. \quad (\text{D.57})$$

Hence we set  $\eta \stackrel{\text{def}}{=} (4M_1)^{-1} \wedge \eta_1$ , so that the term between brackets is at least  $1/4$ . Finally, using that, for all complex number  $x, y, z, x', y', z'$ ,

$$\frac{x+y}{z} - \frac{x'+y'}{z'} = \frac{(z-z')(x+y) + z(x-x') + z(y-y')}{zz'}$$

and collecting (D.46), (D.50), (D.51), (D.54), (D.55), (D.56) and (D.57) leads to (D.52).

## D.8 Proof of the Theorem D.4.1

In this section we denote by  $\eta_i, M_i$  and  $C_i, i = 0, 1, 2, \dots$  some positive constants only depending on  $\|m\|_{\mathcal{W}(\beta)}, K, \lambda, c$  and  $x$ . We will also use the notations introduced Section D.7. As shown in this section, we have  $\|b_1\|_2^2 \leq C_K^2 \|m\|_{\mathcal{W}(\beta)}^2 h^{2\beta}$  and since  $\mathbb{P}(X > x) = 0$ , we have  $b_2 = 0$ .

By (D.6), because  $\mathbb{E}[X] < \infty$ , it is easily seen that  $|a(x, i\nu)| \geq e^{-\lambda x}$ . This can be used in the ratio appearing in (D.22) to lower bound  $\hat{a}_n$  for  $n$  large by using that  $\hat{a}_n(x, i\nu)$  converges to  $a(x, i\nu)$ . However this will not allow bounds of the ratio in the mean square sense. For obtaining mean square error estimates, we consider the following modified estimator which (artificially) circumvent this difficulty. Let  $\eta_0 > \lambda$  and denote by  $A_n$  the set

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\hat{\lambda}_n \leq \eta_0\} \cap \left\{ \inf_{h_n \nu \in \text{Supp}(K^*)} |\hat{a}_n(x, i\nu)| \geq \frac{1}{5} \exp(-\hat{\lambda}_n x) \right\},$$

where  $\text{Supp}(K^*)$  denotes the (compact) support of  $K^*$ . Define

$$\check{m}_{x,h,n}(y) = \mathbb{1}_{A_n} \hat{m}_{x,h,n}(y). \quad (\text{D.58})$$

We will show that

$$\sup_{n \geq 1} n^{2\beta/(1+2\beta)} \mathbb{E} \|\check{m}_{x,h,n} - m\|_2^2 \leq C_0. \quad (\text{D.59})$$

Let  $V_3$  be the random process

$$V_3(y) \stackrel{\text{def}}{=} \check{m}(y; x, h_n, \lambda, P') - \hat{m}_{x,h,n}(y),$$

so that

$$\|\check{m}_{x,h,n} - m\|_2^2 \leq \|b_1\|_2^2 + \|m\|_2^2 \mathbb{1}_{A_n^c} + \|V_3\|_2^2 \mathbb{1}_{A_n}.$$

We will show that there exist  $C_1 > 0$  such that, for  $n$  large enough,

$$\mathbb{P}(A_n^c) \leq C_1 n^{-1}; \quad (\text{D.60})$$

$$\mathbb{E}[\|V_3\|_2^2 \mathbb{1}_{A_n}] \leq C_1 (h_n n)^{-1}. \quad (\text{D.61})$$

Since  $\|b_1\|_2^2 \leq C_K^2 \|m\|_{\mathcal{W}(\beta)}^2 h^{2\beta}$  and  $\|m\|_2 \leq \|m\|_{\mathcal{W}(\beta)}$ , the three last displays yield the bound (D.59). The bound (D.23) then follows by writing

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n^{\beta/(1+2\beta)} \|\hat{m}_{x,h,n} - m\|_2 \geq M) \\ \leq \mathbb{P}(n^{\beta/(1+2\beta)} \|\check{m}_{x,h,n} - m\|_2 \geq M) + \mathbb{P}(A_n^c) \leq C_0 M^{-2} + C_1 n^{-1}, \end{aligned}$$

where we applied the Markov Inequality, (D.59) and (D.60). It now remains to show (D.60) and (D.61).

**Proof of the bound (D.60).** We set  $W_n \stackrel{\text{def}}{=} n$ , so that for  $n$  large enough,  $h_n\nu \in \text{Supp}(K^*)$  implies  $|\nu| \leq W_n$ . As in (D.57), we have, on  $E_1 \cap E_2$ ,

$$\inf_{|\nu| \leq W_n} |\hat{a}_n|(x, i\nu) \geq \frac{1}{4} e^{(\hat{\lambda}_n - 2\lambda)x}.$$

Hence the intersection of  $\{\hat{\lambda}_n \leq \eta_0\}$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  and  $\{\exp((\hat{\lambda}_n - 2\lambda)x)/4 \geq \exp(-\hat{\lambda}_n x)/5\}$  is included in  $A_n$ . Since the last inequality and  $E_2$  both contain  $|\hat{\lambda}_n - \lambda| \leq \eta_2$  for  $\eta_2 > 0$  small enough, we get

$$\mathbb{P}(A_n^c) \leq \mathbb{P}(\hat{\lambda}_n > \eta_0) + \mathbb{P}(|\hat{\lambda}_n - \lambda| > \eta_2) + \mathbb{P}(\widehat{\Delta}_n(n) + n^{-1} > \eta_3).$$

Clearly the two first probabilities in the RHS are  $O(n^{-1})$ . For  $n$  large enough, the last probability is less than  $\mathbb{P}(\widehat{\Delta}_n(n) > \eta_3/2)$ , which is  $o(n^{-1})$  by applying Proposition D.5.1, say with  $r = n^{-2}$ . We thus get (D.60) for  $n$  large enough.

**Proof of the bound (D.61).** By (D.27), (D.28) and (D.29),  $V_3$  is defined as the inverse Fourier transform of

$$V_3^*(\nu) = K^*(h_n\nu) \left[ \frac{\partial_x a_1 + \partial_x a_2}{a} - \frac{\widehat{I}_{1,n} + \widehat{I}_{2,n}}{\hat{a}_n} \right] (x, i\nu),$$

where  $\partial_x a_i$  is a shorthand notation for  $\partial a_i / \partial x$ . Using that

$$\left| \frac{\partial_x a_1 + \partial_x a_2}{a} - \frac{\widehat{I}_{1,n} + \widehat{I}_{2,n}}{\hat{a}_n} \right| \leq \frac{1}{|\hat{a}_n|} \left[ \sum_{i=1,2} \left| \partial_x a_i - \widehat{I}_{i,n} \right| + \left| \frac{\partial_x a_1 + \partial_x a_2}{a} \right| |\hat{a}_n - a| \right],$$

we obtain that, on the set  $A_n$  defined above, for all  $\nu \in \mathbb{R}$ ,

$$|V_3^*(\nu)| \leq 5 |K^*(h_n\nu)| \left[ \mathcal{E}_{1,n} + \mathcal{E}_{2,n} + \mathcal{E}_n \left| \frac{\partial_x a_1 + \partial_x a_2}{a} \right| (x, i\nu) \right],$$

where, for  $i = 1, 2$ , we define  $\mathcal{E}_{i,n} \stackrel{\text{def}}{=} e^{\hat{\lambda}_n x} \left| \partial_x a_i - \widehat{I}_{i,n} \right| (x, i\nu)$  and  $\mathcal{E}_n \stackrel{\text{def}}{=} e^{\hat{\lambda}_n x} |\hat{a}_n - a| (x, i\nu)$ . Multiplying by  $\mathbb{1}_{A_n}$ , taking the expectation and applying the Parseval Theorem yield

$$\mathbb{E}[\|V_3\|_2^2 \mathbb{1}_{A_n}] \leq C_2 \left[ h_n^{-1} \|K\|_2^2 \sum_{i=1}^2 \sup_{\nu \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n} \mathcal{E}_{i,n}^2] + M_1^2 \sup_{\nu \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n} \mathcal{E}_n] \right], \quad (\text{D.62})$$

where, by (D.9) and (D.17) and Parseval's theorem,

$$M_1^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |K^*(h_n\nu)|^2 \left| \frac{\partial_x a_1 + \partial_x a_2}{a} \right|^2 (x, i\nu) d\nu \leq \|K^*\|_{\infty} \|m\|_2^2.$$

By (D.18) and (D.20), we have

$$\left| \partial_x a_1 - \widehat{I}_{1,n} \right| (x, i\nu) \leq \left| \partial_x a_1(x, i\nu) - \tilde{I}_1(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, P') \right| + \left| \tilde{I}_1(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, P') - \tilde{I}_1(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n) \right|.$$

Using this decomposition in  $\mathcal{E}_{1,n}$ , the independence of  $\hat{\lambda}_n$ ,  $(X'_k, Y'_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , the fact that  $\text{Var}(\mathbb{1}(X' \leq x) e^{\hat{\lambda} X' - i\nu Y'}) \leq 2e^{2\hat{\lambda}x}$  and the bound  $\hat{\lambda}_n \leq \eta_0$  on  $A_n$ , we get

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n} \mathcal{E}_{1,n}^2] \leq M_2 \left\{ \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{A_n} \left| \partial_x a_1(x, i\nu) - \tilde{I}_1(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, P') \right|^2 \right] + n^{-1} \right\}$$

Using (D.46) and the mean value theorem for bounding the first expectation shows that the first term is  $O(1/n)$  and thus

$$\sup_{\nu \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\mathcal{E}_{1,n}^2] \leq C_3 n^{-1} \quad (\text{D.63})$$

By (D.19) and (D.21), we have

$$\left| \partial_x a_2 - \widehat{I_{2,n}} \right| (x, i\nu) \leq \left| \partial_x a_2(x, i\nu) - \tilde{I}_2(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, P') \right| + \left| \tilde{I}_2(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, P') - \tilde{I}_2(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n) \right|.$$

Using (D.28) and (D.51), by the mean value Theorem, we get

$$\sup_{\nu \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{A_n} e^{2\hat{\lambda}_n x} \left| \partial_x a_2(x, i\nu) - \tilde{I}_2(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, P') \right|^2 \right] \leq M_3 n^{-1}$$

Using (D.79) in the proof of Lemma D.11.1, for all  $\nu \in \mathbb{R}$ , on the set  $\{\hat{\lambda}_n \leq \eta_0\}$ ,

$$\left| \tilde{I}_2(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, P') - \tilde{I}_2(x, i\nu; \hat{\lambda}_n, \hat{P}'_n) \right| \leq M_4 \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) |\mathcal{L}P' - \widehat{\mathcal{L}P}'_n|(c + i\omega, i\nu) d\omega,$$

where  $g$  is an integrable function only depending on  $c$  and  $\lambda$ . Inserting the three last bounds in the definition of  $\mathcal{E}_{2,n}$ , we obtain

$$\sup_{\nu \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n} \mathcal{E}_{2,n}^2] \leq C_4 n^{-1}.$$

Comparing (D.11) with (D.19) and (D.13) with (D.21), one easily sees that similar argument applies for bounding  $\mathcal{E}_n$  on the set  $A_n$ , giving

$$\sup_{\nu \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n} \mathcal{E}_n^2] \leq C_5 n^{-1}.$$

Inserting (D.63) and the two last displays into (D.62) shows (D.61).

## D.9 Proof of Proposition D.5.1

We have  $M_1 \leq \mathbb{E}[X'] + \mathbb{E}[Y'] < \infty$ . Denote by  $\mathbf{z}_i \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_i, \nu_i)$ ,  $i = 1, 2$  and define the function  $L_{\mathbf{z}}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-(c+i\omega)x - i\nu y}$ ; we get,

$$|L_{\mathbf{z}_1}(x, y) - L_{\mathbf{z}_2}(x, y)| \leq g(x, y) |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|_1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (\text{D.64})$$

where  $g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \max(x, y)$  and  $|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|_1 \stackrel{\text{def}}{=} |\omega_1 - \omega_2| + |\nu_1 - \nu_2|$ . Note that

$$\widehat{\Delta}_n(W) = \sup_{\mathbf{z} \in [-W, W]^2} |\hat{P}'_n L_{\mathbf{z}} - P' L_{\mathbf{z}}|.$$

Let  $N \stackrel{\text{def}}{=} \lceil W/r \rceil^2$ , where  $\lceil x \rceil$  denotes the unique integer in  $[x, x+1)$ . Then there exists a net  $\{\mathbf{z}_k\}_{1 \leq k \leq N}$  so that

$$[-W, W]^2 \subset \bigcup_{k=1}^N C(\mathbf{z}_k, r),$$

where  $C(\mathbf{z}_k, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{z} - \mathbf{z}_k|_1 \leq r\}$ . Using this covering in the above expression of  $\widehat{\Delta}_n$ , we get

$$\widehat{\Delta}_n(W) \leq \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ \sup_{\mathbf{z} \in C(\mathbf{z}_k, r)} |\hat{P}'_n L_{\mathbf{z}} - P' L_{\mathbf{z}}| \right\}. \quad (\text{D.65})$$

Using (D.64) for bounding each term in the max of (D.65), we get

$$\begin{aligned} & \sup_{\mathbf{z} \in C(\mathbf{z}_k, r)} |\hat{P}'_n L_{\mathbf{z}} - P' L_{\mathbf{z}}| \quad (\text{D.66}) \\ &= \sup_{\mathbf{z} \in C(\mathbf{z}_k, r)} |\hat{P}'_n (L_{\mathbf{z}} - L_{\mathbf{z}_k}) + P' (L_{\mathbf{z}_k} - L_{\mathbf{z}}) + (\hat{P}'_n L_{\mathbf{z}_k} - P' L_{\mathbf{z}_k})| \\ &\leq r(\hat{P}'_n g + P' g) + |(\hat{P}'_n - P') L_{\mathbf{z}_k}|. \quad (\text{D.67}) \end{aligned}$$

Inserting this bound in (D.65), for proving (D.24), it is now sufficient to bound  $\mathbb{P}(r[\hat{P}'_n + P']g \geq \varepsilon/2)$  and  $\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq N} |(\hat{P}'_n - P'_n)L_{\mathbf{z}_k}| \geq \varepsilon/2)$ . Using that  $P'g = M_1$  and Markov's inequality, we get, if  $rM_1 \leq \varepsilon/4$ ,

$$\mathbb{P}\left(r[\hat{P}'_n + P']g \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{r\hat{P}'_ng}{\varepsilon/2 - rM_1} \geq 1\right) \leq \frac{rM_1}{\varepsilon/2 - rM_1} \leq \frac{4rM_1}{\varepsilon}, \quad (\text{D.68})$$

where, in the last inequality, we used that  $1/(x-1) \leq 2/x$  for all  $x \geq 2$  with  $x = \varepsilon/(2rM_1)$ . Since the LHS is at most 1 and the RHS is more than one when  $rM_1 > \varepsilon/4$ , this inequality holds in all cases, yielding the first term in the RHS of (D.24). We now consider the second term in the RHS of (D.24). Since the  $\{(X'_k, Y'_k), k \geq 1\}$  are indépendantes et identiquement distribuées and  $|L_{\mathbf{z}}| \leq 1$ , by using Hoeffding's inequality (see e.g. Appendix 6 of [Van Der Waart and Wellner, 1996]), we get, for all  $\mathbf{z}$ ,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq N} |(\hat{P}'_n - P'_n)L_{\mathbf{z}}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 4N \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{16}\right).$$

The proof is concluded by using that  $N \leq (W/r + 1)^2$ .

To prove inequality (D.25), let now  $L_\nu$  be defined as  $L_\nu(\tau; x, \tilde{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tau)e^{\tilde{\lambda}(\tau-x)}e^{-i\nu y}$  with  $\tau = (\tau, y)$ ; same calculations can be done, yielding, for all positive  $x$  and  $\tilde{\lambda}$ ,

$$|L_{\nu_1}(\tau; x, \tilde{\lambda}) - L_{\nu_2}(\tau; x, \tilde{\lambda})| \leq \mathbb{1}_{[0,x]}(\tau)e^{\tilde{\lambda}(\tau-x)}|e^{-i\nu_1 y} - e^{-i\nu_2 y}| \leq g(\tau)|\nu_1 - \nu_2|,$$

where the function  $g$  is here defined as  $g((\tau, y)) \stackrel{\text{def}}{=} |y|$ . Using that  $P'g \leq M_1$  and  $|L_\nu| \leq 1$ , inequality (D.25) stems along the same lines as above.

## D.10 Proof of the Theorem D.3.1

Denote by  $\bar{E}_t$  the integrated workload at time  $t$ , that is :

$$\bar{E}_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t W(u)du, \quad (\text{D.69})$$

where  $\{W(t), t \geq 0\}$  is the workload process given in (D.1). Recall that  $\{S_t, t \geq 0\}$  denotes the on-off process equal to 0 in idle periods and equal to 1 in busy periods (see (D.2)). Define by  $\rho(x, y)$  the probability :

$$\rho(x, y) = \mathbb{P}(S_x = 0, \bar{E}_x \leq y). \quad (\text{D.70})$$

In a first step, we calculate the Laplace transform  $\mathcal{L}\rho$  of  $\rho$  using the renewal process of the idle and busy periods. Note that this renewal process is stationary. Define by  $\{R_n, n \geq 1\}$  the successive time instants of the end of the busy periods and by  $\{A_n, n \geq 1\}$  the integrated workload at the end of the busy periods,

$$R_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n (X'_k + Z_{k-1}) \quad \text{and} \quad A_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n Y'_k, \quad n \geq 1, \quad (\text{D.71})$$

where we have set  $R_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$  and  $A_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ .

**Proposition D.10.1.** *Under Assumption (H-1)-(H-2), for any  $(s, p) \in \mathbb{C}^2$  such that  $\text{Re}(s) > 0$  and  $\text{Re}(p) > 0$ ,*

$$\mathcal{L}\rho(s, p) = \frac{1}{s + \lambda - \lambda \mathcal{L}P'(s, p)} \times \frac{\mathcal{L}P'(s, p)}{p(s + \lambda)} + \frac{1}{p(s + \lambda)}.$$

*Proof.* The proof is based on classical renewal arguments (see for instance [Cocozza-Thivent, 1997]) and the fact that for all integer  $k$ , the idle period  $Z_k$  is distributed according to an exponential distribution with scale parameter  $\lambda$ ,  $\mathcal{E}_\lambda$ . Note that the event  $\{S_x = 0, \bar{E}_x \leq y\}$  may be decomposed as

$$\begin{aligned} & \{S_x = 0, \bar{E}_x \leq y\} \\ &= \{x < T'_1\} \cup \left( \bigcup_{n \geq 1} \left\{ T'_n + X'_n \leq x < T'_{n+1}, \sum_{k=1}^n Y'_k \leq y \right\} \right) \\ &= \{x < T'_1\} \cup \left( \bigcup_{n \geq 1} \{R_n \leq x < R_n + Z_n, A_n \leq y\} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.72})$$

where  $A_n$  and  $R_n$  are defined in (D.71). Consequently :

$$\rho(x, y) - e^{-\lambda x} = \lambda \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(x - \tau < R_n \leq x, A_n \leq y) e^{-\lambda \tau} d\tau,$$

and since

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \lambda \mathbb{P}(x - \tau < R_n \leq x, A_n \leq y) e^{-\lambda \tau} d\tau \\ &= \mathbb{P}(R_n \leq x, A_n \leq y) - \lambda \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(R_n \leq \tau - x, A_n \leq y) e^{-\lambda \tau} d\tau, \end{aligned}$$

the proof follows from the identity

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(R_n \leq x, A_n \leq y) e^{-sx} e^{-py} dx dy = \frac{1}{sp} \left( \frac{\lambda}{s + \lambda} \mathcal{L}P'(s, p) \right)^n.$$

□

We will now derive another expression for  $\mathcal{L}\rho$ , using standard properties of the Poisson process.

**Proposition D.10.2.** *Under Assumption (H-1)-(H-2), for any  $(s, p) \in \mathbb{C}^2$  such that  $\text{Re}(s) > 0$  and  $\text{Re}(p) > 0$ ,*

$$\mathcal{L}\rho(s, p) = \frac{1}{p(s + \lambda)} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{-\lambda x} \left[ \exp \left( \lambda \int_0^\infty k(x, \varepsilon) e^{-p\varepsilon} d\varepsilon \right) - 1 \right] dx.$$

*Proof.* [Proof] Denote by  $\{\mathcal{N}_t, t \geq 0\}$  the counting process associated to the homogeneous Poisson process  $\{T_k, k \geq 0\}$  of the arrivals, more explicitly  $\mathcal{N}_t = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}\{T_n \leq t\}$ . By conditioning the event  $\{S_x = 0, \bar{E}_x \leq y\}$  on the event  $\{\mathcal{N}_x = n\}$ ,

$$\rho(x, y) = e^{-\lambda x} + \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\mathcal{N}_x = n) \mathbb{P} \left( \{T_i + X_i \leq x\}_{i=1}^n, \sum_{k=1}^n Y_k \leq y \mid \mathcal{N}_x = n \right). \quad (\text{D.73})$$

The conditional distribution of the arrival times  $(T_1, \dots, T_n)$  given  $\{\mathcal{N}_x = n\}$  is equal to the distribution of the order statistics of  $n$  indépendantes et identiquement distribuées uniform random variables on  $[0, x]$ ; hence, for any  $n$ -tuple  $(x_1, \dots, x_n)$  of positive real numbers,

$$\mathbb{P}(T_1 \leq x_1, \dots, T_n \leq x_n \mid \mathcal{N}_x = n) = \mathbb{P}(U_{(1)} \leq x_1, \dots, U_{(n)} \leq x_n), \quad (\text{D.74})$$

where  $\{U_k\}_{k=1}^n$  are indépendantes et identiquement distribuées random variables uniformly distributed on  $[0, x]$  and  $U_{(1)} \leq \dots \leq U_{(n)}$  are the order statistics. Therefore, (D.73) and (D.74) imply that

$$\begin{aligned} A &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P} \left( \left\{ T_i + X_i \leq x \right\}_{i=1}^n, \sum_{k=1}^n Y_k \leq y \mid \mathcal{N}_x = n \right) \\ &= \frac{1}{x^n} \int \dots \int \prod_{k=1}^n \mathbb{1}\{\tau_k + x_k \leq x\} \mathbb{1}\left\{ \sum_{k=1}^n y_k \leq y \right\} \prod_{k=1}^n P(dx_k, dy_k) du_k, \end{aligned}$$

since the latter integral is invariant by permuting the indexes. An application of the Fubini theorem leads to

$$A = \frac{1}{x^n} \int \dots \int \mathbb{1}\left\{ \sum_{k=1}^n y_k \leq y \right\} \prod_{k=1}^n \kappa(x, dy_k),$$

where  $\kappa(x, dy)$  is the probability kernel defined by

$$\kappa(x, dy) \stackrel{\text{def}}{=} \int (x - \tau) \mathbb{1}\{\tau \leq x\} P(d\tau, dy). \quad (\text{D.75})$$

We obtain, for any  $p$  such that  $\text{Re}(p) > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho(x, \varepsilon) e^{-p\varepsilon} d\varepsilon &= \frac{e^{-\lambda x}}{p} + \frac{1}{p} \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda x} \left[ \int_0^\infty \kappa(x, d\varepsilon) e^{-p\varepsilon} \right]^n \\ &= \frac{e^{-\lambda x}}{p} + \frac{e^{-\lambda x}}{p} \left[ \exp \left( \lambda \int_0^\infty \kappa(x, d\varepsilon) e^{-p\varepsilon} \right) - 1 \right], \end{aligned}$$

and hence

$$\mathcal{L}\rho(s, p) = \frac{1}{p(s + \lambda)} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} e^{-\lambda\tau} \left[ \exp \left( \lambda \int_0^\infty e^{-p\varepsilon} \kappa(\tau, d\varepsilon) \right) - 1 \right] d\tau.$$

□

The proof of Theorem D.3.1 is then a direct consequence of Proposition D.10.1 and Proposition D.10.2 and the fact that

$$a(x, p) = \exp \left( \lambda \int_0^\infty e^{-p\varepsilon} \kappa(x, d\varepsilon) \right)$$

The result is extrapolated on the line  $\text{Re}(p) = 0$  by continuity in  $p$  at fixed  $s$  such that  $\text{Re}(s) > 0$ .

## D.11 Technical Lemmas

**Lemma D.11.1.** *Let  $c > 0$  and  $\eta_0 > 0$ . for any complex valued functions  $z_1$  and  $z_2$  satisfying*

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}, i=1,2} |z_i(\omega)| \leq 1, \quad (\text{D.76})$$

let  $z = (z_1, z_2)$  and denote by  $\Psi_z$  the function defined on  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  by

$$\Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z_1(\omega)}{(c + i\omega + \tilde{\lambda})(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}z_2(\omega))}.$$

Then the following assertions hold :

- (i) *The function  $\tilde{\lambda} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) d\omega$  is continuously differentiable on  $\mathbb{R}_+$  and its derivative is bounded independently of  $z$  over  $\tilde{\lambda} \in [0, \eta_0]$ .*

(ii) There exists  $K > 0$  only depending on  $c$  and  $\eta_0$  such as, for any  $W \geq 1$  or  $W = \infty$  and any function  $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  also satisfying (D.76),

$$\sup_{\tilde{\lambda} \in [0, \eta_0]} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) d\omega - \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega) d\omega \right| \leq K \left( \max_{i=1,2} \sup_{\omega \in [-W, W]} |z_i(\omega) - \tilde{z}_i(\omega)| + \frac{1}{W} \right).$$

*Proof.* For all  $\omega$  in  $\mathbb{R}$  and  $\tilde{\lambda} \in [0, \eta_0]$ , by using (D.76), we obtain

$$\left| \partial_{\tilde{\lambda}} \Psi(\tilde{\lambda}, \omega) \right| \leq \frac{3(c + |\omega|) + 4\eta_0}{(c^2 + \omega^2) \left( \sqrt{(c + \tilde{\lambda})^2 + \omega^2} - \tilde{\lambda} \right)^2}. \quad (\text{D.77})$$

From Jensen inequality, one can easily show that for all  $\alpha$  in  $[0, 1]$  and  $\tilde{\lambda} \in [0, \eta_0]$ ,

$$\sqrt{(c + \tilde{\lambda})^2 + \omega^2} \geq (c + \tilde{\lambda})\sqrt{\alpha} + |\omega|\sqrt{1 - \alpha}. \quad (\text{D.78})$$

Choosing  $\alpha$  close enough to 1 so that  $(\sqrt{\alpha} - 1)\eta_0 + c\sqrt{\alpha} > 0$ , (D.77) and (D.78) yields to

$$\left| \partial_{\tilde{\lambda}} \Psi(\tilde{\lambda}, \omega) \right| \leq \frac{3(c + |\omega|) + 4\eta_0}{(c^2 + \omega^2) \left( (\sqrt{\alpha} - 1)\eta_0 + c\sqrt{\alpha} + |\omega|\sqrt{1 - \alpha} \right)^2},$$

which is valid independently of  $\tilde{\lambda}$  in  $[0, \eta_0]$ , and whose RHS is integrable over  $\omega$  in  $\mathbb{R}$ , hence (i). For showing (ii), observe that for all  $\tilde{\lambda}$  in  $[0, \eta_0]$

$$\begin{aligned} & \Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega) \\ &= \frac{(z_1(\omega) - \tilde{z}_1(\omega))}{(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}z_2(\omega))(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}\tilde{z}_2(\omega))} \\ &+ \frac{\tilde{\lambda}(\tilde{z}_1(\omega)z_2(\omega) - \tilde{z}_2(\omega)z_1(\omega))}{(c + i\omega + \tilde{\lambda})(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}z_2(\omega))(c + i\omega + \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}\tilde{z}_2(\omega))}. \end{aligned}$$

Using again (D.77) and since, using (D.76),  $|\tilde{z}_1z_2 - \tilde{z}_2z_1| = |\tilde{z}_1(z_2 - \tilde{z}_2) - \tilde{z}_2(z_1 - \tilde{z}_1)| \leq |z_2 - \tilde{z}_2| + |z_1 - \tilde{z}_1|$ , for  $\alpha$  chosen as above and for each  $\tilde{\lambda}$  in  $[0, \eta_0]$ , we have

$$|\Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega)| \leq \frac{(c + |\omega| + 3\eta_0)}{\sqrt{c^2 + \omega^2} \left( (\sqrt{\alpha} - 1)\eta_0 + c\sqrt{\alpha} + |\omega|\sqrt{1 - \alpha} \right)^2} \max_{i=1,2} |z_i(\omega) - \tilde{z}_i(\omega)|. \quad (\text{D.79})$$

Observe that in the RHS above, the fraction is integrable over  $\omega \in \mathbb{R}$  and is equivalent to  $[(1 - \alpha)|\omega|]^{-2}$  as  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Consequently, there exists constants  $K_1$  and  $K_2$  depending only on  $c$  and  $\eta_0$  such as

$$\begin{aligned} & \int_{-W}^{+W} |\Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega)| d\omega \\ & \leq K_1 \max_{i=1,2} \sup_{\omega \in [-W, W]} |z_i(\omega) - \tilde{z}_i(\omega)| \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}(c\sqrt{\alpha} + (\sqrt{\alpha} - 1)\eta_0)} \end{aligned}$$

and, since  $\max_{i=1,2} |z_i(\omega) - \tilde{z}_i(\omega)| \leq 2$ ,

$$\int_{[-W, W]^c} |\Psi_z(\tilde{\lambda}, \omega) - \Psi_{\tilde{z}}(\tilde{\lambda}, \omega)| d\omega \leq K_2 W^{-1},$$

hence (ii). □

# Bibliographie

- [Abate and Whitt, 1998] J. Abate and W. Whitt. Laplace Transforms of Probability Density Functions with Series Representation. Technical report, AT & T Bell Laboratories, 1998. 125
- [Abate and Whitt, 1999] J. Abate and W. Whitt. Computing Laplace Transforms for Numerical Inversion via Continued Fractions. *INFORMS J. Comput.*, 11 :394–405, 1999. 125
- [Abate *et al.*, 1996a] J. Abate, G. L. Choudhury, and W. Whitt. Numerical Inversion of Multidimensional Laplace Transforms by the Laguerre Method. Technical report, AT & T Bell Laboratories, 1996. 125
- [Abate *et al.*, 1996b] J. Abate, G. L. Choudhury, and W. Whitt. On the Laguerre Method for Numerically Inverting Laplace Transforms. *INFORMS J. Comput.*, 8 :413–427, 1996. 125
- [Abramowitz and Stegun, 1972] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, Washington D. C., 1972. 124, 125
- [Al-Shuaibi, 2001] A. Al-Shuaibi. Inversion of the Laplace Transform via Post-Widder Formula. *Integral Transforms and Special Functions*, 11(3) :225–232, 2001. 125
- [Albert and Nelson, 1953] G. E. Albert and L. Nelson. Contributions to the Statistical Theory of Counter Data. *Annals of Mathematical Statistics*, 24(1) :9–22, 1953. 17
- [Andai and Jedlovszky, 1983] A. Andai and R. Jedlovszky. Pile-Up Rejection Live-Time Correction Unit for Precision Gamma-Ray Spectrometry. *International Journal of Applied Radiation and Isotopes*, 34 :501–507, 1983. 14, 15
- [ANSI, 1999] ANSI. *American National Standard for Calibration and Use of Germanium Spectrometers for the Measurement of Gamma-Ray Emission Rates of Radionuclides. ANSI N42.14-1999*. American National Standards Institute, 1999. 7, 13, 15, 86, 89, 134
- [Baccelli and Brémaud, 2002] F. Baccelli and P. Brémaud. *Elements of Queueing Theory*. Springer, 2002. 17, 135
- [Bamford *et al.*, 1991] G. J. Bamford, A. C. Rester, R. L. Coldwell, and C. M. Castaneda. Neutron, Proton and Gamma-Ray Event Identification with a HPGe Detector through Pulse Shape Analysis. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 37(2) :200–208, 1991. 14, 16
- [Barat and Dautremer, 2002a] E. Barat and T. Dautremer. ADONIS : from Adaptive Filtering to Optimal Detection in Gamma Spectrometry. Technical Report (CEA), 2002. 79, 80, 81, 83, 84
- [Barat and Dautremer, 2002b] E. Barat and T. Dautremer. Algorithms Implementation in DSP for ADONIS. Technical Report (CEA), 2002. 80, 82, 84
- [Bayen and Margaria, 1988] F. Bayen and C. Margaria. *Distributions, Analyse de Fourier, Transformation de Laplace*, volume 3. Ellipses, 1988. 120
- [Bingham and Pitts, 1999] N. H. Bingham and S. M. Pitts. Non-Parametric Estimation for the  $M/G/\infty$  Queue. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 51(1) :71–97, 1999. 18, 23, 36, 135
- [Bolotin *et al.*, 1970] H. H. Bolotin, M. G. Strauss, and D. A. McClure. Simple Technique for Precise Determinations of Counting Losses in Nuclear Pulse Processing Systems. *Nuclear Instruments and Methods*, 83 :1–12, 1970. 15

- [Boumenir, 2000] A. Boumenir. On The Numerical Inversion of the Laplace Transform by the Use of an Optimized Legendre Polynomials. *Approx. Theory and Appl.*, 16(4) :17–32, 2000. 125
- [Brancik, 1999] L. Brancik. Programs for Fast Numerical Inversion of Laplace Transforms in Matlab Language Environment. *Sbornik 7. Proc. Matlab 99, Prague*, pages 27–39, 1999. 125
- [Brezis, 1983] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Masson, 1983. 33
- [Brianzi and Frontini, 1991] P. Brianzi and M. Frontini. On the Regularized Inversion of the Laplace Transform. *Inverse Problems*, 7 :355–368, 1991. 54
- [Bristow, 1990] Q. Bristow. *Theoretical and experimental investigations of coincidences in Poisson distributed pulse trains and spectral distortion caused by pulse pileup*. PhD thesis, Carleton University, Ottawa, Canada, 1990. 134
- [Buvat, 2002] N. Buvat. *Quantification en tomographie d'émission ; Correction d'Atténuation, de Diffusion et de Volume Partiel*. Université Denis Diderot Paris VII - U494 INSERM, 2002. 4
- [Cisowski and Niedźwiecki, 1996] K. Cisowski and M. Niedźwiecki. Adaptive scheme for elimination of broadband noise and impulsive disturbances from AR and ARMA signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44-3 :967–982, 1996. 84
- [Coates, 1972] P. B. Coates. Pile-Up Corrections in the Measurement of Lifetimes. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 5(2) :148–150, 1972. 15
- [Coates, 1992] P. B. Coates. Analytical Corrections for Dead Time Effects in the Measurement of Time-Limit Distributions. *Review of Scientific Instruments*, 63(3) :2084–2088, 1992. 15, 46
- [Cocozza-Thivent, 1997] C. Cocozza-Thivent. *Processus Stochastiques et Fiabilité des Systèmes*. Springer Verlag, 1997. 35, 36, 37, 152
- [D'Amore and Murli, 2002] L. D'Amore and A. Murli. Regularization of a Fourier Series Method for the Laplace Transform Inversion with Real Data. *Inverse Problems*, 18(4) :1185–1205, 2002. 54
- [D'Amore et al., 1999] L. D'Amore, G. Laccetti, and A. Murli. Algorithm 796 : A Fortran Software Package for the Numerical Inversion of the Laplace Transform Based on a Fourier Series Method. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 25(3) :306–315, 1999. 125
- [Davies and Martin, 1979] B. Davies and B. Martin. Numerical Inversion of the Laplace Transform : a Survey and Comparison of Methods. *J. Comp. Phys.*, 33 :1–32, 1979. 125
- [Davis and King, 1970] C. C. Davis and T. A. King. Correction Methods for Photon Pile-Up in Lifetime Determination by Single-Photon Counting. *Journal of Physics A*, 3 :101–109, 1970. 14
- [De Antoni et al., 1998] P. De Antoni, F. Lebrun, and J. Leray. System for the Processing of Pulses Resulting from the Interaction of a Gamma Particle with a CdTe Radiation Detector. Brevet U.S. 5.821.538, 1998. 15
- [Dempster et al., 1977] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J. Royal Stat. Soc. B*, 39(1) :1–38, 1977. 82, 129
- [Devroye and Berlinet, 1994] L. Devroye and A. Berlinet. A Comparison of Kernel Density Estimates. In *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 1994. 75
- [Devroye, 1989] L. Devroye. Consistent Deconvolution in Density Estimation. *Canadian Jour. Stat.*, 17(2) :235–239, 1989. 48, 128
- [Doetsch, 1974] G. Doetsch. *Introduction to the Theory and the Application of the Laplace Transform*. Springer-Verlag, 1974. 74, 121, 144
- [Dvurecenskij and Ososkov, 1984] A. Dvurecenskij and G.A. Ososkov. Note on Type II Counter Problem. *Appl. Math. (Czech.)*, 29 :237–249, 1984. 17
- [Dvurecenskij and Ososkov, 1985] A. Dvurecenskij and G. A. Ososkov. On a Modified Counter with Prolonging Dead Time. *Jour. of Appl. Prob.*, 22(1) :678–687, 1985. 17

- [Eglin *et al.*, 2005] L. Eglin, E. Barat, T. Montagu, T. Dautremer, and J.-C. Trama. Ionizing Radiation Detection Using Jump Markov Linear Systems. In *IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, 2005. 81
- [Evans, 1958] R. D. Evans. *Encyclopedia of Physics*, volume 34, chapter Corpuscles and Radiation in Matter, pages 218–197. Springer-Verlag, 1958. 5
- [Fan, 1991] J. Fan. On the Optimal Rates of Convergence for Nonparametric Deconvolution Problems. *Ann. Stat.*, 19(3) :1257–1272, 1991. 48, 128
- [Feller, 1966] J. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume 2. Wiley, 1966. 120, 123
- [Frolov and Kitaev, 1998] G. A Frolov and M. Y. Kitaev. A Problem of Numerical Inversion of Implicitly Defined Laplace Transform. *Computers Math. Applic.*, 36(5) :35–44, 1998. 125
- [Gautschi, 1997] W. Gautschi. *Numerical Analysis : an Introduction*. Birkhäuser, 1st edition, 1997. 137
- [Gehrk *et al.*, 1993] R. J. Gehrk, M. H. Putnam, E. W. Killan, R. G. Helmer, R. L. Kynaston, S. G. Goodwin, and L. O. Johnson. Method of Photon Spectral Analysis. Brevet US 5.206.174, 1993. 14
- [Groetsch, 1993] C. W. Groetsch. *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Vieweg, 1993. 52
- [Gubner, 1996] J. A. Gubner. Computation of shot-noise probability distributions and densities. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17(3) :750–761, 1996. 24
- [Hall and Park, 2004] P. Hall and J. Park. Nonparametric Inference about Service Time Distribution from Indirect Measurements. *Jour. Roy. Statist. Soc.*, 66(4) :861–875, 2004. 18, 47, 51, 54, 56, 75, 89, 133, 135, 138, 140
- [Hall, 1988] P. Hall. *Introduction to the Theory of Coverage Processes*. Wiley, 1988. 17, 135
- [Hartwell and Goodwin, 1989] J. K. Hartwell and S. G. Goodwin. Pulser Injection with Subsequent Removal-Implementation and Applications. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, NS-36 :801–809, 1989. 15
- [Haykin, 1995] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentive-Hall, 1995. 79
- [Helmer, 1982] R. G. Helmer. Efficiency Calibration of a Ge Detector for 30-2800 keV Gamma-Rays. *Nuclear Instruments and Methods*, 193 :87–90, 1982. 13
- [Hoeffding, 1963] W. Hoeffding. Probability Inequalities for Sums of Bounded Random Variables. *Journal of the Amerian Statistical Association*, 58(301) :13–30, 1963. 58
- [Johnson *et al.*, 1981] L. O. Johnson, E. W. Killian, R. G. Helmer, and R. Coates. Utilization of Concurrently Gathered Pulser Data for Complete Spectral Validation of Gamma-Ray Spectra from Germanium Detectors. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, NS-28 :638–???, 1981. 15
- [Johnstone *et al.*, 2004] I.A. Johnstone, G. Kerkyacharian, D. Picard, and M. Raimondo. Wavelet Deconvoluton Using a Periodic Setting. *Jour. Roy. Statist. Soc. B*, 66(3) :547–573, 2004. 49, 128
- [Jorion and Stoller, 1999] B. Jorion and C. Stoller. Method for Pulse Shaping Regulation and Discrimination in a Nuclear Spectroscopy System. Brevet US 5.884.234, 1999. 14, 16
- [Knoll, 1989] G.F. Knoll. *Radiation Detection and Measurement*. Wiley, 2nd edition, 1989. 2, 4, 5, 12, 23, 24, 133
- [Lacroix, 2000] J. Lacroix. *Chaînes de Markov et Processus de Poisson*. Université Pierre et Marie Curie Paris VI, 2000. 33, 120
- [Lee and Seung, 2001] D. D. Lee and H. S. Seung. Algorithms for Nonnegative Matrix Factorization. In *Adv. in Neural and Inform. Process. Syst.*, volume 13, pages 556–562, 2001. 128, 129
- [Leo, 1994] William R. Leo. *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments : A How-To Approach*. Springer Verlag, 1994. 133

- [Logothetis and Krishnamurthy, 1999] A. Logothetis and V. Krishnamurthy. Expectation Maximisation Algorithms for MAP Estimation of Jump Markov Linear Systems. *IEEE Transactions in Signal Processing*, 47(8) :2139–2156, August 1999. 83
- [Martin and Thomson, 1982] R. D. Martin and R. J. Thomson. Robust-Resistant Spectrum Estimation. *Proceedings of the IEEE*, 70(9) :1097–1115, 1982. 85
- [Masreliez, 1975] C. J. Masreliez. Approximate Non-Gaussian Filtering with Linear State and Observation Relations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20 :107–110, 1975. 84, 85
- [Montémont *et al.*, 2000] G. Montémont, M. Arquès, and A. Mohammad-Djafari. A Bayesian Method for Pulse Shape and Energy Estimation for Gamma Spectrometry Measurements using Semiconductor Detectors. In *Proc. 20th int. workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*. American Institute of Physics, 2000. 15
- [Mott *et al.*, 1994] R. B. Mott, C. G. Waldman, and D. E. Ungar. Highly Sensitive Nuclear Spectrometer Apparatus and Method. Brevet US 5.349.193, 1994. 14
- [O’Cinneide, 1997] C. A. O’Cinneide. Euler Summation for Fourier Series and Laplace Transform Inversion. *Commun. Statist. — Stochastic Models*, 13(2) :315–337, 1997. 126
- [Parzen, 1962] E. Parzen. On the Estimation of a Probability Density Function and the Mode. *Annals of Mathematical Statistics*, 33 :1065–1076, 1962. 48
- [Pensky and Vidakovic, 1999] M. Pensky and B. Vidakovic. Adaptive Wavelet Estimator for Nonparametric Density Estimation. *Ann. Statist.*, 27(6) :2033–2053, 1999. 49, 90, 128
- [Pommé *et al.*, 1999a] S. Pommé, J-P. Alzetta, J. Uyttenhoveb, B. Denecke, G. Aranac, and P. Robouch. Accuracy and Precision of Loss-Free Counting in Gamma-Ray Spectrometry. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 422(1) :388–394, 1999. 16
- [Pommé *et al.*, 1999b] S. Pommé, B. Denecke, and J-P. Alzetta. Influence of Pileup Rejection on Nuclear Counting, Viewed from the Time-Domain Perspective. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 426(2) :564–582, 1999. 16
- [Pommé, 1998] S. Pommé. Time Distortion of a Poisson Process and its Effect on Experimental Uncertainty. *Applied Radiation and Isotopes*, 49(9-11) :1213–1218, 1998. 16
- [Pommé, 1999a] S. Pommé. How Pileup Rejection Affects the Precision of Loss-Free Counting. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 432(2-3) :456–470, 1999. 16
- [Pommé, 1999b] S. Pommé. Time-Interval Distributions and Counting Statistics with a Non-Paralysable Spectrometer. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 437(2-3) :481–489, 1999. 16
- [Pyke, 1958] R. Pyke. On Renewal Processes Related to Type I and Type II Counter Models. *Annals of Mathematical Statistics*, 29(3) :737–754, 1958. 17, 36, 135
- [Resnick, 1992] S. I. Resnick. *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhauser, 1992. 29, 33, 38
- [Robert and Casella, 2004] C. Robert and G. Casella. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer Verlag, 2004. 76, 128
- [Rosenblatt, 1956] M. Rosenblatt. Remarks on some Nonparametric Estimates of a Density Function. *Annals of Mathematical Statistics*, 27 :832–837, 1956. 48
- [Rudin, 1987] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mc Graw Hill, 3 edition, 1987. 120
- [Saul *et al.*, 2003] L. K. Saul, F. Sha, and D. D. Lee. Statistical Signal Processing with Nonnegativity Constraints. In *Europ. Conf. on Speech Process.*, volume 2, pages 1001–1004, 2003. 128
- [Seeman and Bronislaw, 1991] N. Seeman and N. Bronislaw. Nuclear Spectroscopy Method and Apparatus for Digital Pulse Height Analysis. Brevet US 5.067.090, 1991. 14
- [Sha *et al.*, 2003] F. Sha, L. K. Saul, and D. D. Lee. Multiplicative Updates for Large Margin Classifiers. In *Comput. Learn. Theory*, volume 13, pages 188–202, 2003. 128

- [Snyder, 1975] D. L. Snyder. *Random Point Processes*. Wiley, 1975. 10, 24
- [Tagliani, 2003] A. Tagliani. Numerical Inversion of the Laplace Transform on the Real Line from Expected Values. *Appl. Math. and Comput.*, 134 :459–472, 2003. 54
- [Takacs, 1958] L. Takacs. On a Probability Problem in the Theory of Counters. *Ann. Math. Statist.*, 29 :1257–1263, 1958. 17
- [Takacs, 1962] L. Takacs. *Introduction to the Theory of Queues*. Oxford University Press, 1962. 17, 23, 36, 39, 135
- [Trigano *et al.*, 2004] T. Trigano, E. Barat, T. Dautremer, and T. Brisset. Méthode d'Élimination des Pics Multiples du Signal Photonique. Brevet BD 1570 - 0405457, 2004. 46, 97
- [Trigano *et al.*, 2005] T. Trigano, T. Montagu, E. Moulines, F. Roueff, and A. Souloumiac. Analytical Pileup Correction Method for HPGe Detectors. *soumis à IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005. 135, 143, 145
- [Tsoulfanidis, 1995] N. Tsoulfanidis. *Measurement and Detection of Radiation*. Taylor and Francis, 2nd edition, 1995. 2, 3, 7, 24
- [Valko and Abate, 2003] P. Valko and J. Abate. Comparison of Sequence Accelerators for the Gaver Method of Numerical Laplace Transform Inversion. *Comp. and Math. Appl.*, 5309, 2003. 126
- [Valko and Vajda, 2002] P. Valko and S. Vajda. Inversion of Noise-Free Laplace Transforms : Towards a Standardized Set of Tests Problems. *Inv. Problems in Engng.*, 10(5) :467–483, 2002. 125
- [Van Der Waart and Wellner, 1996] A. W. Van Der Waart and J.A. Wellner. *Weak Convergence and Empirical Processes with Applications to Statistics*. Springer Verlag, 1996. 58, 59, 60, 151
- [Warburton and Hubbard, 1997] W. K. Warburton and B. Hubbard. Method and Apparatus for Digitally Based High-Speed X-ray Spectrometer. Brevet US 5.684.850, 1997. 14
- [Warburton and Zhou, 1999] W. K. Warburton and Z. Zhou. Method and Apparatus for Combinatorial Logic Signal Processor in a Digitally Based High-Speed X-ray Spectrometer. Brevet US 5.873.054, 1999. 14
- [Warburton, 1998] W. K. Warburton. Method and Apparatus for Digitally Based High-Speed X-ray Spectrometer for Direct Coupled Use with Continuous Discharge Preamplifiers. Brevet US 5.774.522, 1998. 14
- [Westphal *et al.*, 2001] G. P. Westphal, K. Jostl, P. Schroder, and W. Winkelbauer. Adaptive Digital Filter for High-Rate High-Resolution Gamma Spectrometry. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 48(3) :461–465, 2001. 78
- [Westphal, 1982] G. P. Westphal. Real-Time Correction for Counting Losses in Nuclear Pulse Spectroscopy. *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry*, 70 :387–397, 1982. 15
- [Westphal, 1984] G. P. Westphal. Application of the Virtual Pulse Generator Method to Real-Time Correction of Counting Losses in High-Rate Gamma Ray Spectroscopy. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, 226 :411–417, 1984. 15
- [Whitt, 1999] W. Whitt. Infinite-Series Representations of Laplace Transforms of Probability Density Functions for Numerical Inversion. *Jour. Oper. Res. Soc. Jap.*, 42 :268–285, 1999. 125
- [Wiernik, 1971] M. Wiernik. Normal and Random Pulse Generators for the Correction of Dead-Time Losses in Nuclear Spectrometry. *Nuclear Instruments and Methods*, 96 :325–329, 1971. 15
- [Zhang, 1990] C. H. Zhang. Fourier Methods for Estimating Mixing Densities and Distributions. *Ann. Stat.*, 18(2) :806–831, 1990. 48