



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**DURAĞAN OLMAYAN İŞARETLER İÇİN
ZAMAN-FREKANS ANALİZİ**

Yalçın ÇEKİÇ
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı
Elektronik Programı

Danışman
Doç. Dr. Aydın AKAN

OCAK – 2004

İSTANBUL

Bu çalışma 13/02/2004 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı Elektronik programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. B. Sıddık YARMAN
Işık Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi

Doç. Dr. Aydın AKAN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi

Prof. Dr. A. Fahri BURŞUK
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi

Prof. Dr. A. Hamdi KAYRAN
İstanbul Teknik Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Fakültesi

Prof. Dr. Mahmut ÜN
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim öncesinde ve sırasında daima çalışmalarımı yönlendiren, şekillendiren, her zaman yanımda olan, hocam Sayın Doç. Dr. Aydın AKAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Örnek bir bilim adamı ve insan olarak hayatımda özel ve önemli bir yeri olmuştur ve hep olacaktır. Tez izleme komitemde de yer alarak çalışmalarına katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. B. Sıddık YARMAN'a ve Sayın Prof. Dr. A. Fahri BURŞUK'a çok teşekkür ederim. Çalışmalarında yardımlarını esirgemeyen, destekleyen Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümündeki hocalarıma ve çalışma arkadaşlarıma ve Matlab programlarıyla destek olan L. İhsan YAZICI'ya teşekkürlerimi sunarım. Sevgili eşim Sema Demirci ÇEKİÇ'e de yardımları, desteği için yürekten teşekkür ederim. Tezim ile aynı adı taşıyan T-779/251099 no'lu proje çerçevesinde destek sağlayan İ.Ü. Bilimsel Araştırma Fonu Yürütücü Sekreterliği'ne teşekkür ederim.

Ocak-2004

Yalçın ÇEKİÇ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
ŞEKİL LİSTESİ	iv
TABLO LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	x
1. GİRİŞ	1
1.1 ZAMAN-FREKANS İŞARET ANALİZİNE GİRİŞ.....	1
2. MALZEME ve YÖNTEM	4
2.1. ZAMAN-FREKANS ANALİZ YÖNTEMLERİ.....	4
2.2. KISA ZAMANLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ (KZFD) VE SPEKTROGRAM.....	6
2.3. ZAMAN-FREKANS DAĞILIMLARI.....	8
2.3.1. Cohen Sınıfı Zaman-Frekans Dağılımları.....	8
2.3.1.1. Wigner Dağılımı ve Belirsizlik(Ambiguity) Fonksiyonu.....	11
2.3.1.2. Çekirdek Yöntemleri.....	23
2.3.1.2.1 Choi-Williams Yöntemi.....	25
2.3.2. İlgin (Affine) Sınıfı Zaman-Frekans Dağılımları.....	27
2.3.3. İşaret Uyumlu Zaman-Frekans Gösterimleri.....	28
2.3.3.1 1/0 Çekirdek Metodu.....	28
2.3.3.2. Radyal Gauss Çekirdek Yöntemi.....	29
2.3.4. Pozitif (Cohen-Posch Sınıfı) Dağılımlar.....	30
2.4. ZAMAN-FREKANS GÖSTERİMLERİ.....	32
2.4.1. Gabor Gösterimi.....	32
2.4.2. Malvar Gösterimi.....	37
2.4.3. Dalgacık Dönüşümü.....	39
2.5. EVRİMSEL İZGE ANALİZİ.....	43
2.5.1. Çok Pencereleli Gabor Açılımı ile Evrimsel İzge Kestirimi.....	49
2.6. YÜKSEK DERECELİ ZAMAN-FREKANS YÖNTEMLERİ.....	52
2.6.1. Wigner Yüksek Dereceli Moment İzgesi.....	53
3. BULGULAR	56
3.1.1. Kesirli Fourier Dönüşümü.....	56
3.1.2. Kesirli Fourier Serisi.....	63

3.1.3. Ayrık Zamanlı Kesirli Fourier Dönüşümü	68
3.1.3.1. AFD Dönüşüm Matrisinin Öz Değerleri Ve Öz Ayrışımı	68
3.1.3.2. S-Yöntemi	70
3.1.3.2.1. Ayrık Zamanda Açısız Dönme Kavramı	70
3.1.3.3. Öz değer Atama Kuralı	72
3.1.3.4. AKFD'nin Özellikleri	73
3.2. SÜREKLİ ZAMANLI KESİRLİ GABOR AÇILIMI	74
3.2.1. Taban Kümesinin Tamlığı	79
3.2.2.1. Taban Kümesine Ait Kesirli Diklik Koşulu	79
3.3.1. Ayrık Kesirli Gabor Açılımı	82
3.3.1.1. Ayrık Kesirli Gabor Açılımının Tamlığı	87
3.3.1.2. Ayrık Kesirli Gabor Açılımının ikili-dikliği	87
3.3.2. Ayrık Kesirli Gabor Açılımı Benzetimleri	89
3.3.3. Çok Pencereci Kesirli Gabor Açılımı	99
3.3.2. Çok Pencereci Kesirli Gabor Açılımı Benzetimleri	101
3.4.1. Kesirli Evrimsel İzge	108
3.4.2. Kesirli Evrimsel İzge Benzetimleri	113
3.4.3. En Uygun Kesir Derecesinin Bulunması İçin En İyileştirme Yöntemi	131
V. KAYNAKLAR	148
VI. ÖZGEÇMİŞ	156

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Wigner Dağılımı, Belirsizlik Fonksiyonu, ZOİF ve İOİF arasındaki ilişkiler.	15
Şekil 2.2 Çekirdeğin dört farklı formu arasındaki ilişkiler.	18
Şekil 2.3 Cohen Sınıfı Zaman-Frekans Dağılımları Arasındaki Ödünleşimler.	21
Şekil 2.4 Malvar Taban Fonksiyonu Örnekleri.	38
Şekil 3.1 Zaman frekans eksen ve orjinal $\omega - t$ eksenine göre α açısıyla döndürülmüş u - v eksen takımı	57
Şekil 3.2 Sinüsoidal Gabor açılımında kullanılan ZF düzlemi bölütlemesi	75
Şekil 3.3 Kesirli Gabor açılımında oluşturulan ZF düzlemi bölütlemesi	76
Şekil 3.4 Geleneksel Zaman-Frekans düzleminde Gabor katsayıları	78
Şekil 3.5 α kesir derecesi kadar dönmüş, VU düzleminde hesaplanacak olan $[a_{v,u,\alpha}]$ katsayı matrisini vermektedir.	78
Şekil 3.6 Ayrık Gabor açılımında kullanılan düzgün ve dikdörtgen örnekleme kafesi	83
Şekil 3.7 Ayrık kesirli Gabor açılımı ile oluşturulan örnekleme kafesi	84
Şekil 3. 8 Bir Gauss sentez penceresi	89
Şekil 3. 9 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için Analiz penceresi, $L=K=16$ kritik örnekleme durumu	90
Şekil 3. 10 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için Analiz penceresi, $L=4$, $K=32$ fazla örnekleme durumu	90
Şekil 3.11 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için Analiz penceresi, $L=1$, $K=128$ en fazla örnekleme durumu	91
Şekil 3.12 Bir çarp işaretinin $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ile klasik Gabor izgesi	91
Şekil 3.13 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ile Analiz penceresi	92
Şekil 3.14 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ Analiz penceresi, $L=4$, $K=32$, fazla örnekleme durumu	93
Şekil 3.15 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ Analiz penceresi, $L=1$, $K=128$ en fazla örnekleme durumu	93
Şekil 3.16 İşaretin $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ile kesirli Gabor analizi	94
Şekil 3.17 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ için Analiz penceresi, $L=K=16$ kritik örnekleme	95
Şekil 3.18 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ için Analiz penceresi, $L=4$, $K=32$ fazla örnekleme durumu	95
Şekil 3.19 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ için Analiz penceresi, $L=1$, $K=128$ en fazla örnekleme durumu	96
Şekil 3.20 Aynı çarp işaretin $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ile kesirli Gabor izgesi	96
Şekil 3.21 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ için Analiz penceresi, $L=K=16$ kritik örnekleme durumu	97
Şekil 3.22 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ için Analiz penceresi, $L=4$, $K=32$ fazla örnekleme durumu	98

Şekil 3.23 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ için Analiz penceresi, $L=1$, $K=128$ en fazla örnekleme durumu.....	98
Şekil 3.24 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ için kesirli Gabor izgesi	99
Şekil 3.25 Çeşitli ölçeklerdeki Gauss sentez pencereleri	102
Şekil 3.26 $\alpha=\pi/2$ için elde edilen analiz pencereleri	102
Şekil 3.27 $\alpha=\pi/4$ için elde edilen analiz pencereleri	103
Şekil 3.28 $\alpha=\pi/3$ sentez pencerelerine karşı gelen analiz pencereleri.....	103
Şekil 3.29 İki bileşenli bir işaretin klasik Gabor izgesi	104
Şekil 3.30 Bu işaretin $\alpha=\pi/4$ kesirli Gabor izgesi, $\left\{ a_{v,u,\alpha} ^2\right\}$	104
Şekil 3.31 Aynı işaretin $\alpha=-\pi/4$ kesirli Gabor izgesi, n-w düzlemine ötelenerek.....	105
Şekil 3.32 Keşişen iki çırp işaretin klasik Gabor izgesi, $\alpha=\pi/2$	106
Şekil 3.33 Bu işaretin $\alpha=\pi/4$ ile kesirli Gabor izgesi, $\left\{ a_{v,u,\alpha} ^2\right\}$	106
Şekil 3.34 $\alpha=\pi/4$ kesirli Gabor izgesi, n-w düzlemine ötelenmiş olarak.....	107
Şekil 3.35 Aynı işaretin $\alpha=-\pi/4$ ile kesirli Gabor izgesi, $\left\{ a_{v,u,\alpha} ^2\right\}$	107
Şekil 3.36 $\alpha=-\pi/4$ kesirli Gabor izgesi, n-w düzlemine ötelenmiş olarak	108
Şekil 3.37 $\alpha=-\pi/2$ için hesaplanan $p(n,l)$ penceresi	113
Şekil 3.38 Yukardaki pencerelerin klasik Gabor izgeleri	114
Şekil 3.39 $p(n,l)$ penceresi $\alpha=-\pi/3$, $n=32,64,96$	115
Şekil 3.40 Yukardaki işaretin Gabor izgesi	116
Şekil 3.41 $p(n,l)$ penceresi, $\alpha=\pi/4$, $n=32,64,96$	117
Şekil 3.42 $\alpha=\pi/4$ için $p(n,l)$ pencere ZF izgesi	118
Şekil 3.43 $\alpha=\pi/6$, $n=32,64,96$ için $p(n,l)$ pencereleri	119
Şekil 3.44 $\alpha=\pi/6$ için $p(n,l)$ penceresinin ZF izgesi.....	120
Şekil 3.45 $\alpha=-\pi/4$, $n=32,64,96$ için $p(n,l)$ pencereleri.....	121
Şekil 3.46 $\alpha=-\pi/4$, $n=32,64,96$ için $p(n,l)$ ZF izgesi	122
Şekil 3.47 $\alpha=\pi/4$, $L=4$, $K=128$, $I=4$ ile analiz edilmiş, Eİ kestirimi	124
Şekil 3.48 $\alpha=3\pi/4$, $L=4$, $K=128$, $I=4$ ile analiz edilmiş, Eİ kestirimi	124
Şekil 3.49 Çok pencereli sinüsoidal Eİ ile analiz edilerek izge kestirimi.....	125
Şekil 3.50 Aynı işaretin Wigner-Ville dağılımı	125
Şekil 3.51 $\alpha=\pi/4$, $L=2$, $K=128$, $I=3$ için kesirli Eİ kestirimi	126
Şekil 3.52 $\alpha=-\pi/4$ ile de hesaplanmış Eİ	127
Şekil 3.53 İşaretin Gabor katsayılarının genlik karesi.....	127
Şekil 3.54 600ms'lik kuş sesi.....	128
Şekil 3.55 125ms'lik kuş sesi.....	129
Şekil 3.56 125ms'lik işaretin klasik gabor ile elde edilen Evrimsel izgesi	129
Şekil 3.57 125ms'lik kuş sesinin Kesirli Fourier $\alpha=\pi/6$ ile yapılmış Evrimsel izgesi.	130
Şekil 3.58 125ms'lik kuş sesinin döndürme etkisi yok edildikten sonraki Evrimsel izgesi	130
Şekil 3.59 Keşişen iki çırp işaretinin Sinüsoidal Eİ'si	133
Şekil 3.60 Keşişen iki çırp işaretinin Sinüsoidal Eİ'si	133
Şekil 3.61 İşarein optimum Evrimsel İzgesi	134
Şekil 3.62 Bir sinüsoidal FM ile $\omega_0=\pi/2$ frekanslı bir sinüsoidalın Eİ'si	135
Şekil 3.63 Bir sinüsoidal FM ile $\omega_0=\pi/2$ frekanslı bir sinüsoidalın Eİ'si	135
Şekil 3.64 İncelenen işaretin optimum Evrimsel İzge'si	136
Şekil 3.65 Bir sinüsoidal FM ile doğrusal çırp'dan oluşan işaretin sinüsoidalın Eİ'si	137

Şekil 3.66 Bir sinüsoidal FM ile doğrusal çarpı'dan oluşan işaretin sinüsoidalın EI'si	137
Şekil 3.67 İncelenen işaretin optimum Evrimsel İzge'si	138
Şekil 3.68 İncelenen işaretin sinüsoidal Evrimsel İzge'si	139
Şekil 3.69 İki karesel çarpın birleşiminden oluşan işaretin sinüsoidal Evrimsel İzge'si	139
Şekil 3.70 İki karesel çarpın birleşiminden oluşan işaretin optimum Evrimsel İzge'si	140
Şekil 3.71 1.375 sn uzunluğunda insan sesi örneği	141
Şekil 3.72 Bu ses işaretinin sinüsoidal Evrimsel izgesi	141
Şekil 3.73 Aynı ses işaretinin Spektrogramı	142
Şekil 3.74 Bu ses işaretinin optimum kesirli evrimsel izgesi	142
Şekil 3.75 Gürültülü işaretin evrimsel izgesi	143
Şekil 3.76 Jammer eklenmiş işaretin klasik evrimsel izgesi SJR=0db	144
Şekil 3.77 Jammer eklenmiş işaretin $\alpha=\pi/4$ için Kesirli Evrimsel izgesi	144
Şekil 3.78 Jammer'ı kesildikten sonraki kesirli evrimsel izge	145

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 Zaman-Frekans Dağılımlarının İstenilen Bazı Özellikleri	10
Tablo 2.2 Bazı İstenen Özellikler ve Uygun Çekirdek Sınırlamaları	20
Tablo-3.1 KFD'ünün bazı özellikleri görülmektedir.....	62
Tablo 3. 2 KFS'inin özellikleri	67
Tablo 3. 3 FS ve KFS'nin öteleme ve modülasyon kısıtlamaları.....	67
Tablo 3. 4 AFD matrisinin öz vektörlerinin katlılığı.....	69
Tablo 3.5 AKFD çekirdek matrisini öz değer atama kuralı	69

SEMBOL LİSTESİ

f	: Frekans
f_0	: Temel Frekans
ω	: Açısal Frekans
N	: Pencere Uzunluğu
P	: Enerji
R	: Ötilinti Fonksiyonu
T	: Periyot
$s(t)$	: Sürekli Zamanlı İşaret
$s(n)$	: Ayrık Zamanlı İşaret
μ	: Ortalama
σ	: Süre
$\Psi_{(\theta, \tau)}$	: Zaman Frekans Çekirdeği
$A_x(\theta, \tau)$	: Belirsizlik Fonksiyonu
$E\dot{I}$	: Evrimsel İzge
ZF	: Zaman Frekan
KZFD	: Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü
DD	: Dalgacık Dönüşümü
WG	: Wigner Dağılımı

ÖZET

Durağan Olmayan İşaretler İçin Zaman-Frekans Analizi

Bu tez çalışmasında, durağan olmayan işaretlerin zaman frekans analizinde yaygın olarak kullanılan Gabor gösterimi, sinüsoidal taban fonksiyonları kullanan klasik açılımdan kesirli taban fonksiyonları ile genel bir açılım haline getirilmiştir. Bu açılımın analiz ve sentez taban kümelerine ait tamlık ve ikili diklik koşulları da elde edilmiştir.

Daha sonra, sayısal işaretlerin işlenmesinde kullanılabilecek ayrık zamanlı Kesirli bir Gabor açılımı sürekli zamandaki tanımdan örnekleme kullanılarak elde edilmiştir. Bu açılımın tamlık ve diklik koşullarının elde edilmesiyle, Kesirli Gabor açılımı ayrık zamanlı işaretlerin analizinde bilgisayar ortamında hesaplanabilir hale gelmiştir. Ayrıca yapılan işaret analizinin çözünürlüğünü artırmak amacıyla bir pencerenin zamanda ölçeklenmesiyle elde edilen farklı pencereler ile Çok Pencereli Kesirli Gabor açılımı da verilmiştir.

Tez çalışmasının sonunda durağan olmayan işaretlerin zamanla değişen izge kestirimi için Evrimsel İzge yaklaşımı verilmiştir. Bu izge gösterimi ile kesirli Gabor açılımının katsayıları arasında bir ilişki kurularak Evrimsel İzge çekirdeği elde edilmiştir. Evrimsel izge, bu gösterimin zamanla değişen çekirdeğinin genlik karesi olarak verilmektedir. Böylece işaret için, hem bir Zaman Frekans gösterimi hem de bir Zaman Frekans izgesi aynı anda elde edilmektedir. Önerilen çok pencereli kesirli Evrimsel izge yöntemi ile pozitif ve yüksek çözünürlüğe sahip bir Zaman Frekans izgesi elde edilebilmektedir.

SUMMARY

Time-Frequency Analysis for Non-Stationary Signals

In this dissertation, the traditional Gabor representation with sinusoidal basis functions, which is widely used in the time-frequency analysis of non-stationary signals, is extended to the Fractional Gabor expansion with fractionally modulated basis functions. The completeness and biorthogonality conditions of the analysis and synthesis basis sets of the expansion are derived.

Then, a discrete fractional Gabor expansion, that can be used to analyze discrete-time signals, is obtained by sampling the continuous-time representation. By deriving the completeness and biorthogonality conditions, the discrete fractional Gabor expansion can be implemented on a computer to analyze discrete-time signals. Furthermore, to increase the time-frequency resolution of the signal representation, time-scaled version of a mother window are used to obtain Multi-window fractional Gabor expansion.

Finally an evolutionary spectral analysis approach is given for the time-varying spectral analysis of non-stationary signals. The connection between spectral representation and the fractional Gabor coefficient is established and the evolutionary kernel is estimated. Evolutionary spectrum is calculated as the magnitude square of this time-varying kernel. Thus, a time-frequency signal representation and a time-varying spectrum is obtained simultaneously. Using the proposed multi-window fractional evolutionary spectral method, positive time-frequency spectra with high resolution can be calculated.

1. GİRİŞ

Genellikle fiziksel bir sistemin davranışına ya da durumuna ilişkin bilgi taşıyan her çeşit büyüklük işaret olarak tanımlanır [1]. İşaretler insanların birbirleriyle ve insanların makinalar ile iletişim kurmaları olarak da tanımlanabilmektedir [2]. Bu tanımlamalara göre insanlar arasındaki konuşma, bilgisayarların programlanması işaretlere örnek olarak verilebileceği gibi bir ildeki güneşin günlük değişimi veya sıcaklık değişimi de işaret olarak kabul edilebilir.

İşaret işleme, bir işaretin içeriğini değiştirmek, onu tekrar temsil etmek veya başka bir forma çevirmeye yöneliktir. Örneğin: Çeşitli işaretlerin bir şekilde bileşiminden oluşan işareti, bileşenlerine ayırmak, bazı bileşenlerin iyileştirilmesi veya parametrelerinin değiştirilmesi. Yıllar boyunca işaret işleme çok değişik alanlarda uygulamalar bulmuştur; ses, veri iletişimi, biyomedikal mühendisliği, akustik, sonar, radar, sismoloji, petrol aramaları, robotiks bunlar arasında sayılabilir.

1.1 ZAMAN-FREKANS İŞARET ANALİZİNE GİRİŞ

İşaretleri, değişkenlerini dikkate alarak iki büyük grupta toplamak mümkündür [1].

- a- Sürekli zamanlı işaretler
- b- Ayırık zamanlı işaretler

Konuşma, ısı fonksiyonları sürekli zamanlı işaretlere, her sabahki sıcaklığın kaydedilmesi ayırık zamanlı işaretlere örnek olarak verilebilir.

İşaretin, tüm t anlarında alacağı değerler biliniyorsa deterministik, herhangi bir t anında, genlik değerinin belirli iki değer arasında kalma olasılığı biliniyorsa bu işarete *rasgele işaret* denir. Bu işaret olasılık yoğunluk fonksiyonu ile tanımlanır. Eğer rastgele işaretin istatistiksel özellikleri zamandan bağımsızsa (değişmiyorsa), bu işaretin olasılık yoğunluk fonksiyonu da zamandan bağımsızdır. Böyle işaretlere “durağan işaretler” denir. Tabii

istatistiksel özellikleri zamanla değişen işaretlere de “durağan olmayan” işaretler denir. İşaretlerin çoğu rastgele işaret olduğundan, bunların gösteriminde kullanılan matematiksel işlemler rastgele işlemlerdir [2].

İşaretlerin zamanla değişimi temel bir gösterimdir çünkü “zaman” temel bir göstergedir [3]. İşaretlerin değişik gösterimlerinin, işaretin doğasını anlamakta pek çok yararı olmaktadır. Bu değişik gösterimler işareti “tam bir işlevler (fonksiyonlar) seti” ile tanımlamak yolu ile elde edilebilirler. Olaya matematiksel olarak bakacak olursak, bir işareti temsil etmenin sayısız yolu vardır. Bir gösterimi diğerlerinden önemli hale getiren; o işaretin anlaşılmasında önemli olan *fiziksel niceliğin*, kullanılan gösterimde, diğer gösterimlere göre daha iyi temsil edilebilmesidir. Zamanın yanında en önemli niceliklerden bir tanesi de “frekans” tır. İşaretlerin, frekans gösteriminin matematiği Fourier tarafından tanımlanmıştır. Bu tanımlamada, işaretlerin, bir temel frekans ve bunun harmonik frekanslarının, değişik genliklerle bir doğrusal birleşimi şeklinde temsil edilebileceğini öne sürmüştür. Fourier analizinin gücü, işareti onu oluşturan frekans bileşenlerine ayırması ve bunu o bileşenin gücü ile doğru orantılı elde etmesidir. Fourier analizinden elde edilen matematiksel model o işaretin “izgesel” gösterimi olarak tanımlanır (işareti oluşturan frekans bileşenlerinin dağılımını gösteren grafiğe izge denir). Bu izge analizi ile durağan işaretlerin frekans analizi ya da güç spektrumunu klasik Fourier dönüşümü ile elde edilebilir. Bu analizin kötü yanı ise bize izgeyi oluşturan frekans bileşenlerinin hangi t anında ortaya çıktığı bilgisini vermemesidir [4]. Gün doğumundan, gün batımına kadar olan zaman diliminde, güneşin bulunduğumuz noktaya yaptığı ısımanın Fourier analizini yapacak olursak, bu analiz bize ısımaya ait izgeyi vermesine rağmen, ısımanın en yüksek olduğu saat hakkında bir bilgi vermez. Ama biz bu analizi gün boyu değil de, günün doğumundan gün batımına kadar beşer dakikalık zaman dilimleri için yapacak olursak, ısımanın maksimum olduğu zamanı tespit etmek kolay olacaktır. Bu analizi yaparken, beşer dakikalık süreler içerisinde güneşin ısımasının yavaş değiştiği kabulü yapılmıştır. Eğer bu beş dakikalık zaman fazla ise, bunu azaltmak daha iyi bir zaman frekans çözünürlüğü verecektir. Bu Kısa-Zamanlı Fourier Dönüşüm’ünüm (KZFD), (short-time Fourier veya spektrogram) temel çıkış noktasıdır. KSFD zamanla değişen işaretlerin analizinde kullanılan standart bir yöntemdir.

Zaman Frekans (ZF) analizinin genel amacı, bir işareti oluşturan bileşenlerin her birini zaman frekans düzleminde iyi bir çözünürlükte göstermek olarak özetlenebilir yada işaret için zamanla değişen bir güç izge'sini kestirmek'tir. Kısa süreli Fourier dönüşümü dışında son 25 yıl içinde çok çeşitli yöntem, işaretlerin zaman frekans analizi için geliştirilmiş ve başarı ile uygulanmıştır. Cohen sınıfı zaman frekans dağılımları, ilgin sınıfı zaman frekans dağılımları, evrimsel izge teorisi, zaman frekans işaret gösterimleri (dalgacık dönüşümü, Gabor, Malvar açılımları) ve yüksek dereceli zaman frekans dağılımları bunlara örnek olarak sayılabilir. Bu yöntemler, ses işleme, biyometrik ve endüstriyel işaret işleme, haberleşme sistemlerinde işaret analizi ve modellenmesi gibi bir çok alanda kullanılmaktadır.

Bu tezde ise, durağan olmayan işaretlerin zaman frekans analizinde yaygın olarak kullanılan Gabor gösterimi sinüsoidal taban fonksiyonları kullanan klasik açılımdan, kesirli taban fonksiyonları ile genel bir açılım haline getirilmiştir. Bu açılımın analiz ve sentez taban kümelerine ait tamlık ve ikili diklik koşulları elde edilmiştir. Sayısal işaretlerin işlenmesinde kullanılabilecek ayrık zamanlı Kesirli bir Gabor açılımı sürekli zamandaki tanımdan örnekleme kullanılarak elde edilmiştir. Bu açılımın tamlık ve diklik koşullarının elde edilmesiyle, Kesirli Gabor açılımı ayrık zamanlı işaretlerin analizinde bilgisayar ortamında hesaplanabilir hale gelmiştir. Bu açılımla ilgili çeşitli örnek analizler yapılmıştır. Ayrıca yapılan işaret analizinin çözünürlüğünü artırmak amacıyla bir pencerenin zamanda ölçeklenmesiyle elde edilen farklı pencereler ile çok pencereli kesirli Gabor açılımı da verilmiştir.

Çalışmasının sonunda durağan olmayan işaretlerin zamanla değişen izge kestirimi için Evrimsel İzge (EI) yaklaşımı verilmiştir. Bu izge gösterimi ile kesirli Gabor açılımının katsayıları arasında bir ilişki kurularak Evrimsel İzge çekirdeği elde edilmiştir. Evrimsel izge, bu gösterimin zamanla değişen çekirdeğinin genlik karesi olarak verilmektedir. Böylece işaret için, hem bir Zaman Frekans gösterimi hem de bir Zaman Frekans izgesi aynı anda elde edilmektedir. Önerilen çok pencereli kesirli Evrimsel izge yöntemi ile pozitif ve yüksek çözünürlüğe sahip bir ZF izgesi elde edilebilmektedir.

2. MALZEME ve YÖNTEM

Bu bölümde, zaman frekans işaret analizi için geliştirilmiş çeşitli yöntemler sınıflandırılarak önemli yöntemler hakkında kısa bilgiler verilecektir. Ayrıca bu tezde sunulan yöntemlere motivasyon oluşturma açısından mevcut yöntemlerin eksiklikleri tartışılacaktır.

2.1. ZAMAN-FREKANS ANALİZ YÖNTEMLERİ

Zaman frekans dağılımlarını oluşturmak için birçok farklı yöntem olduğundan, bunları yapılarına ve özelliklerine göre sınıflandırmak faydalıdır:

1. Doğrusal zaman frekans dağılımları
2. Karesel zaman frekans dağılımları

Doğrusal zaman frekans dağılımlarına Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü (KZFD) ve Dalgacık Dönüşümü (DD) örnek olarak verilebilir. Karesel zaman frekans dağılımlarına spektrogram, skalogram (DD'nin genliğinin karesi), Wigner Dağılımı (WG) ve genel olarak Cohen sınıfı zaman frekans dağılımları örnek olarak verilebilir. Zaman frekans dağılımları, çoğu kez bir işarete bir operatör uygulandığı zamanki davranışı ile karakterize edilebilir. Bu operatörlerin en belirgin örnekleri zamanda öteleme operatörü, frekansta öteleme operatörü (frekans modülasyonu operatörü) ve ölçekleme operatörüdür. İşaretteki değişim, zaman frekans dağılımına yansiyorsa bu tip zaman frekans dağılımlarına operatörle değişen (covariant) denilir. Örneğin, eğer $y(t)=x(t-t_0)$ ise zamanda öteleme operatörü ile değişen bir zaman frekans dağılımı olduğunda $T_y(t, \omega)=T_x(t-t_0, \omega)$ eşitliğini sağlamalıdır.

1. Cohen Sınıfı: Zamanda ve frekansta öteleme ile değişen,
2. İlgin Sınıf (Affine Class): zamanda öteleme ve ölçekleme ile değişen,
3. Hiperbolik Sınıf: hiperbolik zaman ötelemesi ve ölçekleme ile değişen,

İki sınıfın kesişimleri, Wigner Dağılımı gibi üç operatörle de değişen zaman frekans dağılımlarını içerir. Spektrogramlar karesel işaret fonksiyonlarıdır, zamanda öteleme ve

frekansta öteleme ile değişirler, bu nedenle de Cohen sınıfının üyelerindendir. Benzer şekilde, skalogramlar da karesel işaret fonksiyonlarıdır. Zamanda öteleme ve ölçekleme ile değişmektedir, bu nedenle de İlgin sınıfın üyelerindendir. Son olarak, karesel zaman frekans dağılımları yukarıda bahsedilen üç operatörden başka operatörlerle de değişen olarak tanımlanabilir. Zaman frekans dağılımlarının hiperbolik sınıfı buna bir örnektir [5]. Hiperbolik sınıf ile İlgin sınıf kesişir, ama hiperbolik sınıf, Cohen sınıfı ile kesişmez. Baraniuk [6] son zamanlarda karesel zaman frekans dağılımlarının keyfi seçilmiş operatörlerle de değiştiğine dair önemli bir sonuç göstermiştir. Karesel dağılımların sorun çıkaran bir yönü her zaman çapraz (cross) terimler içermesidir. Çapraz terimler iki nedenden dolayı istenmez. Birincisi, doğru yayılım fonksiyonu negatif olmayabilir, fakat çapraz terimler negatif değerlere sahip olabilir. İkincisi, çapraz terimler işaret içinde genellikle enerji taşıyor olarak gösterilemez.

Ayrıca zaman frekans dağılımları, işaretin ne doğrusal ne de karesel fonksiyonları olan durumlar da vardır. Bunlar üç grupta sınıflandırılabilir: karesel dağılıma yakın olanlar, açıkça yüksek dereceli dağılımlar ve pozitif dağılımlar. Bazı yöntemler karesel olan Cohen ve İlgin sınıflarına çok benzerdir, fakat karesel olmadığı için “karesele yakın” diye adlandıracağız. Zaman frekans dağılım çekirdeği uyarlanır işaret olmasına izin veren örnekler karesel formlara yakındır [7,8,9,10]. Auger ve Flandrin [11]’in yeniden ayırma metodu karesele yakın olanlar için diğer bir yaklaşımdır. Karesele yakın zaman frekans dağılımları, çoğu zaman karesel zaman frekans dağılımlarından daha iyi performans sağlarlar. Diğer zaman frekans dağılımları işaretin açıkça yüksek dereceli fonksiyonudur. Bazı örnekleri, Boashash ve O’Shea [12]’nin polinomsal Wigner dağılımları, Stankovic [13,14,15]’in L-Wigner dağılımları, Fonollosa ve Nikias [16]’in Wigner yüksek dereceli moment izgesidir. Bu yüksek dereceli yöntemler çok özel işaret sınıfları için dikkate değer sonuçlar verir, fakat birçok işaret için çok verimli olmayan sonuçlar sağlar. Bu yüksek dereceli dağılımlar umut vermektedir, fakat şu anda çok iyi anlaşılamamışlardır.

Zaman frekans dağılımının pozitif değerli olması sıklıkla arzu edilir ve Cohen her zaman pozitif değerli olan genel bir zaman frekans sınıfı oluşturmuştur [17]. Madem ki bu çok genel bir sınıftır, yukarıda bahsedilen bütün sınıflarla (karesel olan veya olmayan) kesişir. Bu sınıf ile ilgili ana sorun, sınıf içinde zaman frekans dağılımlarının nasıl

oluşturulacağı açık değildir. Loughlin [18] ve Sang [19] karesel zaman frekans dağılımlarından pozitif zaman frekans dağılımları yaratmışlardır.

Son çalışmalarda, zaman ve frekanstan farklı niceliklerden dağılımlar oluşturulmuştur [3,20,21,22]. Zaman ve frekans dışında kalan en genel dağılımlar, zaman ve ölçeklemedir. Ölçekleme genel düşüncesi, frekans ve bazı zaman frekans dağılımları ile yakından ilişkilidir. Örneğin; İlgin sınıf zaman-ölçekleme dağılımlarına benzerdir.

2.2. KISA ZAMANLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ (KZFD) VE SPEKTROGRAM

Zaman içinde istatistiksel özelliği değişen işaretler durağan olmayan işaretler olarak bilinir. Durağan olmayan işaretlerin analizi için Fourier Dönüşümü yetersiz kalır. Durağan olmayan işaretlerin analizinde en çok kullanılan yöntem, KZFD'dür [3]. Çünkü KZFD basit ve etkili bir yöntemdir. Örneğin; başlangıcında keman, sonunda davul sesi olan, bir saat süren bir müzik parçası dinlediğimizi kabul edelim. Bu ses işaretinin tümünün Fourier analizini yaparsak, enerji izgesi, keman ve davul seslerinin sahip olduğu frekanslarda sıçramalar gösterecektir. Bu bize parçada keman ve davulun olduğunu söylemekte fakat keman ve davul seslerinin ne zaman oluştuğunu gösteren bir bilgi vermemektedir. Bu bilgiyi elde etmenin en uygun yolu, bir saatlik işareti beş dakikalık parçalara ayırmak ve her bir aralığın Fourier analizini yapmaktır. Her bir parçanın izgesine ayrı ayrı bakarsak, keman ve davul seslerinin hangi beş dakikalık aralıkta oluştuğunu görebiliriz. Daha iyi bir yerleştirme yapmak istersek, bir saati bir dakikalık daha küçük parçalara ayırır ve her bir parçanın Fourier analizini yaparız. Yani KZFD'nin temel fikri, durağan olmayan işareti durağan olan küçük zaman parçalarına ayırmak ve bu zaman parçalarındaki frekansları belirlemek için bu aralıkların Fourier analizini yapmaktır. Fourier analizi yapılmış parçaların bir araya getirilmesi, işaretin izgesinin zaman içinde nasıl değiştiğini gösterecektir.

Bu parçalar içinde, işaretin istatistiklerinin yavaş değiştiği farzedilir ve zaman bölümü içerisinde işaret parçalara ayrılarak izgesel analizi yapılır. Bilgi, birbiri üzerine örtüşen

pencerelerin içine bölünerek konur. Her alt bölümlemenin analizi genelde zamandan bağımsız izge vermek için Fourier dönüşümü ile kestirilir. Bir işaretin, $x(t)$, KZFD'ü

$$X(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau - t)x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.1)$$

ile verilir, burada $w(t)$ pencere fonksiyonudur. $x(t)$ 'nin enerji yoğunluğu veya spektrogramı

$$S_{KZFD}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} |X(t, \omega)|^2 \quad (2.2)$$

denklemleriyle verilir. Zamandaki değişimleri yakalamak için zaman bölümlemeleri yeteri kadar dar ve frekans bilgisini içerecek kadar da uzun olmalıdır. Bir başka deyişle iyi bir zaman yerleştirmesi isteniyorsa $w(t)$ 'lik dar pencere kullanma zorunluluğu vardır. Eğer ki iyi bir frekans yerleştirmesi yapılmak isteniyorsa, bu defa da geniş bantlı bir pencere kullanma zorunluluğu vardır. Buna karşın pencere zamanda ve frekansta aynı anda dar yapılamaz. Bunun sebebi de zaman ve frekans arasındaki belirsizlik prensibidir [3]. Zaman frekans analizi içinde belirsizlik prensibi işaretin enerjisinin zaman ve frekans içinde yayılımı için alt sınırları sağlar. İşaretin zaman ve frekans içindeki yayılımını tanımlamak için, ilk olarak işaretin ortalama zaman ve ortalama frekansının tanımlanmasına ihtiyaç duyulur:

$$\begin{aligned} \mu_t &= \int t |x(t)|^2 dt \\ \mu_\omega &= \int \omega |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (2.3)$$

işaretin zaman (süre) ve frekans (bant genişliği) yayılımı :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \int (t - \mu_t)^2 |x(t)|^2 dt \\ \sigma_\omega^2 &= \int (\omega - \mu_\omega)^2 |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Belirsizlik prensibi

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir. Bu nedenle işaret keyfi küçük süre ve bant genişliğine sahip olamayabilir. Bir Gauss işareti:

$$x(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\alpha t^2 / 2} \quad (2.6)$$

α rasgele seçilmiş bir sabit olmak üzere, bu sınır ile eşitliği karşılar.

Spektrogramın yerleştirilmesinin düzeltilmesi için farklı pencereler kullanarak elde edilen sonuçların ortalamasını almak mümkündür [23]. KZFD dezavantajlarının yanı sıra, iyi çalışan ve iyi çözüm veren bir yöntemdir ve temeli fiziksel prensiplere uygundur. Birçok işaret için, bizim beklentimize uygun, anlamlı zaman frekans yapısı verir. KZFD'nün belirgin avantajı kestirdiği izgenin her zaman pozitif olmasıdır.

2.3. ZAMAN-FREKANS DAĞILIMLARI

2.3.1. Cohen Sınıfı Zaman-Frekans Dağılımları

Daha önce belirtildiği gibi, zaman frekans dağılımlarını oluşturmada birçok yöntem vardır. Zaman frekans dağılımlarının ana noktalarını sağlamak için, dağılımlarının sağlaması gereken bir çok arzu edilir özellikler önermişlerdir. Örneğin, zaman frekans dağılımları genellikle enerji dağılımları olarak düşünüldüğünden, bunlar gerçek ve pozitif fonksiyonlar olmalıdır. Aynı zamanda, zaman frekans dağılımının zaman sınırı, zaman frekans dağılımının frekans üzerinden integralidir ve zaman sınırı sinyal enerjisinin zaman üzerindeki dağılımıyla aynı olmalıdır. Bu özellikler ve diğer birkaç özellik Tablo 2.1'de listelenmiştir [24].

Bir operatörün yoğunluk fonksiyonu ortak değişen veya değişmeyen olması fikri zaman frekans analizinde önemli rol oynar. En çok kullanılan üç operatör; zamanda öteleme operatörü, frekansta öteleme ve ölçekleme operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}(T_{t_0}x)(t) &= x(t - t_0) \\ (F_{\omega_0}x)(t) &= x(t)e^{j\omega_0 t} \\ (D_ax)(t) &= x(at)\end{aligned}\tag{2.40}$$

İşaretteki değişim fonksiyona yansiyorsa, o işaretin fonksiyonuna birlikte değişen denir. İşaretteki değişmeye rağmen fonksiyon aynı kalırsa o işaretin fonksiyonu operatöre göre değişmeyendir denir.

Tablo 2.1 Zaman-Frekans Dağılımlarının İstenilen Bazı Özellikleri

Gerçel:	$T_x(t, \omega) = T_x^*(t, \omega)$
Pozitiflik:	$T_x(t, \omega) \geq 0$
Zaman Sınır Yoğunluğu:	$\int T_x(t, \omega) d\omega = x(t) ^2$
Sıklık Sınır Yoğunluğu:	$\int T_x(t, \omega) dt = X(\omega) ^2$
Anlık Sıklık:	$\frac{\int \omega T_x(t, \omega) d\omega}{\int T_x(t, \omega) d\omega} = \frac{d}{dt} \arg\{x(t)\}$
Grup Gecikmesi:	$\frac{\int t T_x(t, \omega) dt}{\int T_x(t, \omega) dt} = \frac{d}{d\omega} \arg\{X(\omega)\}$
Sonlu Zaman Desteği:	Eğer $[t_1, t_2]$ dışında $x(t) = 0$ ise $[t_1, t_2]$ dışındaki t için $T_x(t, \omega) = 0$ 'dır.
Sonlu Sıklık Desteği:	Eğer $[\omega_1, \omega_2]$ dışında $X(\omega) = 0$ ise $[\omega_1, \omega_2]$ dışındaki ω için $T_x(t, \omega) = 0$ 'dır.
Güçlü Zaman Desteği :	Eğer $x(t) = 0$ ise $T_x(t, \omega) = 0$ 'dır
Güçlü Sıklık Desteği:	Eğer $X(\omega) = 0$ ise $T_x(t, \omega) = 0$ 'dır
Moyal Formülü:	$\iint T_x(t, \omega) T_y^*(t, \omega) dt d\omega = \int x(t) y^*(t) dt$

Örneğin, zaman-enerji yoğunluğu, $|x(t)|^2$, zamanda ötelemeyle birlikte değişendir ve frekans kaymalarına değişmeyendir. Benzer olarak, frekans-enerji yoğunluğu $|X(\omega)|^2$ frekansta ötelemeyle birlikte değişen ve zamanda ötelemeyle değişmeyendir. Genelde zaman frekans dağılımlarının yukarıdaki üç operatöre göre birlikte değişen olması istenilen bir şeydir. $y(t)$, $x(t)$ 'nin zaman ve frekansta kaydırılmış hali olsun:

$$y(t) = (F_{\omega_0} T_{t_0} x)(t) \quad (2.41)$$

Eğer bir zaman frekans dağılımı,

$$T_y(t - t_0, \omega - \omega_0) = T_x(t, \omega) \quad (2.42)$$

eşitliğini sağlıyorsa, zamanda ve frekansta ötelemeyle ortak değişendir. Benzer olarak $z(t)$, $x(t)$ 'nin ölçeklenmiş versiyonu olsun:

$$z(t) = (D_a x)(t) \quad (2.43)$$

Bir zaman frekans dağılımı eğer

$$aT_z(at, \omega / a) = T_x(t, \omega) \quad (2.44)$$

şartını sağlarsa ölçeklemeye ortak değişendir denir.

2.3.1.1. Wigner Dağılımı ve Belirsizlik(Ambiguity) Fonksiyonu

KZFD'nin incelenmesinde kullanılan pencereler, en iyi çözünürlüğü işaretin kendisiyle benzer oldukları durumda sağlarlar. Bu da bize Wigner Dağılımının sezgisel açıklamasını

$$W_x(t, \omega) = 2e^{j\omega/2} KZFD_x(2t, 2\omega; h) \quad (2.45)$$

şeklinde sağlar. Burada $h(\tau)=x^*(\tau)$ dur. Wigner Dağılımı daha genel olarak aşağıdaki formda gösterilir:

$$W_x(t, \omega) = \int x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.46)$$

Wigner [25] tarafından kuantum mekaniği alanında türetilmiş ve daha sonra Ville [26] tarafından işaret işleme için genişletilmiştir. Wigner Dağılımı, zaman frekans dağılımlarında olması istenen birçok özelliği sağlar (pozitiflik, güçlü zaman desteği ve güçlü frekans desteği hariç). Belki de Wigner Dağılımının en kayda değer özelliği Gauss pencerelemiş doğrusal çarp için gösterdiği etkidir. $x(t) = e^{-ct^2} e^{j(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)}$ işareti için Wigner Dağılımı enerjii, işaretin anlık frekansı boyunca yoğunlaştırır. İşaretin Wigner Dağılımı

$$W_x(t, \omega) = e^{-(\omega - a_1 t - 2a_2 t^2) / 2c} e^{-2ct^2} \quad (2.47)$$

şeklinde verilmiştir. Wigner Dağılımı zamanda öteleme, frekansta öteleme ve ölçekleme ile birlikte değişir.

$x(t)$ ve $y(t)$ gibi iki işaretin toplamının Wigner Dağılımı, her bir işaretin Wigner Dağılımları toplamına eşit değildir. Onun yerine her bir Wigner Dağılımının toplamına, her iki işaretin çapraz Wigner Dağılımı olan başka bir işaretin toplanması ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W_{x+y}(t, \omega) = W_x(t, \omega) + W_y(t, \omega) + 2\Re\{W_{x,y}(t, \omega)\} \quad (2.48)$$

burada çapraz Wigner Dağılımı

$$W_{x,y}(t, \omega) = \int x(t + \frac{\tau}{2}) y^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.49)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İki işaretin çapraz Wigner Dağılımı, genellikle içerikteki bir çapraz terim olarak adlandırılır. Bütün karesel zaman frekans dağılımları, spektrogram gibi, çapraz terimleri içereceklerdir. Buna rağmen kısaca açıklanacak nedenlerden dolayı, spektrogram içindeki çapraz terimler, Wigner Dağılımındakiiler zayıflamadığı halde, zayıflamaktadırlar. Çapraz terimler aynı zamanda tek bir işaret bileşeninin içinde de oluşabilirler. Çapraz terimler, oto terimler arasındaki etkileşimlere bağlıyken, işaretin enerji dağılımını gerçekten temsil eden Wigner dağılımının parçaları olarak, daha çok belli-belirsiz bir oto terim tanımlanır. Çapraz terimler, Wigner Dağılımı ve enerji yoğunluk fonksiyonu arasındaki benzerliği iki şekilde zayıflatır. Birincisi, çapraz terimler işarete bulunan enerjiyi göstermez ve ikincisi, gerçek yoğunluk fonksiyonunda olmayan negatif değerler alırlar. Wigner dağılımlarındaki çapraz terimlerin yapısı detaylı olarak [27,28]'te çalışılmış ve iyi anlaşılmıştır. İki oto terimin zamanda Δt ve frekansta $\Delta \omega$ kadar ayrıldığı düşünülürse, zaman frekans düzleminde iki tane oto terimin arasına, bir çapraz terim tam olarak ortaya yerleştirilmiştir ve bu çapraz terim $\Delta \omega$ hızıyla zaman boyutunda osilasyon yapacak ve Δt hızıyla da frekans boyutunda osilasyon yapacaktır. Bir işaret oluşturulduğunda, Wigner dağılımını oto terimlerine ve çapraz terimlerine ayırmak oldukça kolaydır, fakat gerçek bir işaret için bu ayırımı frekansla yapmak mümkün değildir.

Analitik bir işaret kullanmanın avantajı şu şekilde anlatılabilir. Bir, gerçek değerli işaret çift izgeye sahiptir ve böyle işaretin Wigner Dağılımı

$$W_x(t, \omega) = W_x(t, -\omega) \quad (2.50)$$

eşitliğini sağlar. Gerçek bir işaretin izgesini hesaplarken gereğinden fazla bilgi bir dezavantaj değildir, fakat gerçek bir işaretin Wigner Dağılımını hesaplarken pozitif ve negatif yarı düzlemlerindeki özdeş bileşenler arasında çapraz terimler olacaktır. Analitik işareti kullanarak fazla bilgi ortadan kaldırılabilir ve aynı zamanda Wigner dağılımının yorumunu engelleyen bir çok çapraz terim ortadan kaldırılabilir.

Belirsizlik fonksiyonu yoğun olarak radar uygulamalarında kullanılmıştır ve zaman frekans analizinde de önemlidir. Belirsizlik fonksiyonu aynı zamanda işaretin karesel bir fonksiyonudur ve

$$A_x(\theta, \tau) = \int x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\theta t} dt \quad (2.51)$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki eşitliği (2.46) eşitliği ile karşılaştırsak belirsizlik fonksiyonu ve Wigner Dağılımının birbirinin iki boyutlu Fourier Dönüşümü olduğu görülür. Belirsizlik fonksiyonu, zaman ve frekansın iki boyutlu ilinti fonksiyonları olarak yorumlanabilir. Belirsizlik fonksiyonundan bir boyutlu ilinti fonksiyonları kolaylıkla elde edilebilir:

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= \int x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) dt = A_x(0, \tau) \\ r_x(\theta) &= \int X(w + \frac{\theta}{2}) X^*(w - \frac{\theta}{2}) dw = A_x(\theta, 0) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Wigner dağılımı ve belirsizlik fonksiyonunun her biri aşağıdaki fonksiyonun tek-boyutlu Fourier dönüşümüdür:

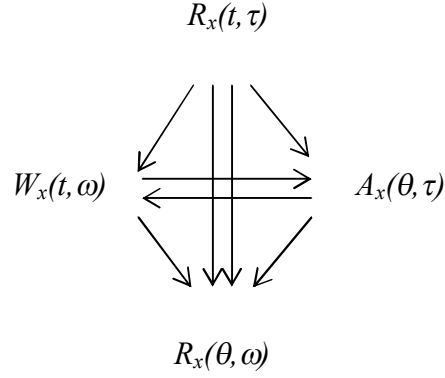
$$R_x(t, \tau) = x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) \quad (2.53)$$

Bu fonksiyon, bazen işaretin “yerel” oto-ilinti fonksiyonu olarak adlandırılır. Biz bu fonksiyonu zamansal oto-ilinti fonksiyonu (temporal auto-correlation function) (ZOİF) olarak adlandıracakız ve yerel sözcüğünü kullanmayacağız. τ değişkeni sık sık “gecikme” ya da “zamanda gecikme” değişkeni olarak adlandırılır. Aynı zamanda işaretin izgesinden, izgesel oto-ilinti fonksiyonu (spectral auto-correlation function) (İÖİF) olarak adlandırılan

$$R_x(\theta, w) = X(w + \frac{\theta}{2}) X^*(w - \frac{\theta}{2}) \quad (2.54)$$

benzer fonksiyonu tanımlanabilir. θ değişkeni frekansla “doppler” ya da “frekans-gecikme” fonksiyonu olarak düşünülür. ZOİF ve İÖİF’nun birbirinin iki boyutlu fourier dönüşümleri olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak, Wigner dağılımı, belirsizlik fonksiyonu, ZOİF ve İÖİF bir boyutlu ya da iki boyutlu Fourier dönüşümleri ile

birbirleriyle ilişki halindedir. Bu ilişkilerin özeti Şekil-II.1’de gösterilmiştir. Burada okun yönü ileri Fourier dönüşümünü göstermektedir



Şekil 2.1 Wigner Dağılımı, Belirsizlik Fonksiyonu, ZOİF ve İOİF arasındaki ilişkiler.

Wigner dağılımının aşağıdaki örneğinde, yazarlar zaman frekans dağılımları elde etmek için alternatif yöntemler geliştirmişlerdir. Burada bu yöntemlerden bazılarını kısaca değinilecektir, daha detaylı bilgi için [29] referansına bakılabilir. Rihaczek Dağılımı

$$RD_x(t, \omega) = x^*(t)X(\omega)e^{-j\omega t} \quad (2.55)$$

olarak tanımlanır. Rihaczek dağılımı, Wigner dağılımından daha kolay hesaplanır ve yukarıda tanımlanan sınırsal özellikleri sağlar, fakat kompleks değerli olacaktır. Sınırsallıkları sağlayan diğer bir dağılım da Page Dağılımıdır ve

$$P_x(t, \omega) = \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (2.56)$$

şeklinde tanımlanır. Wigner, Rihaczek ve Page dağılımları işaretin karesel fonksiyonlarıdır, fakat üçü arasında açık bir ilişki yoktur.

Öncü çalışmasında Cohen [30] sonsuz sayıda zaman frekans dağılımları yaratacak bir yöntem buldu. Kullandığı yöntem kuantum mekaniğine dayanmaktaydı ve operatör teorisini kullanarak çıkartılmıştı. Türetilmesiyle ilgili daha detaylı bilgiler için [3,29]

referanslarına bakılabilir. Bu dağılımlar ortaklaşa olarak Cohen sınıfı zaman frekans dağılımları olarak adlandırılır ve

$$C_x(t, \omega; \Psi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iiint e^{-j\theta t - j\tau\omega + j\theta u} \Psi(\theta, \tau) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) du d\tau d\theta \quad (2.57)$$

olarak gösterilir, burada $\Psi(\theta, \tau)$ 'ya zaman frekans dağılımının çekirdeği adı verilir. Wigner, Rihaczek ve Page dağılımları uygun çekirdek fonksiyonları ile Cohen sınıfının üyeleridir:

$$\begin{aligned} \Psi(\theta, \tau) &= 1 \\ \Psi(\theta, \tau) &= e^{j\theta\tau/2} \\ \Psi(\theta, \tau) &= e^{j\theta|\tau|/2} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Spektrogram da, kullanılan pencere fonksiyonu uygun bir çekirdek olduğu zaman Cohen sınıfının bir üyesidir.

Cohen sınıfı Wigner dağılımı, belirsizlik fonksiyonu, ZOİF ve İOİF olarak dört farklı form üzerine kurulup anlatılacaktır. Eşitlik 2.57'de tanımlanan Cohen sınıfı, işaretin belirsizlik fonksiyonu kullanılarak daha basit bir formda:

$$C_x(t, \omega; \Psi) = \frac{1}{2\pi} \iint A_x(\theta, \tau) \Psi(\theta, \tau) e^{-j\tau\omega} e^{j\theta t} d\tau d\theta \quad (2.59)$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan hareketle, Cohen sınıfı zaman frekans dağılımları, belirsizlik fonksiyonu ve çekirdek çarpımının iki boyutlu Fourier dönüşümü olarak görülebilir. Her biri Wigner dağılımı ve belirsizlik fonksiyonunun diğer bir formu olan $\psi(\theta, \tau)$ 'nin iki-boyutlu fourier dönüşümü olarak tanımlarsak:

$$\Psi(\theta, \tau) = \frac{1}{2\pi} \iint \Psi(\theta, \tau) e^{-j\tau\omega} e^{j\theta t} d\tau d\theta \quad (2.60)$$

şeklinde yazılabilir, sonra Cohen sınıfı Wigner dağılımı ve çekirdek $\psi(t, \omega)$ 'nın iki-boyutlu konvolüsyonu olarak belirtilebilir:

$$C_x(t, \omega; \psi) = \iint W_x(t', \omega') \psi(t - t', \omega - \omega') dt' d\omega' \quad (2.61)$$

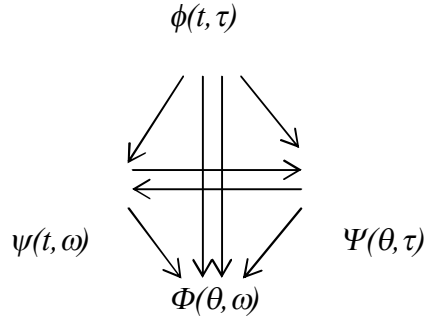
Eğer çekirdek fonksiyonunun diğer iki formu:

$$\begin{aligned} \phi(t, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int \Psi(\theta, \tau) e^{j\theta t} d\theta \\ \Phi(\theta, \omega) &= \int \Psi(\theta, \tau) e^{-j\tau\omega} d\tau \end{aligned} \quad (2.62)$$

olarak tanımlanırsa, Cohen sınıfı, ZOİF ve İOİF cinsinden de belirtilebilir. Bu durumda işlemler bir-boyutlu Fourier dönüşümü ve ardından bir boyutlu konvolüsyondur:

$$\begin{aligned} C_x(t, \omega; \phi) &= \int \left(\int R_x(t', \tau) \phi(t - t', \tau) dt' \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ C_x(t, \omega; \Phi) &= \frac{1}{2\pi} \int \left(\int R_x(\theta, \omega') \Phi(\theta, \omega - \omega') d\omega' \right) e^{j\theta t} d\theta. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dört çekirdek fonksiyonunun özeti Şekil-II.2'de gösterilmiştir ve Şekil 2.1 ile karşılaştırılmalıdır. Buradaki dört formdaki işlemler yalnızca konvolüsyondur ve Fourier dönüşümleridir. Özellikle ilginç olan durum, Cohen sınıfı içindeki zaman frekans dağılımlarının hepsi iki-boyutlu, doğrusal, zamanla-değişmeyen süzgeçler uygulanarak Wigner dağılımından elde edilebilir. $\psi(t, \omega)$ çekirdeği bu filtrenin dürtü cevabı olarak düşünülebilirken, $\Psi(\theta, \tau)$ çekirdeği de bu filtrenin frekans cevabı olarak düşünülebilir.



Şekil 2.2 Çekirdeğin dört farklı formu arasındaki ilişkiler.

Yukarıdaki Wigner dağılımı içindeki çapraz terimlerin özellikleri nedeniyle, kesişen terimler her zaman titreşimli görülür. Gözlemler göstermektedir ki oto terimler genelde düzdür. Basit fakat kullanışlı bir gözlem, alçak geçiren filtre gibi davranan bir çekirdek kullanmaktır. Bu çapraz terimleri zayıflatırken oto terimler aynen kalmaktadır. Bu ilk olarak Choi ve Williams [31] tarafından Gauss çekirdeğini

$$\Psi(\theta, \tau) = e^{-\theta^2 \tau^2 / \sigma} \quad (2.64)$$

formunda ürettiklerinde görülmüştür, burada σ , filtrenin kesim frekansını kontrol eden bir parametredir. Bu çalışma, zaman frekans dağılımları oluşturulması için yeni anlayışlar sağlamış ve burada değinilmeyen diğer birçok yöntem için çekirdek üretilmesinde ilham olmuştur. Bu alandaki daha ileri çalışmada çekirdek fonksiyonuna konulan kısıtların istenen zaman frekans dağılımlarını sağladığı gösterilmiştir. Tablo-II.2’de Cohen sınıfı içindeki zaman frekans dağılımlarının Tablo-II.1’deki istenen özellikleri sağlaması için yeterli şartlar gösterilmiştir. Cohen sınıfı içindeki bütün zaman frekans dağılımları, zamanda öteleme ve frekansta öteleme ile birlikte değişir. Ek olarak, Cohen sınıfı içindeki zaman frekans dağılımları eğer çekirdek bazı $f(.)$ fonksiyonu için

$$\Psi(\theta, \tau) = f(\theta \tau) \quad (2.65)$$

şartını sağlarsa ölçekleme ile de birlikte değişir. Çekirdek yalnız θ ve τ 'nin çarpımına bağlı olduğundan bu formdaki çekirdekler çarpım çekirdekleri diye adlandırılır. Jeong ve Williams [32] Cohen sınıfının alt sınıfı olan ölçeklemeyle birlikte değişen ve Tablo-II.1'deki istenen özelliklerin birçoğunu sağlayan azaltılmış girişim dağılımları (reduced interference distributions) olarak adlandırılan bir dağılım üretmişlerdir.

Çapraz terimlerin spektrogram içinde genellikle niçin kolaylıkla görülemediği şu şekilde açıklanabilir; spektrograma uygun bir çekirdek, spektrogram penceresinin Wigner dağılımı:

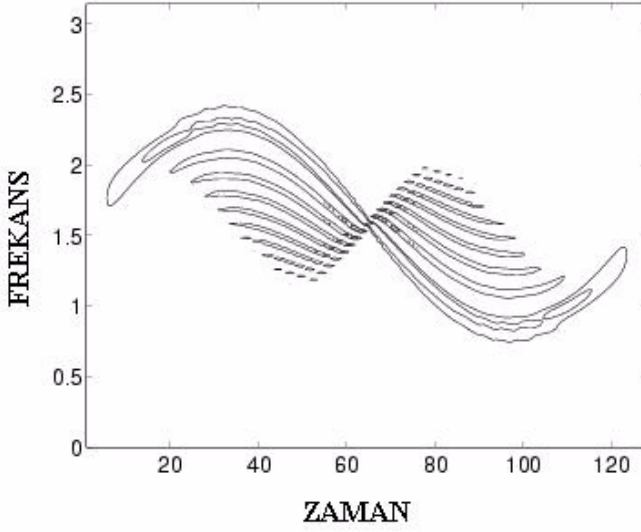
$$\psi(t, \omega) = W_h(t, \omega) \quad (2.66)$$

dur. Belirsizlik prensibinden, izge penceresinin zaman-bant genişliği çarpımı üzerinde bir alt sınır olduğunu bilinmektedir. $\psi(t, \omega)$ çekirdeği Wigner dağılımı ile evriştirildiğinde bu da Wigner dağılımı üzerinde gerçekleştirilen düzeltme miktarı üzerine bir alt limit koyar. Wigner dağılımı Cohen sınıfı içindeki zaman frekans dağılımlarının en düşük seviyede yumuşatılmasını, bu nedenle çapraz terimler Wigner dağılımları içinde en belirgin olanlardır. Diğer birçok zaman frekans dağılımı, Wigner dağılımı ile spektrogram arasında bir düzeltme derecesi sağlar.

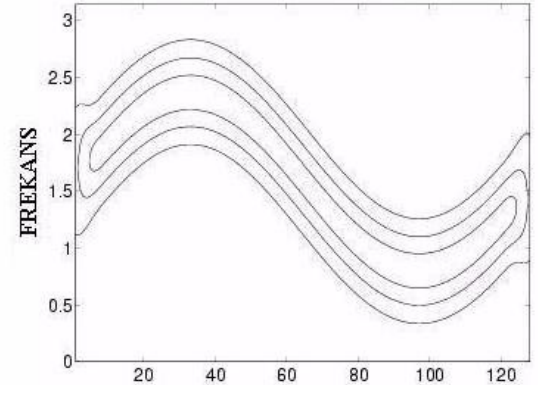
Tablo 2.2 Bazı İstenen Özellikler ve Uygun Çekirdek Sınırlamaları.

Gerçel:	$\psi(t, \omega) = \psi^*(t, \omega)$
Pozitiflik:	$\psi(t, \omega) = W_h(t, \omega)$
Zaman Sınır Yoğunluğu:	$\Psi(\theta, 0) = 1$
Sıklık Sınır Yoğunluğu:	$\Psi(0, \tau) = 1$
Anlık Sıklık:	$\Psi(\theta, 0) = 1$ ve $\left. \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(\tau, \theta) \right _{\tau=0} = 0$
Grup Gecikmesi:	$\Psi(0, \tau) = 1$ ve $\left. \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi(\tau, \theta) \right _{\theta=0} = 0$
Sonlu Zaman Desteği:	$ t/\tau > 1/2$ için $\phi(t, \tau) = 0$
Sonlu Sıklık Desteği:	$ \omega/\theta > 1/2$ için $\Phi(\theta, \omega) = 0$
Güçlü Zaman Desteği:	$ t \neq 2\tau $ için $\phi(t, \omega) = 0$
Güçlü Sıklık Desteği:	$ \omega \neq 2\theta $ için $\Phi(\theta, \omega) = 0$
Moyal Formülü:	$ \Psi(\theta, \tau) = 1 \quad \forall \theta, \tau$
Azaltılmış Girişim:	$\psi(t, \omega)$ alçak geçiren süzgeç

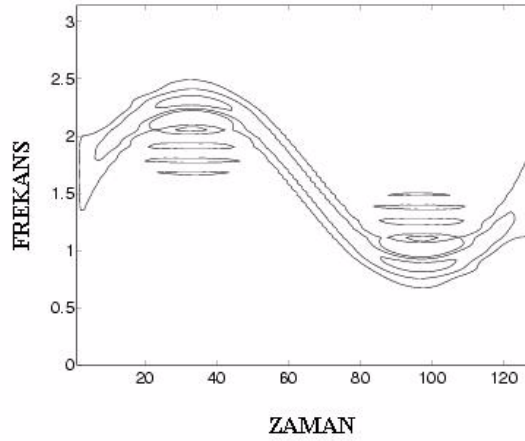
Şekil 2.3’de, Wigner dağılımı, spektrogram ve Cohen sınıfındaki [29] diğer zaman frekans dağılımları arasındaki ödüleşmeler gösterilmektedir. Wigner dağılımı en iyi oto terim çözünürlüğü sağlar, fakat çapraz terimleri bastırmaz. Spektrogram daha düşük çözünürlük, fakat çok iyi çapraz terim bastırması sağlar. Cohen sınıfı içindeki diğer zaman frekans dağılımları çözünürlük ve çapraz terim bastırması arasındaki ödüleşmeyi dengelerler.



(a) Wigner Dağılımı



(b) Spektrogram



(c) Choi-Williams Dağılımı

Şekil 2.3 Cohen Sınıfı Zaman-Frekans Dağılımları Arasındaki Ödüleşimler.

Cohen sınıfı içindeki çekirdeğin amacı, Wigner dağılımı içindeki çapraz terimleri süzmektir. Wigner dağılımı farklı işaretler için çok farklı olacağından, bir işaret için iyi çalışan çekirdeğin başka bir işaret için iyi çalışması gerekmez. Genel durumda, çapraz terimlerin çok iyi bastırılmasını sağlamak için, Cohen sınıfı işaret-uyarlanır çekirdekleri sağlamak için genişletilebilir. Bu işlem, Baraniuk ve Jones [7,8] tarafından yapılmıştır ve onların yöntemi bazı işaretler için gelişmiş çapraz terimleri bastırmayı sağlayabilmiştir. Ayrıca, Wigner dağılımı zaman frekans düzleminde farklı konumlara sahip özel bir işaret için oldukça farklı olabilir. Bu nedenle, Wigner dağılımının bir konumu için çalışan çekirdeğin, Wigner dağılımının başka bir konumu için çalışması zorunlu değildir. Cohen sınıfına diğer bir genişletme de çekirdeğin zaman ve frekansın fonksiyonu olarak değişmesini sağlamaktır (zamanla değişen süzgece benzer). Jones ve Baraniuk zamanla-değişen işarete uyarlanır bir çekirdek tasarımı için yöntem oluşturmuşlardır [9]. Bu genişletmelerle, Cohen sınıfı aşağıdaki genel formda yazılabilir:

$$C_x(t, \omega; \psi) = \iint W_x(t', \omega') \psi(t, t', \omega, \omega'; x) dt' d\omega'. \quad (2.67)$$

Bir önceki bölümde, zaman frekans dağılımları yaklaşık olarak kronolojik bir sırayla sunuldu ve olabildiğince çok sezgi sağlamaya çalışıldı. Burada, Cohen sınıfını elde etmek için bir belitsel yaklaşım (axiomatic approach) sunulacaktır. Bu çıkarım, Cohen'in kendi sınıfını çıkarırken kullandığı yöntemden çok farklıdır, fakat bu açıkça göstermektedir ki zamanda ve frekansta ötelemeyle birlikte değişen bütün karesel zaman frekans dağılımları Cohen sınıfına dahildir.

Hareket noktası olarak, $x(t)$ ve $y(t)$ gibi çok genel çift-doğrusal iki fonksiyon alınıyor:

$$T_{x,y}(\underline{\Lambda}) = \iint k(\underline{\Lambda}; t_1, t_2) x(t_1) y^*(t_2) dt_1 dt_2 \quad (2.68)$$

burada Λ ilgilenilen bir büyüklüktür. Eğer $x(t)=y(t)$ ve $\underline{\Lambda} = [t, \omega]$ alınırsa, $x(t)$ işaretinin karesel zaman frekans dağılımlarının en genel sınıfına sahip olunacaktır:

$$T_x(t, \omega) = \iint k(t, \omega; t_1, t_2) x(t_1) x^*(t_2) dt_1 dt_2 \quad (2.69)$$

Bu genel karesel sınıftan, zamanda öteleme ve frekansta ötelemeyle birlikte değişen bütün karesel zaman frekans dağılımlarının alt kümesini araştırmak oldukça ilginç olacaktır. Zamanda öteleme ve frekansta öteleme operatörü yukarıda şöyle tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} (T_{t_0} x)(t) &= x(t - t_0) \\ (F_{\omega_0} x)(t) &= x(t) e^{j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.70)$$

İlginç bir nokta, zamanda öteleme ve frekansta öteleme operatörleri değişme özelliğine sahip değildir. Eğer, bir işaret zamanda t_0 ve frekansta ω_0 kadar kaydırılmak istenirse bunu yapmak için sonsuz sayıda yöntem vardır. Burada üç örnek verilmiştir.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (F_{\omega_0} T_{t_0} x)(t) = x(t - t_0) e^{j\omega_0(t - t_0)} \\ y_2(t) &= (T_{t_0} F_{\omega_0} x)(t) = x(t - t_0) e^{j\omega_0 t} \\ y_3(t) &= (T_{t_0/2} F_{\omega_0} T_{t_0/2} x)(t) = x(t - t_0) e^{j\omega_0(t - t_0/2)} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Eğer zaman frekans dağılımının zamanda ötelemeyle birlikte değişmesi istenirse, aşağıdaki eşitlik sağlanmak zorundadır:

$$T_x(t - t_0, \omega - \omega_0) = T_{y_1}(t, \omega) = T_{y_2}(t, \omega) = T_{y_3}(t, \omega) \quad (2.72)$$

$y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ işaretleri farklı olmasına rağmen aynı zaman frekans dağılımlarına sahip olacaklardır. İşaretler sadece bir faz faktörü (çarpanı) ile değiştiğinden sezgisel olarak bu beklenecektir. (2.72) eşitliğindeki sınırlamalar altında, yukarıda anlatıldığı gibi, (2.69) eşitliği Cohen sınıfına basitleştirilir.

2.3.1.2. Çekirdek Yöntemleri

Zaman frekans dağılımlarını, çekirdek fonksiyonları ile karakterize etmenin üç temel avantajı vardır. Birincisi, çekirdeği sınırlayarak bazı kesin özelliklerle dağılımları elde edilebilir ve çalışılabilir. Örneğin sınırları sağlayan bütün dağılımlar istenildiği

durumda, sınırların sağlanması için çekirdeğin $\phi(0, \tau) = \phi(\theta, 0) = 1$ basit özelliğine sahip olması gerektiği görülebilir, bu nedenle sınırları sağlayan dağılımlar ile çalışmak istendiğinde, sadece bu koşulları sağlayan çekirdekleri göz önüne almak gerekecektir. Bu, hala sonsuz sayıda seçenek bırakır, fakat sınırların sağlandığından emin olunmuştur.

İkincisi, bir dağılımın özellikleri çekirdeğin basit bir incelenmesi ile hemen soruşturulabilir (araştırılabilir). Örneğin, yukarıda bahsedilen koşulu, çekirdek sağlıyor ise bu durumda dağılımın sınırlandığı bilinir ve daha başka hesaplama yapmak zorunda kalınmaz.

Üçüncüsü, bir çekirdek verildiğinde bir dağılımın üretilmesi oldukça kolaydır. Bir dağılımın bazı özelliklere sahip olmasını garanti eden çekirdek üzerindeki koşulları tartışmadan önce çekirdeğin değişik olasılıklarını, bağımlılığını sınıflandırmak ve tartışmak daha önemlidir.

İlk olarak çekirdeğin fonksiyonel bağımlılığına bakılırsa; çekirdek frekans ve zamanın ve açıkça işaretin bir fonksiyoneli olabilir. Eğer notasyon olarak açık olmak zorunda olursa idi çekirdeği $\phi(\theta, \tau, t, \omega, s)$ şeklinde olası bağımlılıkları gösterecek şekilde yazmak gerekirdi. Buna rağmen, çekirdek, θ ve τ 'nin bir fonksiyonu olarak yazılır ve diğer değişkenlere bağımlı olup olmadığına içerikten bakılarak ayırt edilir.

Çekirdek tipleri incelenecek olursa; önemli bir alt sınıf, $\theta\tau$ çarpımının bir fonksiyonu olduğu, çekirdek için olan dağılımlardır:

$$\phi(\theta, \tau) = \phi_{PR}(\theta\tau) = \phi(\theta\tau) \quad \text{Çarpım çekirdekleri} \quad (2.73)$$

notasyon açıklığı için PR alt indisini kullanılmayacaktır, çünkü $\phi(\theta, \tau)$ 'ya atfedilen değişkenlerin sayısı yardımıyla genel durum için ya da çarpım durumu için konuşulduğu söylenebilir. Her bir değişkenin bir fonksiyonunun çarpımı olan çekirdek

$$\phi(\theta, \tau) = \phi_1(\theta) \cdot \phi_2(\tau) \quad \text{Ayrılabilir çekirdekler} \quad (2.74)$$

ayrılabilir çekirdekler olarak adlandırılır.

Çift doğrusallık özelliği ise çekirdek açık olarak işarete bağımlı değilse, bu durumda işaret genel forma iki defa girer, böylece Wigner tarafından kullanılan bir deyimle dağılım çift doğrusaldır, denilir. Çekirdeği işareten bağımsız olarak elde edilen dağılımlar, sonraki konularda anlatılmıştır. Burada çekirdeğin çift doğrusal zaman ve frekanstan bağımsız olduğu varsayılacaktır. Buna rağmen, çift doğrusal durum için geliştirilen yöntemler, frekansla, doğrudan çift doğrusal olmayan durum için de uygulanır. Uygun olduğu zaman bu belirtilir. Sınırların işaret içinde çift doğrusal olduğuna dikkat etmek gerekir. Buna rağmen, bileşik dağılımın fonksiyonel bağımlılığı üzerinde, bu durum hiçbir şekilde yansımaz. Çift doğrusal sınırlara sahip olmak bileşik dağılımın çift doğrusal olduğunu iddia etmez. Eğer bir dağılım verilirse, dağılımı standart formlardan birine koyarak çekirdek seçilebilir. Eğer bu hemen yapılamazsa, dağılımın karakteristik fonksiyonunu bularak ve $M(\theta, \tau) = \phi(\theta, \tau).A(\theta, \tau)$ eşitliğini kullanarak çekirdek hesaplanabilir. Açık olarak,

$$\phi(\theta, \tau) = \frac{M(\theta, \tau)}{A(\theta, \tau)} = \frac{\iint C(t, \omega) e^{j\theta t + j\tau \omega} dt d\omega}{\int s * (u - \frac{1}{2} \tau) s(u + \frac{1}{2} \tau) e^{j\theta u} du} \quad (2.75)$$

ifadesi elde edilir.

2.3.1.2.1 Choi-Williams Yöntemi

Choi, Jeong, Cunnigham ve Williams, azaltılmış girişim dağılımları teorisini ve bunu gerçekleştirecek çekirdeği tasarlamaya izin verecek fikirler geliştirdiler [31,33,34]. σ bir parametre olmak üzere, onların ilk örneği

$$\phi(\theta, \tau) = e^{-\theta^2 \tau^2 / \sigma} \quad (2.76)$$

çekirdeği ile belirlenen dağılımdır. Bu bir çarpım çekirdeğidir ve $\phi(0, \tau) = \phi(\theta, 0) = 1$ 'dir, bu da her iki sınırın sağlandığını gösterir. Daha ötesi, bunun anlık frekans ve grup gecikmesi özelliklerini sağladığını görmek oldukça kolaydır. σ büyük seçilirse bu durumda Choi-Williams Dağılımı, çekirdek, 1'e yaklaşacağı için Wigner Dağılımına yaklaşır. Küçük σ için azaltılmış girişim kriterlerini daha önce anlatıldığı gibi sağlar. Çekirdek genel sınıfta yerine konursa ve θ üzerinden integral alınırsa

$$P_{CW}(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \iint \frac{1}{\sqrt{\tau^2/\sigma}} \exp\left[-\frac{(u-t)^2}{4\tau^2/\sigma} - j\tau\omega\right] \quad (2.77)$$

$$\times s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s^*(u + \frac{1}{2}\tau) d\tau \quad (2.78)$$

bağıntılarını elde edilir. Bu dağılımın davranışını daha iyi anlamak için birkaç örneği göz önüne almak gerekir. İki tane sinüs dalgasının toplamı için

$$s(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t}, \quad (2.79)$$

$$\eta(\omega, \omega_1, \omega_2, \sigma) = \sqrt{\frac{1}{4\pi(\omega_1 - \omega_2)^2/\sigma}} \exp\left[-\frac{(\omega - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2))^2}{4(\omega_1 - \omega_2)^2/\sigma}\right] \quad (2.80)$$

olmak üzere, dağılım tam olarak

$$C_{CW}(t, \omega) = A_1^2 \delta(\omega - \omega_1) + A_2^2 \delta(\omega - \omega_2) + 2A_1 A_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] \eta(\omega, \omega_1, \omega_2, \sigma) \quad (2.81)$$

ifadesi ile hesaplanabilir. Büyük σ için

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \eta(\omega, \omega_1, \omega_2, \sigma) = \delta\left(\omega - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\right) \quad (2.82)$$

eşitliğine karşılık gelir ve bu nedenle dağılım $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ 'de sonsuz tepe yapar, bu da tamamıyla Wigner Dağılımıdır. σ sonlu tutulduğu sürece, çapraz terimler sonlu olacak ve bir noktada yoğunlaşmayacaktır. Dışarıya en düşük maksimum yoğunluk ile yayılacaklardır. Kendi terimlerin ω_1 ve ω_2 frekansları boyunca, hala delta fonksiyonları olduğuna dikkat ediniz. Genel olarak, bu diğer işaretler için doğru olmayacaktır ve genel olarak Wigner Dağılımı için de doğru değildir. Sadece bir çarpın Wigner Dağılımı için bu doğrudur. Bir çarp için Choi-Williams Dağılımı

$$C_{CW}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-\beta^2 \tau^4 / \sigma} e^{-j\tau(\omega - \beta t)} d\tau \quad \left[s(t) = e^{\beta t^2 / 2} \right] \quad (2.83)$$

şeklindedir. Yoğunlaşma anlık frekans boyuncadır ve genişlik β ve σ' 'ya bağlıdır.

2.3.2. İlgin (Affine) Sınıfı Zaman-Frekans Dağılımları

Cohen sınıfı zaman frekans dağılımları, zamanda öteleme ve frekansta ötelemeyle birlikte değişir. Birlikte değişim özelliği için başka operatörler seçilerek zaman frekans dağılımlarının diğer sınıfları tanımlanabilir. Örneğin; İlgin (Affine) sınıfı zaman frekans dağılımları zamanda öteleme ve ölçeklemeyle birlikte değişir. Ölçekleme operatörü yukarıda $(D_\alpha x)(t)=x(at)$ şeklinde tanımlanmıştır.

Önceki bölümdeki belitsel yaklaşımı zamanda öteleme ve ölçekleme operatörlerine uygulayarak, ilgin sınıfı zaman frekans dağılımlarına ulaşılır. İlgin sınıf içindeki zaman frekans dağılımları, Wigner dağılımının ilgin düzeltmesi olmasına rağmen hesaplanabilir:

$$A_x(t, \omega; \phi) = \iint W_x(t', \omega') \phi(\omega(t'-t), \omega'/\omega) \quad (2.96)$$

İlgin sınıf ile dalgacık dönüşümü arasındaki ilişki, Cohen sınıfı ve kısa zamanlı Fourier dönüşümü arasındaki ilişkiye benzerdir. Skalogram, dalgacık dönüşümünün büyüklüğünün karesi olarak tanımlanır ve skalogramlar ilgin sınıfın alt kümesidir.

Son olarak, Papandreou [5] hiperbolik sınıf diye adlandırılan bir karesel sınıf tanımladı. Bu sınıf, ölçekleme ve hiperbolik zaman ötelemeleriyle birlikte değişen bütün zaman frekans dağılımlarını içerir. Hiperbolik zaman öteleme operatörü :

$$H_h(t) = e^{-jh \log t} x(t) \quad (2.97)$$

şeklinde tanımlanır. Ölçekleme ile hiperbolik zaman öteleme operatörleri arasındaki ilişki, zamanda öteleme ve frekansta öteleme operatörleri arasındaki ilişkinin aynısıdır (ve zamanda öteleme ve ölçekleme operatörleri arasındaki ilişkiden farklıdır). Baraniuk son zamanlarda keyfi operatörlerin dağılımlarının birlikte değişimlerinin varlığı üzerine temel bir sonuç geliştirdi [6].

2.3.3. İşaret Uyumlu Zaman-Frekans Gösterimleri

Oto bileşenlerin şeklini uydururken Wigner-Ville dağılımının özelliklerini korumayı vurgulayan önceki çekirdeklerden farklı olarak işaret bağımlı çekirdekler çapraz bileşenleri bastırırken oto bileşenleri en iyi olacak şekilde seçmeyi hedeflerler. Sabit bir çekirdek, bir maske yada süzgecin belirsizlik fonksiyonu üzerinde hareket ettiği için bu fonksiyonu gerçekleştirme yeteneği sınırlıdır. Oto ve çapraz bileşenlerin yerleri analiz edilecek olan işarete bağımlıdır; böylece sadece *işaret bağımlı (signal-dependent)* bir çekirdek kullanarak geniş bir işaret sınıfı için iyi performans elde edilmesi beklenmektedir. Verilen bir işaret için, bazı şekillerde “en iyi” zaman frekans gösterimlerini sağlayan çift doğrusal zaman frekans dağılımını bulmak için Baraniuk ve Jones, işaret bağımlı çekirdek tasarım sürecini bir optimizasyon problemi gibi formülize etmişlerdir [35,36].

2.3.3.1 1/0 Çekirdek Metodu

Bir işaret ve onun belirsizlik fonksiyonu verildiği zaman

$$\Phi(0,0)=1 \quad (2.98)$$

olmak üzere,

$$\Phi(v, \tau) \text{ radyal yönde artmayan} \quad (2.99)$$

$$\iint |\Phi(v, \tau)|^2 dv d\tau \leq 0 \quad (2.100)$$

radyal olarak artmayan (2.100) sınırlaması γ_i ve ψ sırasıyla kutupsal koordinat yarıçapı ve açısı olmak üzere,

$$\Phi(\gamma_1, \psi) \geq \Phi(\gamma_2, \psi) \quad \forall \gamma_1 \leq \gamma_2 \quad \forall \psi \quad (2.101)$$

ile açık bir şekilde ifade edilir ve

$$\max_{\phi} \iint |BF(v, \tau) \Phi(v, \tau)|^2 dv d\tau \quad (2.102)$$

optimizasyon problemini çözen reel negatif olmayan ϕ_{opt} en iyi 1/0 çekirdeği tanımlanır.

(2.98)-(2.100) kısıtlamaları ve performans ölçütü (2.102), optimal çekirdek, kendi bileşenlerini geçirip, çapraz bileşenleri bastırarak şekilde formülize edilmiştir. Kısıtlamalar optimal çekirdeği, α sabit hacminin bir alçak geçiren süzgeci olması için zorlar; performans ölçütünü maksimize etmek, çekirdeğin geçiş bandını kendi bileşenleri üzerinde bulunması için teşvik eder. Performans ölçütü ve kısıtlamalar birlikte dönüş açısı ve işaret bileşenlerinin (v, τ) düzleminde görünen oranlarına (ölçekleme) duyarsızdır.

Optimal çekirdeğin altındaki hacmi kontrol ederek, α parametresi çapraz bileşen bastırımı ve kendi bileşenlerinin yayılması arasındaki ödünleşmeyi kontrol eder. Makul sınırlar $1 \leq \alpha \leq 5$ 'tir. Alt sınırdaki optimal çekirdek, üst sınırdaki optimal çekirdek sadece çok yavaş yumuşarken, bir KZFD spektrogram çekirdeğindeki kadar hacmi paylaşır. Aslında, α gibi, optimal çekirdek dağılımı da işaretin WVD'na yakınsar.

Bir işareti optimal çekirdek dağılımı ile analiz etmek için üç aşamalı bir sürece ihtiyaç vardır: (1) işaretin belirsizlik fonksiyonunu hesapla, (2) doğrusal programı $|\phi|^2$ içinde (2.98)-(2.102)'e kadar çöz, (3) $BF(v, \tau) \Phi(v, \tau)$, BF çekirdek çarpımının Fourier dönüşümünü al.

2.3.3.2. Radyal Gauss Çekirdek Yöntemi

1/0 çekirdeği (2.98)-(2.102)'ye kadar olan kriterlere göre optimal olmasına rağmen, keskin kesimi özellikle α çekirdek hacim parametresinin küçük değerleri için optimal çekirdek dağılımlarında çalışmaya yol açacaktır. Alternatif olarak, yumuşak optimal çekirdeklere doğrudan yaklaşım, açık yumuşaklık kısıtlamaları (2.98)'den (2.102)'ye çekirdek optimizasyon formülasyonuna eklenebilir. Referans [35]'da radyal profiller boyunca çekirdeğin Gauss olması kısıtlandırılmıştır:

$$\Phi(v, \tau) = \exp \left\{ -\frac{v^2 + \tau^2}{2\sigma^2(\psi)} \right\} \quad (2.103)$$

$\sigma(\psi)$ terimi, $\psi = \arctan(\tau/v)$ radyal açısı üzerinde Gauss dağılımının bağımlılığını gösterir. (2.103) biçimindeki herhangi bir çekirdek, sınırlandırılmıştır ve radyal olarak artmaz ve daha ötesi, σ yumuşaksa, yumuşaktır. Radyal Gauss çekirdek şekli tamamıyla bu fonksiyon tarafından belirlendiğinde bir işaret optimal radyal Gauss çekirdeğini bulmak işaretin σ_{opt} optimizasyon fonksiyonunu bulmaya eşdeğerdir. Sistemi (doğrusal olmayan) çözmek için bir gradyant yükselme/Newton algoritması ((2.100), (2.102) ve (2.103)'te tanımlanmıştır) [35] referansında detaylı olarak anlatılmıştır.

2.3.4. Pozitif (Cohen-Posch Sınıfı) Dağılımlar

Zaman ve frekans sınırsallıklarını sağlayan *ikili-doğrusal (bilinear)* pozitif dağılımların olmadığı Wigner tarafından gösterilmişti [3]. Örneğin; spektrogramın pozitif değerli olduğu açıktır, ancak zaman ve frekans sınırsallıklarını sağlamaz. Wigner dağılımında ise durum tam tersidir. Bu dağılım, pozitif olmamasına karşın zaman ve frekans sınırsallıklarını sağlar. Geçmişte, pozitif dağılımların zaman ve frekans sınırsallıklarını sağlamadıkları yayın evreninde geniş bir yer almıştı. Ancak, bu dağılımlar daha sonra sınırsallık özelliklerinin sağlandığını kesinleştiren yalın bir yordamla elde edilmiştir.

$$P(t, \omega) = |S(\omega)|^2 |s(t)|^2 \Omega(u, v) \quad (2.104)$$

eşitliğini ele alalım. Bu eşitlikte yer alan u ve v , t ile ω 'nın işlevi olup

$$u(t) = \int_{-\infty}^t |s(t')|^2 dt' \quad ; \quad v(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} |S(\omega')|^2 d\omega' \quad (2.105)$$

biçiminde gösterilirken, Ω da aşağıdaki özellikleri sağlayan herhangi bir pozitif fonksiyonumuzdur?

$$\int_0^1 \Omega(u, v) dv = 1 ; \int_0^1 \Omega(u, v) du = 1 \quad (2.106)$$

$\Omega(u, v)$ ' yi $0 \leq u, v \leq 1$ için tanımlamak yeterlidir. Sınırsallık özelliklerinin sağlandığını göstermek için, $P(t, \omega)$ ' nin ω ' ya göre integrali alınır,

$$\int P(t, \omega) d\omega = |s(t)|^2 \int |S(\omega)|^2 \Omega(u, v) d\omega = |s(t)|^2 \int_0^1 \Omega(u, v) dv = |s(t)|^2 \quad (2.107)$$

eşitliği elde edilir. Benzer biçimde $dv = |S(\omega)|^2 d\omega$ olduğunu dikkate alarak t ' ye göre integral alınırsa frekans sınırsallığı elde edilir.

(2.104) eşitliği ile verilen dağılımlar, Ω , $0 \leq u, v \leq 1$ aralığında pozitif olduğu sürece pozitifdir. Ω sınırlarının yada işaretin bir fonksiyoneli olabilir ya da olmayabilir. Fakat bütün olası pozitif bileşik dağılımları üretmek için o, işaretin bir fonksiyonu olarak göz önüne alınabilir. Yukarıdaki koşulları sağlayan Ω örnekleri n, m tam sayılar olmak üzere örneğin

$$\Omega(u, v) = 1 - (nu^{n-1} - 1)(mv^{m-1} - 1) \quad (2.108)$$

ifadesi ile kolayca elde edilebilir. Herhangi bir işaret için, pozitif dağılımların oluşturulması amacıyla son zamanlarda yaygın olarak çeşitli yöntemler önerilmiştir. En bilindik olanı Loughlin, Pitton ve Atlas' ın yöntemidir.

Pozitif dağılımların yapılandırılması Loughlin, Pitton ve Atlas tarafından başarılmıştır [41]. Onlar, sorunu aşağıdaki biçimde formülize etmişlerdir. Şu ana kadar olan bilgilerle birleşik dağılım saptanamaz. Bunun nedeni çok sayıda Ω bulunmasıdır. İşlevin kendisini belirlemeyen koşullar için işlev üretme sorunu, bir çok alanda uzunca bir süre kendine yer bulmuştur. Bu sorun için bir yaklaşım *maksimum entropi* yöntemidir. Bu yöntemin temel fikri, koşulları sağlayan tüm fonksiyonları bulup, bunlar içerisinde entropiyi maksimum yapanı seçmektir. Bunun nedeni, entropi

çözümünün tarafsız, yani eğilimsiz olmasıdır. Uygulamalarda, birleşik dağılımdan tahmin yapıp (yani P_0), çapraz entropi tanımlandıktan sonra,

$$\Delta = - \iint P(t, \omega) \log \frac{P(t, \omega)}{P_0(t, \omega)} dt d\omega \quad (2.109)$$

ifadesinin sınırsallık özelliklerini, pozitiflik ve diğer olası kısıtlamalarla en büyük yapılır ve zorla kabul ettirilmek istenebilir. Bu yaklaşıma Fonollosa ve Nikias [38]'da ilave bir kısıtlama getirmiştir. Buna göre, eğer iki boyutlu bir dağılım isteniyorsa, ve a ve b , eksenleri belirleyen yönlerin kosinüslerini göstermek üzere $u = at + b\omega$ değişkeninin yoğunluğu elde edilmek istenirse, o zaman u ' nun yoğunluğu olarak,

$$P(u) = \iint \delta(u - (at + b\omega)) P(t, \omega) dt d\omega = \int P(t, (u - at)/b) dt \quad (2.110)$$

kullanılır. Fonollosa ve Nikias, $P(u)$ ' nun bulunmasında WD' yi kullanmaktadır [38].

2.4. ZAMAN-FREKANS GÖSTERİMLERİ

2.4.1. Gabor Gösterimi

Durağan olmayan bir işaretin zaman frekans gösterimi için temel bir yöntem, işareti zaman frekans temel fonksiyonlarına ayrıştırmaktır. Klasik Gabor açılımı [39,40,41], bir işareti zamanda ve frekansta ötelenmiş taban fonksiyonlarının doğrusal birleşimi olarak temsil eder. İşaret işlemede bir işaretin zamanla değişen frekans içeriğini incelemek için yaygınca kullanılmaktadır [42,43,44]. Gabor açılımının taban fonksiyonları veya logonlar sabit bir pencere fonksiyonunun zamanda eşit aralıklarla ötelenmesi ve sinüzoidal olarak modüle edilmesiyle elde edilir.

Sürekli zamanlı bir $x(t)$ işaretinin Gabor gösterimi [39]:

$$x(t) = \sum_m \sum_k a_{m,k} h_{m,k}(t) \quad (2.111)$$

burada taban fonksiyonları

$$h_{m,k}(t) = h(t - mT)e^{j\Omega kt} \quad m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.112)$$

ve T zamanda doğrusal ötelemeyi kontrol eden bir parametre ve Ω frekans örnekleme aralığıdır. $h(t)$ pencere fonksiyonu veya sentez penceresi birim enerjiye normalize edilmiştir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = 1 \quad (2.113)$$

Gabor açılımının varlık, teklik, yakınsama, sayısal kararlılığı Ω ve T adım parametrelerinin seçimine bağlıdır. Klasik bir koşul, $\Omega T = 2\pi$ olup kritik örnekleme adımı alır [12]. $\Omega T < 2\pi$ fazla örnekleme olup, katsayıların tek olmaması sonucunu doğurur. $\Omega T > 2\pi$ ise bilgi kaybına neden olur. $h_{m,k}(t)$ taban fonksiyonu, genel olarak $L_2(R)$ (sonlu enerjili fonksiyonlar uzayı) uzayına dik olmayan bir taban kümesi oluşturur. Dolayısıyla $a_{m,k}$ katsayılarının bulunması basit izdüşüm ile yapılamaz. Bunun için bir çözüm yardımcı $\gamma(t)$ analiz penceresi kullanmaktır [45].

$$a_{m,k} = \langle x(t), \gamma_{m,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \gamma_{m,k}^*(t) dt \quad (2.114)$$

burada

$$\gamma_{m,k}(t) = \gamma(t - mT)e^{j\Omega kt} \quad (2.115)$$

analiz taban fonksiyonlarını göstermektedir. Açılımın tamlik koşulu, (2.114) eşitliği (2.111)'de yerine konarak,

$$\sum_m \sum_k h_{m,k}(t) \gamma_{m,k}^*(t') = \delta(t - t') \quad (2.116)$$

şeklinde elde edilir. $\gamma_{m,k}(t)$ kümesi, $h_{m,k}(t)$ kümesine ikili dik olacak biçimde elde edilir. Yukarıdaki tamlik koşuluna Poisson-Toplam formülü uygulanarak, $\gamma(t)$ penceresinin hesaplanacağı ikili diklik koşulu elde edilir:

$$\frac{\Omega_0 T_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \gamma^*(t - mT_0) e^{-j\Omega_0 kt} dt = \delta_m \delta_k \quad (2.117)$$

buradaki sabitler

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (2.118)$$

[40]'de Wexler ve Raz sürekli zamanlı gösterimden örnekleme ve ayrık Poisson-Toplam eşitliğini kullanarak ayrık Gabor açılımını sunmuşlardır. Ayrık zamanlı ve sonlu zaman desteğine sahip bir $x(n)$ işaretinin ayrık Gabor açılımı [40,41]:

$$x(n) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{m,k} \tilde{h}_{m,k}(n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (2.119)$$

ve taban fonksiyonu

$$\tilde{h}_{m,k}(n) = \tilde{h}(n - mL) e^{j\omega_k n} \quad (2.120)$$

Burada $\tilde{h}(n)$ sentez penceresi, $h(n)$ 'in periyodikleştirilmiş halidir:

$$\tilde{h}(n) = \sum_r h(n + rN) \quad (2.121)$$

ve $\omega_k = \frac{2\pi L'}{N} k$, M, K, L ve L' pozitif tamsayıları $ML = KL' = N$ koşulunu sağlarlar.

M ve K sırasıyla, zaman ve frekanstaki örnek sayıları, L ve L' sırasıyla, zaman ve frekanstaki adım parametreleridir. Sentez penceresi $h(n)$ daha önce olduğu gibi birim enerjiye sahiptir:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|^2 = 1 \quad (2.122)$$

Sayısal kararlı bir gösterim için L ve L' parametreleri

$$LL' \leq N \quad (2.123)$$

veya $L \leq K$ koşulunu sağlamalıdır. $L=K$, kritik örnekleme, $L < K$ fazla, $L > K$ az örnekleme durumlarıdır. Kritik örnekleme durumunda ($LL' = MK = N$), $a_{m,k}$ Gabor katsayılarının sayısı, $x(n)$ işaretinin zamandaki örnek sayısına eşittir ve bu tam bir gösterim için gereken minimum sayıdır. $L > K$ durumunda, taban fonksiyonları kümesi $\{\tilde{h}_{m,k}(n)\}$ tüm uzayı yaymayacağı için bilgi kaybına neden olur. $L < K$ yani fazla örnekleme durumunda, sayısal olarak kararlı ve yeterli zaman frekans yerelleşmesi sağlayan açılımlar elde edilebilir. $\{a_{m,k}\}$ Gabor katsayılarının tanımlandığı (m,k) düzlemi, Gabor katsayı uzayı olarak adlandırılır.

Genel olarak $\{\tilde{h}_{m,k}(n)\}$ kümesi, dik olmayan bir taban kümesi oluşturur. Balian-Low teoremi [45,46], $h(n)$ penceresi, zamanda veya frekansta kötü bir yerelleşmeye sahip olmadıkça $\{\tilde{h}_{m,k}(n)\}$ kümesinin dik bir taban oluşturamayacağını ortaya koymuştur. Dolayısıyla Gabor katsayıları basit iç çarpım yöntemiyle elde edilemezler. Sürekli zamanlı Gabor açılımında olduğu gibi $h(n)$ sentez penceresine ikili dik olan yardımcı bir $\gamma(n)$ analiz penceresi kullanılarak Gabor katsayıları [45],

$$a_{m,k} = \langle x(n), \tilde{\gamma}_{m,k}(n) \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \tilde{\gamma}_{m,k}^*(n) \quad (2.124)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada $\langle \cdot \rangle$ R^n uzayında iç çarpımı göstermekte olup, $\tilde{\gamma}_{m,k}(n)$ ikili dik analiz penceresi $\tilde{\gamma}(n)$ 'den şöyle elde edilir:

$$\tilde{\gamma}_{m,k}(n) = \tilde{\gamma}(n - mL)e^{j\omega_k n}. \quad (2.125)$$

Ayrık Gabor açılımının tamlık koşulu, (2.124) eşitliği (2.125)'te yerine konarak şöyle bulunur:

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \tilde{h}_{m,k}(n) \tilde{\gamma}_{m,k}(n') = \delta_{n-n'}. \quad (2.126)$$

Ayrıca analiz penceresi, $\tilde{\gamma}(n)$, ile sentez penceresi $\tilde{h}(n)$ arasındaki ikili diklik koşulu [44] :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{h}(n + mK) e^{-j\frac{2\pi}{L}kn} \tilde{\gamma}^*(n) = \frac{L}{K} \delta_m \delta_k \quad 0 \leq m \leq L'-1, \quad 0 \leq k \leq L-1 \quad (2.127)$$

$\tilde{\gamma}(n)$ 'in varolması açılımın tamlığını garanti eder [40]. Ancak L ve K 'nın uygun olmayan seçimleri sayısal kararsızlıklara neden olabilir ve $\tilde{\gamma}(n)$ hesaplanamayabilir. Yukarıdaki (2.127) koşulu matris formunda şöyle verilebilir:

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\gamma}^* = \mathbf{d} \quad (2.128)$$

olup $\mathbf{d} = (L/K, 0, 0, \dots, 0)^T$, LL' uzunluğunda bir vektör ve $\mathbf{H}$, $LL' \times N$ boyutlu bir matris olup, elemanları

$$h(mL + k, i) = \tilde{h}(i + mK) e^{-j\frac{2\pi}{L}ki} \quad 0 \leq m < L', \quad 0 \leq k \leq L, \quad 0 \leq i < N \quad (2.129)$$

Kritik örnekleme durumunda, $L=K$, $\mathbf{H}$, $N \times N$ boyutlu blok Hankel tip bir matristir ve $\mathbf{H}$ tekil değil ise, $\tilde{\gamma}(n)$ vardır ve tektir; ancak iyi yerelleşmiş olmayabilir. Bu durumda Gabor katsayıları, işaretin yerel davranışını temsil edemezler. Halbuki fazla örnekleme durumunda ($L < K$), ikili diklik koşulunun çözümü tek değildir. Qian ve Chen [41,47] bu çok çözümlü durumu lehimize kullanarak, $\tilde{\gamma}(n)$ 'in $\tilde{h}(n)$ 'e en küçük kareler anlamında yakın olacak biçimde seçilebileceğini göstermişlerdir:

$$\Gamma = \min \left\| \frac{\tilde{\gamma}(n)}{\|\tilde{\gamma}(n)\|} - \tilde{h}(n) \right\|^2 \quad (2.130)$$

burada $\|\cdot\|$, R^n uzayındaki Euclid normunu göstermektedir. Yukarıdaki optimizasyon probleminin çözümü, genelleştirilmiş (sahte) matrisin tersidir:

$$\gamma^* = \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{d} \quad (2.131)$$

Zaman frekans işaret analizi için hem analiz, hem de sentez pencerelerinin zamanda ve frekansta iyi yerelleşmiş olması istenir. Fazla örnekleme durumunda $\tilde{h}(n)$ Gauss pencere olarak seçilirse, iyi yerelleşmiş Gauss'a benzer analiz penceresi $\tilde{\gamma}(n) \approx \alpha \tilde{h}(n)$, $\alpha = \|\tilde{\gamma}(n)\|$ elde edilebilir ve böylece Gabor katsayıları işaretin yerel davranışını yansıtırlar.

2.4.2. Malvar Gösterimi

Malvar dalgacık dönüşümü, işarete uyarlanır. İşareti en uygun parçalara ayırır ve her bir parçayı ayrık bir kosinüs tabanı ile gösterir. Özel tasarlanmış pencereleri kullanarak bu gösterim pencereleme nedeniyle oluşan sınır etkilerini ortadan kaldırır [47,48,49]. Pencerelerin uzunluklarını en iyi olarak belirlemek için bir entropi ölçüsü kullanılır. Göreceğimiz gibi bu gösterim dar-bant bileşenli işaretler için çok iyi performans gösterir, fakat geniş-bant bileşenli işaretleri gösterirken bileşenlerin frekans değişimleri hakkında bilgi gereklidir.

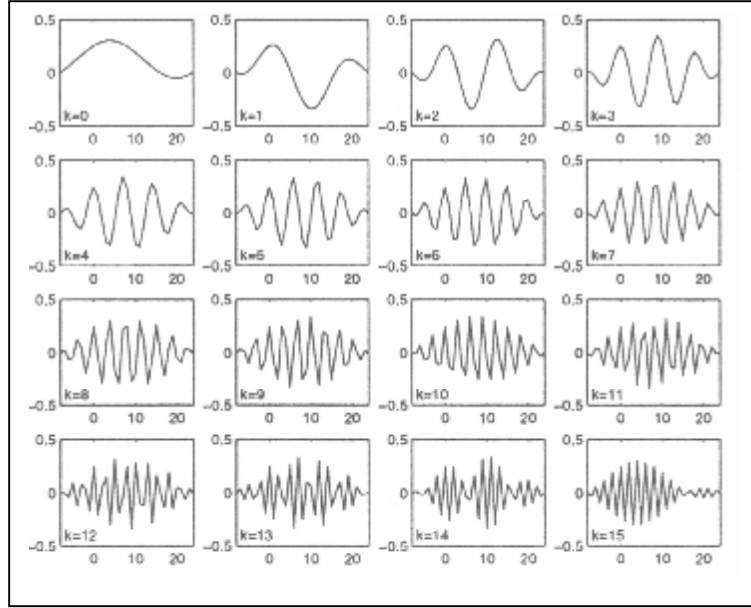
$x(n)$ 'in Malvar gösterilimi $\{u_{ik}(n) = v_i(n)\tilde{f}_{ik}(n)\}$ dikgen fonksiyonlar olmak üzere

$$x(n) = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{k=0}^{L_i-1} c_{ik} u_{ik}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (2.132)$$

eşitliği ile verilir [48].

L_i uzunluklu $v_i(n)$ penceresi özellikle tasarlanmıştır ve $\{\tilde{f}_{ik}(n)\}$ birim dik fonksiyonlarının periyodik uzantılarıdır:

$$f_{ik}(n) = \sqrt{\frac{2}{L_i}} \cos\left(\frac{\pi}{L_i}(k+0.5)(n-a_i)\right) \quad (2.133)$$



Şekil 2.4 Malvar Taban Fonksiyonu Örnekleri

Şekil 2.4'te 16 uzunluklu bir pencere ve $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = 8$, $a_i = 0$ ve $a_{i+1} = 16$ parametreleri için Malvar dalgacıkları, $\{u_{ik}(n)\}$, gösterilmektedir. $\{c_{ik}(n)\}$ katsayıları, $\{u_{ik}(n)\}$ 'in dikgenliği kullanılarak

$$c_{ik} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)u_{ik}(n) \quad (2.134)$$

şeklinde elde edilir. En belirgin katsayılarla bir gösterim elde etmek için toplam işaret uzunluğu ikili ağaç gibi parçalara bölünür. Pencerenin en iyi uzunluğu bir L uzunluğuna karşı gelen

$$\lambda(c_i^L) = -\sum_{k=0}^{L-1} |c_{ik}^L|^2 \log |c_{ik}^L|^2 \quad (2.135)$$

maliyet uzunluğunu hesaplayarak belirlenir [50,51]. Ağacın üst ve alt seviyelerinde bilgi maliyetini hesaplayarak ve kıyaslayarak en iyi uzunluk seçilir.

2.4.3. Dalgacık Dönüşümü

Zaman frekans analizi yöntemlerinden biri de dalgacık analizidir. Dalgacık yöntemleri oldukça yeni matematiksel araçlardandır. Dalgacık analizinin ana prensipleri Fransız jeofizikçi Jean Marlet tarafından 70'li yılların ortasında geliştirilmiş ve sismik işaretlere uygulanmıştır. Dalgacıkların modern teorideki kurucuları Grossman ve Marlet'tir. Özellikle, Mallat [52,53] ve Meyer dalgacık ile çoklu çözünürlük analiz yapısı arasındaki yakın ilişkiyi keşfetmiş, ana dalgacık hesaplamada basit bir yola ulaştırmışlardır. Onların çalışması sürekli-zamanlı dalgacıklar ve sayısal süzgeç öbekleri arasındaki bağlantıyı kurmuştur. Daubechies [54,55,56] sonlu-süreli birimdik dalgacıklar ile sonlu dürtü cevaplı (FIR) süzgeç öbekleri oluşturmak için sistematik bir teknik geliştirdi. Bu sonuçlar işaret işleme çevreleri kadar matematik içinde de olağanüstü bir ilgiyi tetikledi. Ses ve görüntü/video gibi durağan olmayan işaretlerin gösterimindeki veriminden ve diğer birçok ilginç özelliklerden dolayı, dalgacıklar çok hareketli araştırma alanlarından biri olmuştur.

Sıklık bölgesi içindeki işareti test etmek için frekans imleri kurmada genellikle iki yol vardır. Birincisi; hem Gabor dönüşümü hem de Fourier dönüşümü gibi *harmonik ilişkili karmaşık sinüs fonksiyonları* (*harmonically related complex sinusoidal functions*) kullanmaktır. Diğer; verilen temel $\psi(t)$ fonksiyonundaki zaman değişkeni t 'yi ölçekleyerek bir taban elde etmektedir. Eğer $\psi(t)$ fonksiyonunun merkez frekansı veya ortalama frekansı ω_0 ise, onun zamanda ölçeklenmiş versiyonu $\psi(t/a)$ 'nın merkez frekansları ω_0 'ın karşılığı olacaktır. Genişletilmiş ve ötelenmiş $\psi(a^{-1}(t-b))$ fonksiyonu işaretin yerel davranışını incelemede im işaretleri olarak kullanıldığı zaman, bu son gösterim, dalgacık dönüşümü (DD) veya eğer işaret, sürekli zamanın bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde, *sürekli zamanlı dalgacık dönüşümü* (*continuous-time wavelet transform*) (SDD) adını alır ve

$$SDD(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int x(t) \psi * \left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad a \neq 0 \quad (2.136)$$

şeklinde tanımlanır, burada $\psi(t)$ ana dalgacığı göstermektedir. a parametresi, frekans karşılığı olarak, ölçekleme indeksini göstermektedir. b parametresi zamanda ötelemeyi göstermektedir. $\psi(t)$ 'yi 0 (sıfır) zaman, ve ω_0 frekansında ortaya konulduğu varsayılp, sonra anılan sıraya göre $\psi(a^{-1}(t-b))$ genişlemesi ve dönüşümü b zamanında ve ω_0/a frekansında yerleşmiştir. Sonuç olarak, $SDD(a,b)$ niceliği, $x(t)$ ve $\psi(a^{-1}(t-b))$ 'nin iç çarpımı ve $\left(b, \frac{\omega_0}{a}\right)$ çevresindeki işaretin davranışını yansıtmaktadır. Bu nedenle

$$SDD(a,b) \Big|_{a=\frac{\omega_0}{\omega}, b=t} = ZF\left(\frac{\omega_0}{\omega}, t\right) \quad (2.137)$$

eşitliği ile gösterilen $SDD(a,b)$ zaman ve frekansın bir fonksiyonu olarak da düşünülebilir.

KZFD'de, işaretin birleşik zaman frekans özelliğini incelemek için, ölçek olarak zamanda öteleme ve frekans-kiplenmiş tek ilk örnek (prototype) fonksiyonu $w(\tau-t)\exp\{j\omega\tau\}$ oluşturulmuştur. Bu nedenle bütün temel fonksiyonlar aynı zarfa sahiptirler. Bir kere $w(t)$ seçildiği zaman, temel fonksiyonların zaman ve frekans çözünürlükleri sabitlenir. Diğer yandan, Dalgacık Dönüşümünde kullanılan ölçek, ana dalgacığın genişlemesi ve dönüşümünü sağlamaktadır. Sonuç olarak, temel $\psi(a^{-1}(t-b))$ fonksiyonunun zaman çözünürlüğü ve frekans çözünürlüğü ölçekleme faktörünün fonksiyonlarıdır.

İşaretin çözünürlüğünü karakterize etmek için standart sapma kullanılmaktadır. Eğer ana dalgacık $\psi(t)$ 'nin zaman ve frekans sapmaları Δ_t ve Δ_ω ise, $\psi(a^{-1}(t-b))$ 'nin zaman ve frekans sapmaları da sırasıyla Δ_t ve Δ_ω/a 'ya karşılık gelmektedir. $\psi(a^{-1}(t-b))$ dalgacık temel fonksiyonu için zaman çözünürlüğünün yüksek olması (daha küçük a) frekans çözünürlüğünün daha kötü olmasına sebep olur. Bu da dalgacık tabanının düşük salınımlar için uzun süreli işaretlere, yüksek salınımlar için kısa süreli işaretlere

uyumasını göstermektedir. KZFD ve DD'nin birleşik zaman frekans bölgesindeki yerleşimi farklılık gösterir. KZFD doğrusalken DD'nün ki ise logaritmiktir.

Dalgacık taban fonksiyonu için ilginç olan şey zaman çözünürlüğünün $a\Delta t$ ve frekans çözünürlüğünün $\Delta\omega/a$ 'nın çarpımının ölçekleme faktörü olan a 'dan bağımsız olmasıdır. Bu da dalgacık $\psi(a^{-1}(t-b))$ fonksiyonunun süreksizlik prensibine uymasını ifade eder. Daha fazlası için ana dalgacık $\Psi(t)$ 'nin ortalama frekansının ω_0 olduğu farzedilir. O zaman dalgacık $\psi(a^{-1}(t-b))$ 'nin ortalama frekansı ω_0/a 'dır. Özet olarak frekans bant genişliğinin oranı $2\Delta\omega/a$ (frekans bölgesinde çift standart sapma) ve ortalama frekans ω_0/a , a ölçeği ile değişmez. Bu da $Q = \frac{2\Delta\omega/a}{\omega_0/a} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$ gösterilen ifadede, Dalgacık

dönüşümü ile geleneksel sabit Q analizini doğal olarak birbirine bağlar. KZFD ve DD'nün arasındaki farkı anlamak için aşağıdaki örnek incelenebilir.

İşaret

$$s(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2) + e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t} \quad (2.138)$$

şeklinde olup, frekans gösterilimi

$$S(\omega) = e^{j\omega t_1} + e^{j\omega t_2} + 2\pi\delta(\omega - \omega_1) + 2\pi\delta(\omega - \omega_2) \quad (2.139)$$

dir.

(2.138)'teki işaret için KZFD ve DD karşılaştırılırsa, bütün zaman frekans bölgesinde KZFD'nün zaman ve frekans çözünürlüğü tek biçimliyken, bunlar DD'de değişmektedir. Yüksek frekanslarda daha iyi zaman çözünürlüğü, daha kötü frekans çözünürlüğü elde edilmektedir. Düşük frekanslarda daha iyi frekans, daha kötü zaman çözünürlüğüne sahip olunmaktadır. Buna rağmen merkez frekansı ile bant genişliğinin oranı sabittir.

DD'nün karesi genellikle skalogram (SKAL) olarak ifade edilir.

$$SKAL(a, b) = |SDD(a, b)|^2 \quad (2.140)$$

Şunu ifade etmek önemlidir, eğer biz sadece işareti analiz etmek istiyorsak ve dönüşüme dayanan orijinal işareti tekrar elde etmek istemiyorsak o zaman (2.136) eşitliği ile verilen ana dalgacık, $\psi(t)$, istediğimiz herhangi bir fonksiyon olabilir. Ama mükemmel bir şekilde yeniden elde etmek istiyorsak, ana dalgacığın, $\psi(t)$, seçimi daha sınırlandırılmıştır. Ayrıca *onanırlık koşulunu* (admissibility condition) sağlamak zorundadır. Bu da

$$C_{\Psi} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2.141)$$

denklemleri ile verilir. $\Psi(\omega)$ ana dalgacığın, $\psi(t)$, Fourier dönüşümüdür. (2.141) şartı $\Psi(0)=0$ olmasını gerektirmektedir. Diğer bir deyişle ana dalgacık, $\psi(t)$, band geçirendir. $\psi(t)$ onanırlık şartını sağlarsa, orijinal işaret tekrar

$$x(t) = \frac{1}{C_{\Psi}} \iint \frac{1}{a^2} SDD(a,b) \hat{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) da db \quad (2.142)$$

denklemleri ile oluşturulabilir ve dalgacık fonksiyonunun, $\psi(t)$, çiftidir. Genellikle, $\hat{\psi}(t) = \psi(t)$ 'dir. Gabor açılımında olduğu gibi sürekli zamanlı dalgacığın gösterimi gereksizdir. Orijinal işaret, tamamıyla sürekli zamanlı dalgacık dönüşümünün örneklenmesiyle yeniden elde edilebilir. Gösterilimin sonucu dalgacık serisi olarak adlandırılır.

Daha önceki özelliklere ek olarak, Dalgacık dönüşümün önemli bir özelliği de

$$\int |x(t)|^2 dt = \frac{1}{C_{\Psi}} \iint a^{-2} |SDD(a,b)|^2 da db \quad (2.143)$$

denklemdir ki, bu da birleşik zaman frekans düzleminde dalgacık dönüşümünün ağırlıklı enerjisi, zaman bölgesinde işaretin enerjisine eşittir. Geleneksel olarak (2.143) denklemi, Fourier dönüşümünün Parseval formülünün kopyası olarak düşünülür. Şunu belirtmek önemlidir ki genelde $w(t)$ fonksiyonu çok kötü yerleştirilmedikçe, KZFD'nü sağlamaz [56].

Sonuç olarak, KZFD’de kullanılan temel fonksiyonlar, karmaşık harmonik sinüzoidal fonksiyonlar olduğu için KZFD de genellikle karmaşık sayı çıkar. Diğer taraftan, işaret, $x(t)$, ve ana dalgacık, $\psi(t)$, gerçek olduğu sürece Dalgacık dönüşümü de gerçektir. Bu da dalgacık dönüşümünü bir çok uygulama için çekici yapmaktadır.

2.5. EVRİMSEL İZGE ANALİZİ

Evrimsel İzge kuramı [57], rasgele, durağan olmayan süreçlerin zamana bağlı izgesel güç yoğunluklarını tanımlamakta kullanılan bir yaklaşımdır. Priestley’in Evrimsel İzge yöntemi $\{x(t)\}$ sürecinin titreşimli olduğunu varsayar. (Örneğin $\{x(t)\}$ ’nin genliği zamanla yavaşça değişen sinüzoidal bileşenlerden oluşur.

Evrimsel İzge kuramı, durağan izgesel kuramın genelleştirilmiş durumu olan aşağıdaki önermeye dayanır.

Önerme: $\{x(t)\}$, kovaryans fonksiyonu $R(t, t') = E[x^*(t).x(t')]$ olan, sıfır ortalamalı bir süreç olsun. Her bir t için

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\gamma)|^2 d\mu(\gamma) \leq \infty \quad (2.144)$$

olan ve bütün t ve t' ’ler için

$$R(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t^*(\gamma) \phi_{t'}(\gamma) d\mu(\gamma) \quad (2.145)$$

olan bir $\{\phi_t(\gamma)\}$ işlevler kümesi ve bir $\mu(\gamma)$ ölçüsü ancak bu süreç

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\gamma) dZ(\gamma) \quad (2.146)$$

biçiminde gösterilebildiğinde vardır. Burada $\{Z(\gamma)\}$, dikgen artışlar sürecidir ve

$$E[dZ^*(\gamma)dZ(\gamma')] = \begin{cases} 0 & \gamma \neq \gamma' \\ d\mu(\gamma) & \gamma = \gamma' \end{cases} \quad (2.147)$$

özelliğine sahiptir. $\{x(t)\}$ durağan bir süreç olduğunda, $\{\phi_t(\gamma)\}$ işlevler kümesi, $\phi_t(\gamma) = e^{j\gamma t}$ şeklinde karmaşık üstellerdir. Bir ölçü olan $\mu(\gamma)$ ise basitleştirilmiş izgedir. Örneğin, durağan bir sürecin izgesi $\mu(\gamma)$ ölçüsünün türevidir. Sonuçta, süreç artışları kümesi $\{dZ(\gamma)\}$ 'yı birim değişintili beyaz gürültü olarak kabul edebiliriz. Bu yüzden, $d\mu(\gamma) = d\gamma$ 'dır. Bunun anlamı izgesel ölçünün sürekli ve izgesel değişimlerin işlevler kümesi ile temsil edilebilir olduğudur.

(2.146) numaralı eşitlikten sürecin enerji yoğunluğu

$$E[|x(t)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_t(\gamma)|^2 d\gamma \quad (2.148)$$

olarak elde edilir. Öyleyse işaretin enerjisi

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2 d\gamma dt \quad (2.149)$$

olur. Bu eşitlik, $|\phi(t)|^2$ 'nin işaretin enerjisinin t ve γ üzerinde birleşik olarak ayrışımını vereceğini işaret eder. t zaman değişkenidir, ama maalesef γ frekansın fiziksel açıklamasına sahip değildir. Süreç davranışı olarak titreşimli model, frekans değişkeni γ için anlamlı bir frekans açıklaması yapılmasına olanak veren kabuller sağlar. Titreşimli süreçler, zamanla değişen genlikli sinüzoidallerden oluşuyormuş kabul edilir. İşaretin enerjisinin zaman frekans ayrışımını elde etmek için, titreşimli modele uygun $\{\phi_t(\gamma)\}$ işlevler kümesine koşullar koyacağız.

İşlevler kümesini, bir taşıyıcıyı modüle eden genlik zarfı olarak tanımlayalım,

$$\phi_t(\gamma) = A_t(\gamma)e^{j\lambda(\gamma)t} . \quad (2.150)$$

Taşıyıcı frekansı $\lambda(\gamma)$, t' 'ye göre $A_t(\gamma)$ zarfının Fourier dönüşümünün genliği var ve sıfır frekansında en büyük olacak biçimde seçilir. Anlamlı frekans açıklaması temin edebilmek için taşıyıcı seçimi, taşıyıcı zarfın Fourier dönüşümü bir DC bileşenle bastırılabilir şekilde yapılır.

$\lambda(\gamma)$ taşıyıcısı, γ 'nın tekil değerli bir işlevi olarak kabul edildiğinde, (2.151) eşitliğinde γ 'dan $\Omega = \lambda(\gamma)$ 'ya bir değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\phi_t(\Omega) = A_t(\Omega)e^{j\Omega t} \quad (2.152)$$

ifadesi elde edilir. (2.145) ve (2.146) eşitlikleri bu duruma göre yeniden düzenlendiğinde

$$R(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} A_t^*(\Omega) A_{t'}(\Omega) e^{j\Omega(t-t')} d\Omega \quad (2.153)$$

ve

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_t(\Omega) e^{j\Omega t} dZ(\Omega) \quad (2.154)$$

elde edilir. Burada $E[|dZ(\Omega)|^2] = d\Omega$ 'dır. Baskın frekans $\lambda(\gamma)$ yapılırsa, Ω değişkeni frekansın fiziksel yorumuna sahip hale getirilir. Bundan sonra Priestley [58], $\phi_t(\gamma)$ fonksiyonlarının uygun seçimiyle yukarıda bahsedilen koşulları sağlayan titreşimli süreci tanımlamıştır.

Bu durumda, zaman ve frekans üzerinde birleşik olarak işaretin enerji dağılımı

$$E[|x(t)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |A_t(\Omega)|^2 d\Omega \quad (2.155)$$

ifadesiyle verilir. Böylece $A_t(\Omega)e^{j\Omega t}$ işlev kümesine göre sürecin titreşimli Evrimsel İzgesi

$$S_{ES}(t, \Omega) = |A_t(\Omega)|^2 \quad (2.156)$$

olarak tanımlanır.

Durağan olmayan bir sürecin evrimsel izgesinin tanımlanması için ikinci bir yaklaşım, Melard'ın Wold-Cramer (WC) izgesidir [58]. Ayırık zamanlı durağan olmayan bir $\{x(n)\}$ sürecinin WC ayrıştırımı, dürtü tepkisi $h(n, m)$ olan, nedensel, doğrusal ve zamanla değişen bir dizgenin çıkışı olarak gösterilebilir:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^n h(n, m)e(m). \quad (2.157)$$

Burada $\{e(m)\}$ durağan, sıfır ortalamalı, birim değışintili beyaz gürültü sürecidir. Diğer yandan, $\{e(m)\}$ gelişigüzel genlikli ve fazlı sinüzoidallerin toplamı olarak ifade edilebilir.

$$e(m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega m} dZ(\omega) \quad (2.158)$$

Burada $Z(\omega)$ dikgen artışı bir süreçtir. Şöyle ki;

$$E[dZ(\omega_1)dZ^*(\omega_2)] = \frac{1}{2\pi} \delta(\omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (2.159)$$

(2.158) numaralı eşitlik (2.159) numaralı eşitlikte yerine konursa durağan olmayan $\{x(n)\}$ süreci

$$x(n) = \int_{-\pi}^{\pi} H(n, \omega) e^{j\omega n} dZ(\omega) \quad (2.160)$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$H(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^n h(n, m) e^{-j\omega(n-m)} \quad (2.161)$$

Zadeh'in genelleştirilmiş aktarım işlevidir [59,60]. (2.157) numaralı eşitliğini kullanıp, ω 'nın işlevi olarak her bir n anında durağan olmayan bir $x(n)$ sürecinin güç dağılımını veren

$$E[|x(n)|^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(n, \omega)|^2 d\omega \quad (2.162)$$

$x(n)$ 'in değışintisi elde edilir. Böylece WC Evrimsel İzgesi

$$S_{WC}(n, \omega) = |H(n, \omega)|^2 \quad (2.163)$$

olarak tanımlanır. $H(n, \omega)$ frekansa bağlı işlev olarak kabul edilirse, yukarıdaki tanım Priestley'in Evrimsel İzgesiyle uyuşmaktadır, ki bu da bu işlevlerin zamanda yavaş değışim göstermelerini gerektirir. Gelişigüzel, zamanla değışen genlik ve fazlı ω_0 frekansındaki işaret bileşenini

$$x_0(n) = H(n, \omega_0) e^{j\omega_0 n} dZ(\omega_0) \quad (2.164)$$

olarak varsayılırsa, (2.162)'e göre bu bileşenin yerel gücü,

$$E[|x_0(n)|^2] = \frac{d\omega_0}{2\pi} |H(n, \omega_0)|^2 = \frac{d\omega_0}{2\pi} S(n, \omega_0) \quad (2.165)$$

eşitliğiyle verilir. İşaret ω_0 frekansına göre aşağıdaki gibi modellenirse,

$$x(n) = x_0(n) + y_{\omega_0}(n) = A(n, \omega_0)e^{j\omega_0 n} + y_{\omega_0}(n) \quad (2.166)$$

elde edilir. $y_{\omega_0}(n)$, $x(n)$ 'in ω_0 'dan başka frekanslardaki bileşenlerini içeren yanılğıyı modeller ve ortalaması sıfırdır. (2.164) numaralı eşitlik kullanılarak

$$A(n, \omega_0) = H(n, \omega_0)dZ(\omega_0) \quad (2.167)$$

elde edilir. Sonra, ω_0 frekansında WC Evrimsel İzgesi

$$S(n, \omega_0) = \frac{d\omega_0}{2\pi} E[|A(n, \omega_0)|^2] \quad (2.168)$$

olarak elde edilir. Bu durumda $S(n, \omega_0)$ 'ın zamana bağlı izgesinin kestirimi $A(n, \omega_0)$ 'ın kestirimi ile aynıdır. Tüm frekanslar için bu süreci yinelersek, zamanla değişen izgesel yoğunluk işlevi $S(n, \omega)$ 'nın kestirimi

$$S_{WC}(n, \omega) = \frac{1}{2\pi} |A(n, \omega)|^2 \quad (2.169)$$

olarak bulunur.

Evrimsel İzge kestirimi için önerilen etkili yöntemlerden biri olan Evrimsel Periyodogram (EP) [61]'te verilmiştir. Burada önerilen yöntem,

$$\hat{A}(n, \omega) = \sum_{i=0}^{M-1} \beta_i^*(n) \sum_{l=0}^{N-1} \beta_i(l) x(l) e^{-j\omega l} \quad (2.170)$$

ile verilen $A(n, \omega)$ 'nın kestirimini kullanır. Burada $\{\beta(\cdot)\}$ dikgen çokterimliler kümesi ve M açılım derecesidir. Yukarıdaki eşitlik

$$\hat{A}(n, \omega) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) W(n, l) e^{-j\omega l} \quad (2.171)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$W(n,l) = \sum_{i=0}^{M-1} \beta_i^*(n) \beta_i(l) \quad (2.172)$$

olarak tanımlıdır. Bu durumda, evrimsel periyodogram kestirimi

$$\hat{S}_{EP}(n,\omega) = \frac{N}{M} |\hat{A}(n,\omega)|^2 \quad (2.173)$$

yardımıyla bulunabilir. $\frac{N}{M}$ sabiti, [61]'te uygun enerji normalizasyonu için tanımlanmıştır. EP kestiriminin başarımı, zamanla değişen pencere işlevi $W(n,l)$ 'nin zaman frekans yerleşmesini sağlayan açılım derecesi M 'nin seçimine bağlıdır. Dikgen çokterimliler kullanılırsa (Fourier ya da Legendre gibi), bu pencere genellikle zamanda ve frekansta kötü yerleşir. Bunun sonucu olarak da, EP yerleşme sorunu ve yan kulaklar ortaya çıkar.

Daha sonraki bir çalışmada Evrimsel Spektrum (ES) kestirimi için çok pencereli Gabor açılımı kullanan bir yöntem önerilmiştir [62]

2.5.1. Çok Pencereli Gabor Açılımı ile Evrimsel İzge Kestirimi

Durağan olmayan bir işaretin Eİ analizi ile o işaretin Çok Çözünürlüklü Gabor Açılımı arasındaki ilişki [62]'de verilmiştir. O çalışmada, Wold-Cramer gösterimine benzer, ayırık ve zamanla değişen sonlu uzunlukta bir $x(n)$; $n= 0, 1, 2, \dots, N-1$, işaretinin çok çözünürlüklü Gabor açılımı

$$x(n) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{i,m,k} h_{i,m,k}(n) = \sum_{k=0}^{K-1} A(n, \omega_k) e^{j\omega_k n} \quad (2.174)$$

olarak verilmektedir. Burada $\{a_{i,m,k}\}$ çok çözünürlüklü Gabor katsayıları, $\{h_{i,m,k}\}$ taban işlevleri ve $A(n, \omega_k)$ ise bir zaman frekans çekirdeğidir. Taban işlevleri bir pencerenin

farklı ölçeklerle ölçeklenmesi ve zamanda ve frekansta eşit aralıklarla ötelenmesiyle elde edilmektedir:

$$h_{i,m,k}(n) = h_i(n - mL)e^{j\omega_k n}. \quad (2.175)$$

Burada $\omega_k = (2\pi kL')/N$ olup L ve L' sıra ile zamanda ve frekansta öteleme adımlarını, M ve K ise sıra ile zamanda ve frekansta alınan örnek sayılarını göstermektedir. Dolayısı ile bu pozitif tam sayılar birbirleri ile $ML = KL' = N$ şeklinde ilişkilidir. $h_i(n)$ sentez penceresi, birim enerjiye sahip bir $g(n)$ ana Gabor penceresinden

$$h_i(n) = 2^{i/2} g(2^i n), \quad i = 0, 1, \dots, I-1 \quad (2.176)$$

zaman ölçeklemesi ile elde edilir. Burada, I kullanılan pencere yani çözünürlük sayısını, 2^i ise ölçeği göstermektedir.

$a_{i,m,k}$ Gabor katsayıları, $h_{i,m,k}(n)$ taban işlevlerine dik olan, $\gamma_{i,m,k}(n)$ analiz pencere kümesi yardımı ile bulunur:

$$a_{i,m,k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \gamma_{i,m,k}^*, \quad \gamma_{i,m,k}(n) = \gamma_i(n - mL)e^{j\omega_k n}. \quad (2.177)$$

Burada analiz penceresi $\gamma_i(n)$, sentez penceresi $h_i(n)$ 'e dik olacak şekilde, aşağıdaki ikili-diklik koşulunun çözümü ile bulunur [40]:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_i(n + mK) e^{-j\frac{2\pi}{L}kn} \gamma_i^*(n) = \frac{L}{K} \delta_m \delta_k, \quad 0 \leq m \leq L'-1, \quad 0 \leq k \leq L-1. \quad (2.178)$$

[62]'de (2.174) eşitliğindeki çok pencereli Gabor açılımı ile durağan olmayan işaretlerin evrimsel izge analizi arasında bir bağlantı kurulmuş ve bir $x(n)$ işaretinin evrimsel izgesinin,

$$S_{EI}(n, \omega_k) = \frac{1}{K} |A(n, \omega_k)|^2 \quad (2.179)$$

olarak kestirilebileceği gösterilmiştir, $1/K$ faktörü düzgün enerji normalizasyonu için kullanılmaktadır. (2.174) eşitliği tekrar düzenlenerek

$$A(n, \omega_k) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_{i,m,k} h_i(n - mL) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} A_i(n, \omega_k) \quad (2.180)$$

elde edilir. Burada $A_i(n, \omega_k)$ farklı ölçekler ile kestirilmiş zaman frekans çekirdek işlevlerini göstermekte olup, bunların farklı ortalama teknikleri kullanılarak birleştirilmesiyle de El çözünürlüğü iyileştirilebilir [62,63]. Ayrıca, $a_{i,m,k}$ 'nin (2.177)'teki karşılığı (2.180) eşitliğinde yerine konarak

$$A(n, \omega_k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) w(n, l) e^{-j\omega_k l} \quad (2.181)$$

elde edilebilir ki burada $w(n, l)$ Gabor sentez ve analiz pencerelerine bağlı, zamanla değişen yeni bir penceredir:

$$w(n, l) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m=0}^{M-1} \gamma_i^*(l - mL) h_i(n - mL) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} w_i(n, l) \quad (2.182)$$

(2.181) eşitliği, $w(n, l)$ penceresi ile tanımlı bir KZFD olarak yorumlanabilir. $w(n, l)$ penceresi birim enerjiye normalize edildiğinde, işaretin toplam enerjisinin korunduğu [62]'da gösterilmiştir. Üstelik, $S_{EI}(n, \omega_k)$ negatif olmayan değerler almakta ve zaman frekans marjinallerini [3] yaklaşıklıkla sağlamaktadır. Bu sebeple bir çok zaman frekans dağılımının aksine $S_{EI}(n, \omega_k)$, zaman frekans enerji yoğunluk fonksiyonu olarak yorumlanabilir [3]. Dolayısıyla durağan olmayan işaretlerin bir özneliği olan birleşik zaman frekans momentlerinin hesaplanmasında enerji yoğunluk fonksiyonu olarak kullanılabilir.

2.6. YÜKSEK DERECELİ ZAMAN-FREKANS YÖNTEMLERİ

Durağan olmayan işaretlerin yüksek dereceden izgesel analizi için uygun bir araç bulma girişimi, Wigner ikiz izgesini yani üçüncü derece Wigner dağılımını öneren Gerr [64] tarafından yapılmıştır. Dandawate ve Giannakis [65], Fonollosa ve Nikias [66] ve Swami [14] birbirinden bağımsız olarak, Gerr'in Wigner ikiz izgesini yüksek dereceli Wigner-Ville dağılımlarına genelleştirmişlerdir. Bu, zaman çoklu frekans dağılımları, WVD'nin birçok özelliğini korurlar ve onları daha yüksek dereceli izgelere genişletirler [16,67], fakat işaretin zaman frekans gösteriliminin doğruluğunu dikkate almazlar. Öte taraftan, Polinomsal Wigner-Ville Dağılımları (PWVD) [68] ve buna karşı gelen Zamanla-Değişen Yüksek Dereceli İzge (ZD-YDİ) sınıfı [68], açıklayıcı zaman frekans analizinde doğru işaret gösterilimi için araçlardır.

Yüksek dereceli zaman frekans analizi için üç ana yöntemden bahsedebiliriz. Birinci yöntem; Fonollosa ve Nikias [16] tarafından oluşturulan Wigner yüksek dereceli moment izgesidir. Fonollosa ve Nikias, Wigner dağılımlarını, Wigner ikiz-izgesi, Wigner üçüz-izgesi vs. şeklinde genelleştirmişlerdir. Bu Wigner ikiz-izgesi, sezim problemlerinde (detection problem), Wigner dağılımından daha iyi sonuç vermektedir, fakat hangi çoklu frekans bileşenlerine sahip olduğunu açık bir şekilde sunamamaktadır.

İkinci yöntem, Boashash ve O'Shea [74] tarafından geliştirilen polinomsal Wigner-Ville dağılımları (PWVD) adı verilen zaman frekans dağılımları sınıfıdır. Wigner-Ville dağılımı, yalnız doğrusal frekans kiplenimli işaretler için en iyi çözünürlüğü verirken, PWVD'ları, polinomsal frekans kiplenimli işaretler için de zaman frekans düzleminde en iyi çözünürlüğü verir. Bu yazarlar ayrıca, rasgele durağan olmayan süreçlerin zaman frekans analizi için zamanla değişen yüksek dereceli izgeler (ZD-YDİ) yöntemini de ortaya atmışlardır.

Üçüncü yöntem, Stankovic [13,14] tarafından geliştirilen Wigner dağılımını da genelleştiren L-Wigner dağılımıdır. Derece arttıkça, herhangi saf frekans kiplenimli işaret için L-Wigner dağılımı en iyi çözünürlüğe yaklaşır. Bununla birlikte, eğer işaret

genlik kiplenimli veya birden fazla bileşen içeriyorsa, L-Wigner dağılımı memnun edici olmayan sonuçlar sağlar.

Yüksek dereceli istatistikleri kullanmasıyla PWVD'ler ve L-Wigner dağılımları, önemli avantaj kazandırıyor gibi görünse de, bu yöntemlerin güçlükleri uygulanmalarını zorlaştırmaktadır.

2.6.1. Wigner Yüksek Dereceli Moment İzgesi

$x(t)$, karmaşık rasgele olmayan bir işaret olsun. $x(t)$ 'nin k . dereceden Wigner Yüksek Dereceli Moment İzgeleri (WYDİ), $W_{kx}(t, f_1, f_2, \dots, f_k)$,

$$W_{kx}(t, f_1, f_2, \dots, f_k) = \int_{\tau_1} \dots \int_{\tau_k} x^* \left(t - \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^k \tau_m \right) \cdot \prod_{i=1}^k x \left(t + \frac{k}{k+1} \tau_i - \frac{1}{k+1} \sum_{j=1, j \neq i}^k \tau_j \right) \exp(-j2\pi f_i \tau_i) d\tau_i. \quad (2.183)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanım aşağıda gösterildiği şekilde elde edilmiştir. $W_{kx}(t, f_1, f_2, \dots, f_k)$, $R_{kt}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ (k -boyutlu yerel moment fonksiyonu)'nin k -boyutlu Fourier Dönüşümüdür:

$$W_{kx}(t, f_1, f_2, \dots, f_k) = \int_{\tau_1} \dots \int_{\tau_k} R_{kt}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \cdot \prod_{i=1}^k \exp(-j2\pi f_i \tau_i) d\tau_i \quad (2.184)$$

burada

$$R_{kt}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = x^*(t - \alpha) \prod_{i=1}^k x(t + \tau_i - \alpha) \quad (2.185)$$

α keyfi zaman gecikmesi ile tanımlanmıştır. $R_t(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ 'nin çarpımındaki çarpanlardan bir tanesi, $x(t)$ 'nin eşleniğinin geciktirilmiş bir versiyonu ve geri kalanlar $x(t)$ 'nin geciktirilmiş versiyonları olacak şekilde tanımlandığına dikkat edilmelidir.

Aşağıda açıklanacağı gibi, $R_t(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ 'nin tanımında $x(t)$ 'nin rasgele olmayan bir analitik işaret olması durumunda en az bir eşlenik terim olması gereklidir.

Yüksek dereceli moment izge bölgesinde, zaman frekans dağılımının üç temel özelliğinin sağlanması için, α 'nın değeri uygun seçilmelidir. Özellikle, verilen bir zamanda ani frekansı, çoklu frekans uzayında ortalama frekans olarak elde etmek için $R_t(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ 'nin

$$\frac{1}{k+1} \left((t - \alpha) + \sum_{i=1}^k (t + \tau_i - \alpha) \right) = t \quad (2.186)$$

olacak şekilde, t zaman anında, ortaya yerleştirilmesi gerektiği gösterilecektir. Sonuç olarak,

$$\alpha = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k \tau_i \quad (2.187)$$

ve

$$R_{kt}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = x^* \left(t - \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^k \tau_m \right) \prod_{i=1}^k x \left(t + \frac{k}{k+1} \tau_i - \frac{1}{k+1} \sum_{j=1, j \neq i}^k \tau_j \right) \quad (2.188)$$

ifadeleri ortaya çıkar; buradan (2.183) eşitliği elde edilir. $k=2$ için WYDİ'nin özel durumları Wigner ikiz izgesini içerir:

$$W_{2x}(t, f_1, f_2) = \int \int_{\tau_1 \tau_2} x^* \left(t - \frac{1}{3} \tau_1 - \frac{1}{3} \tau_2 \right) x \left(t + \frac{2}{3} \tau_1 - \frac{1}{3} \tau_2 \right) \cdot x \left(t + \frac{2}{3} \tau_2 - \frac{1}{3} \tau_1 \right) \exp(-j2\pi f_1 \tau_1) \exp(-j2\pi f_2 \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.189)$$

ve $k=3$ için Wigner üçüz izgesinin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
W_{3x}(t, f_1, f_2, f_3) = & \int \int \int_{\tau_1 \tau_2 \tau_3} x^*(t - \frac{1}{4}\tau_1 - \frac{1}{4}\tau_2 - \frac{1}{4}\tau_3) x(t + \frac{3}{4}\tau_1 - \frac{1}{4}\tau_2 - \frac{1}{4}\tau_3) \\
& .x(t - \frac{3}{4}\tau_2 - \frac{1}{4}\tau_1 - \frac{1}{4}\tau_3) x(t + \frac{3}{4}\tau_3 - \frac{1}{4}\tau_1 - \frac{1}{4}\tau_2) \\
& .\exp(-j2\pi f_1 \tau_1) \exp(-j2\pi f_2 \tau_2) \exp(-j2\pi f_3 \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3
\end{aligned} \tag{2.190}$$

$k=1$ için Wigner dağılımı aşağıdaki gibi bulunur:

$$W_{1x}(t, f) = \int_{\tau} x^*(t - \frac{1}{2}\tau) x(t + \frac{1}{2}\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \tag{2.191}$$

(2.189) eşitliğindeki Wigner ikiz izgesinin tanımı Gerr tarafından önerilen üçüncü derece Wigner dağılımından [64], sadece işaretin eşleniğinin bağımlılığında ayrılır.

Görüldüğü gibi durağan olmayan işaretlerin zamanla değişen frekans içeriğinin tanımlanabilmesi için çok çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları bileşenler arasında çapraz terimler oluşturarak veya negatif değerler alarak güç izgesi olarak yorumlanamaz duruma gelmektedirler. KSF veya Gabor açılımı gibi bazı yöntemler ise kullanılan sinüsoidal analiz ve sentez pencere genişliğine bağlı çözünürlük sergilemekte ve işareti yeterince çözümleyen bir zaman frekans izgesi verememektedir. Bu problemin giderilmesi için önerilen yeni yaklaşımlar (pozitif zaman frekans dağılımları, işaret uyumlu açılım yöntemleri gibi) ise büyük hesap yükü getirmektedir.

Sonraki bölümlerde frekans içeriği doğrusal olarak değişen işaretlerin yüksek çözünürlüklü zaman frekans analizi ve güç izge kestirimi için kesirli Gabor açılımları sunulmaktadır.

3. BULGULAR

Bu bölümde klasik Fourier dönüşümünün genelleştirilmiş bir hali olan Kesirli Fourier dönüşümü Gabor açılımının taban fonksiyonları tanımlamakta kullanılacaktır. Kesirli Fourier dönüşümünde kullanılan taban fonksiyonları doğrusal anlık frekanslara sahip olup, bunların Gabor pencerelerini modüle etmesiyle elde edilecek olan taban fonksiyonları zaman frekans düzleminde dikdörtgen olmayan bir örnekleme kafesi tanımlayacaktır. Böylece frekans içeriği zamanla doğrusal olarak değişen bir cırp tipi işaretlerin yüksek çözünürlükte zaman frekans analizi için yeni Gabor açılımı önerilecektir.

Ayrıca çalışmasının sonunda durağan olmayan işaretlerin zamanla değişen izge kestirimi için Evrimsel İzge yaklaşımı verilmiştir. Bu izge gösterimi ile kesirli Gabor açılımının katsayıları arasında bir ilişki kurularak Evrimsel İzge çekirdeği elde edilmiştir. Evrimsel izge, bu gösterimin zamanla değişen çekirdeğinin genlik karesi olarak verilmektedir. Böylece işaret için, hem bir Zaman Frekans gösterimi hem de bir Zaman Frekans izgesi aynı anda elde edilmektedir. Önerilen çok pencereli kesirli Evrimsel izge yöntemi ile pozitif ve yüksek çözünürlüğe sahip bir ZF izgesi elde edilebilmektedir.

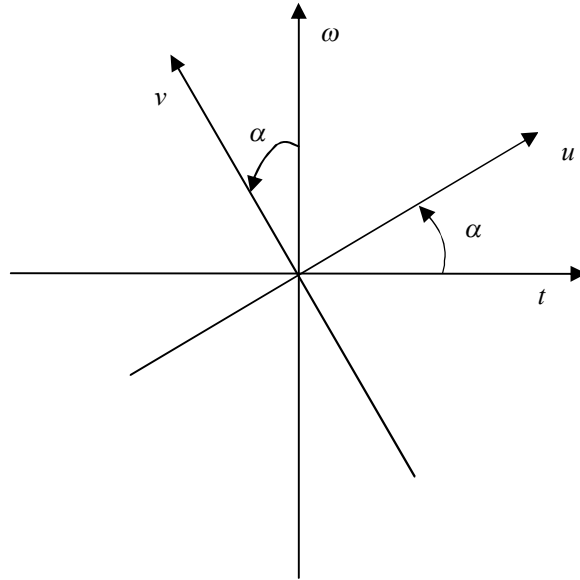
3.1.1. Kesirli Fourier Dönüşümü

Kesirli Fourier dönüşümü(KFD) olarak adlandırılan Fourier dönüşümünün genelleştirilmiş hali 1980’de, [70,71] önerilmesine rağmen 1993’de, [72], tekrar keşfedilene kadar özellikle sinyal işleme topluluğu tarafından potansiyel olarak oldukça yararlı bir araç olmasına rağmen pek ilgi görmemiştir. Son yıllarda ise bir çok araştırmacı, [72,73], bu konuda KFD’nin zaman frekans ekseninde bir dönme olarak yorumlanması, zaman–frekans dönüşümleriyle bağlantısı gibi sinyal işleme açısından çok önemli olan yeni sonuçları, neredeyse eş zamanlı ve bir birlerinden bağımsız olarak ortaya koymuşlardır. Daha sonra takip eden çalışmalarla KFD’nin ayrık zamanlı hali olan ayrık zamanlı fourier dönüşümü tanımları yapılmış ve böylelikle KFD’nin hesaplanması kolaylaştırılarak, çeşitli uygulamalarda kullanılabilirliği artırılmıştır.

Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD), Fourier dönüşümünün genelleştirilmiş bir halidir ve bir çok alanda uygulama alanı bulmaktadır (optik işaret işleme, difraksiyonel denklem çözme, v.b.). Zaman frekans gösteriminde iki eksenli bir düzlem kullanılır [Şekil-III.1]. Bu eksenler birbirlerine diktir, biri zamanı göstermek üzere diğeri frekansı göstermektedir (Şekil 3.1). $x(t)$ işaretini, zaman eksenı boyunca, Fourier transformunu da, frekans eksenı boyunca göz önüne alalım.

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.1)$$

Fourier transformunu F operatörü ile temsil edilmiş olsun. Bu durumda Fourier transformu saat ibresinin tersi yönünde $\pi/2$ 'lik bir dönüşü tanımlamış olur. Peş peşe iki tane Fourier dönüşümü alacak olursak $FFx(t)=x(-t)$ elde edilir. Bu işlem iki kere $\pi/2$ 'lik dönmeye karşılık gelir.



Şekil 3.1 Zaman frekans eksenı ve orjinal $\omega - t$ eksenine göre α açısıyla döndürölmüş $u-v$ eksen takımı

Şimdi, hangi doğrusal operatör'ün $\pi/2$ katı olmayan α açılı bir dönmeye takabül edeceğini [Şekil 3.1]'de gösterildiği gibi bulmaya çalışalım. Öncelikle böyle bir operatör'ün var olduğunu kabul edelim ve bunu $\mathfrak{R}^\alpha$ ile gösterelim. Bu operatör aşağıda belirtilen özelliklere sahip olmalıdır.

- | | | |
|-----------------------------------|--|-------|
| 1- Sıfır dönüş: | $\mathfrak{R}^0 = I$ | |
| 2- Fourier transformunu içermesi: | $\mathfrak{R}^{\pi/2} = F$ | |
| 3- Açılarının toplanması: | $\mathfrak{R}^\beta + \mathfrak{R}^\alpha = \mathfrak{R}^{\beta+\alpha}$ | (3.2) |
| 4- 2π 'lik dönme: | $\mathfrak{R}^{2\pi} = I$ | |

Bu özelliklere sahip KFD'ü aşağıdaki çekirdek dönüşümü yolu ile tanımlanır

$$K_\alpha(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j \frac{t^2+u^2}{2} \cot \alpha - jut \csc \alpha} & , \alpha \text{ 'nin katı değilse} \\ \delta(t-u) & , \alpha \text{ } 2\pi \text{ 'nin katı değilse} \\ \delta(t+u) & , \alpha + \pi \text{ } 2\pi \text{ 'nin katı değilse} \end{cases} \quad (3-3)$$

Bu çekirdek α ile, α 'nın tam katları da dahil olmak üzere süreklidir, Bu çekirdek aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- $K_\alpha(t, u) = K_\alpha(u, t)$
- $K_{-\alpha}(t, u) = K_\alpha^*(t, u)$
- $K_\alpha(-t, u) = K_\alpha(t, -u)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(t, u) K_\beta(u, z) du = K_{\alpha+\beta}(t, z)$ (3.4)

- $\int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(t, u) K_\beta^*(t, u') dt = \delta(u - u')$ (3.5)

En son eşitliğindeki özellik, t değişkeli u parametrelili $K_\alpha(t, u)$ çekirdek fonksiyonlarının bir dik küme oluşturduklarını göstermektedir. Yukardaki ilk koşuldan hareketle aynı

şey u değişkenli t parametrelili $K_\alpha(u, t)$ için de söylenebilir. $\alpha = \pi/2$ için KFD nin çekirdeği, klasik Fourier dönüşümünün çekirdeğine dönüşmektedir.

α açısına sahip bir x fonksiyonunun KFD (3.6) ve (3.7) deki şekilde verilmiş $\mathfrak{R}^\alpha x = X_\alpha$ fonksiyonları ile tanımlanmış olan [70,71] de gösterildiği şekilde tanımlanmıştır.

$$X_\alpha(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_\alpha(t, u) dt \quad (3.6)$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} e^{j \frac{u^2}{2} \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j \frac{t^2}{2} \cot \alpha} e^{-jut \csc \alpha} dt & , \alpha \pi\text{'nin katı değilse} \\ x(t) & , \alpha 2\pi\text{'nin katı değilse} \\ x(-t) & , (\alpha + \pi) 2\pi\text{'nin katı değilse} \end{cases} \quad (3.7)$$

KFD'ünün hesabı:

- 1- Bir çarpı ile çarpma
- 2- bir Fourier dönüşümü (argumanı $\csc \alpha$ ile modüle olmuş)
- 3- Bir başka çarpı ile çarpma
- 4- bir karmaşık genlik değeri ile çarpma

adımlarını içermektedir.

Çırpıların sabit bir genliği olması, KFD'nin varlığı hakkında daha genel şeyler söylemeye imkân verir. Eğer $x(t)$ sinyali L_1, L_2 uzayında tanımlı ise veya da genelleştirilmiş bir fonksiyonsa bu sinyalin bir çarpı ile çarpımı da L_1, L_2 uzayındadır veya da genelleştirilmiş bir fonksiyondur. Bu nedenle $x(t)$ sinyalinin KFD'si bu sinyalin Fourier dönüşümünün geçerliği olduğu her yerde geçerlidir.

Başlangıçta, (3.2)- (3.7) eşitlikleri ile verilen ve yapılacak bir KFD tanımının sağlaması gerektiği belirtilen özellikleri, (3.7) ile yapılan tanımın sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. 1. özellik, tanımdan kolaylıkla görülmektedir. 2. özellik, $\alpha = \pi/2$ için K_α 'nın Fourier dönüşüm çekirdeğiyle çakışmasının bir sonucudur. 3. özellik, (3.4) kullanılarak şu şekilde doğrulanabilir:

$$y(u)=X_{\alpha}(u)$$

$$Y_{\beta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\beta}(u, z) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot K_{\alpha}(t, u) \cdot dt \cdot du \quad (3.8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K_{\beta}(u, z) \cdot K_{\alpha}(t, u) \cdot dt \cdot du \quad (3.9)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot K_{\alpha+\beta}(t, z) \cdot dt \quad (3.10)$$

$$= X_{\alpha+\beta}(z). \quad (3.111)$$

Son olarak, 4. özellik, daha önce de belirtildiği gibi 2. ve 4. özelliğin bir sonucudur. Yine bu özelliklerden yararlanarak α dereceli KFD'nin tersi, (TKFD), kolaylıkla

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{-\alpha}(t, u) X_{\alpha}(u) du \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir. (3.12) eşitliğinden AFD'nin $x(t)$ sinyalinin $K_{-\alpha}(t, u)$ temel fonksiyonları cinsinden (u , bu temel fonksiyonlar kümesini tarayan parametre olmak üzere) ifade etmekten ibaret olduğu şeklinde bir yorum yapmak mümkündür. (3.12)'ye göre, bu temel fonksiyonlar, bir birlerine diktirler ve farklı u değerleri için sadece zamanda öteleme ve u 'ya bağlı bir faz terimiyle farklılık göstermektedirler. Yani :

$$K_{\alpha}(t, u) = e^{-j\frac{u^2}{2}\tan\alpha} \cdot K_{\alpha}(t - u \sec\alpha, 0) \quad (3.13)$$

(3.5) ile verilen dönüşümü $e^{4jn\alpha}$, (n tamsayı), ile çarpılırsa 1- 4. özelliklerinin sağlandığı görülür. Bu noktada ilgi çekici bir soru “ (3.5) ile verilen dönüşüm, 1-4. özelliklerini sağlayan tek dönüşüm müdür?” Sorusudur. Bu sorunu cevabı “hayır” dır. [74]'da AFD operatörünün öz fonksiyonları elde edilmiş , farklı öz fonksiyonlar ve öz değerler alınarak farklı AFD tanımlarının yapılabileceği gösterilmiştir. Yine aynı çalışmada, bu bölümde tanımı verilen AFD çekirdeğinin, öz fonksiyonları olarak

Hermite-Gaussian fonksiyonlarının alınması sonucu elde edilebileceği gösterilmiş ve bu dönüşüm çarpı tipi kesirli Fourier dönüşümü olarak adlandırılarak sınıflandırılmıştır. (3.3) ve (3.6)'ün Hermite-Gaussian fonksiyonları üzerinden denk tanımı (3.14),(3.16) 'de verilmiştir. Aslında daha önceki yıllarda (1980) Hermite-Gaussian fonksiyonlarının AFD çekirdeğinin öz fonksiyonları olduğu ve bu şekilde fonksiyonlar aracılığıyla elde edilen (3.16)'ün , (3.7) ile denkliği [70]'de gösterilmiştir. Ancak daha önce de belirtildiği gibi “bu tanım tek midir? Yoksa pek çok tanımdan biri midir?” sorusuna 2000 yılında yayınlanan, [74] referansında belirtilen çalışmaya kadar cevap bulunamamıştır. Son olarak bu konuda özetle şu söylenebilir: Bu zamana kadar yapılan araştırmalar ve bir çok alandaki uygulamalar göstermiştir ki bu bölümde tanımlanan KFD diğerleri arasında en “doğal” olanıdır ve yeni bir öz fonksiyon kümesi üzerinden daha kullanışlı bir tanım yapılana kadar da böyle kalacaktır.

$$H_{\sigma,n}(t) = \frac{1}{\left(2^n n! \sqrt{\pi} \sigma\right)^{1/2}} h_n\left(\frac{t}{\sigma}\right) e^{-(t^2/2\sigma^2)} \quad (3.14)$$

($H_{\sigma,n}(t)$:n. Dereceden birim varyanslı hermite-Gaussian fonksiyonu)

$$K_{\alpha}(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) H_n(u) . \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} X_{\alpha}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\alpha}(t,u) x(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \left(e^{-jn\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) x(t) dt \right) . \end{aligned} \quad (3.16)$$

KFD'ünün bazı özellikleri aşağıdaki tablo-III.1'de verilmiştir. Bu özelliklerin ispatları [70,71,75]'de bulunabilir.

Tablo-3.1 KFD'ünün bazı özellikleri görülmektedir.

İşaret	α açısıyla yapılmış KFD'ü
1 $x(t-\tau)$	$X_\alpha(u-\tau \cos \alpha) e^{j\frac{\tau^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j\tau \sin \alpha}$
2 $x(t)e^{jvt}$	$X_\alpha(u-v \sin \alpha) e^{j\frac{v^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - jv \sin \alpha}$
3 $x'(t)$	$X'_\alpha(u) \cos \alpha + j u X_\alpha(u) \sin \alpha$
4 $\int_\alpha^t x(t') dt$	$\sec \alpha e^{-j\frac{u^2}{2} \tan \alpha} \int_\alpha^u X_\alpha(z) e^{j\frac{z^2}{2} \tan \alpha} dz$ eğer $(\alpha - \pi/2)$ π 'nin katı değilse eğer $(\alpha - \pi/2)$ π 'nin katı ise klasik Fourier özelliği uygulanır
5 $tx(t)$	$u X_\alpha(u) \cos \alpha + j X'_\alpha(u) \sin \alpha$
6 $x(t)/t$	$-j \sec \alpha e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \int_{-\infty}^u x(z) e^{-j\frac{z^2}{2} \cot \alpha} dz$ eğer α , π 'nin katı değilse
7 $x(-t)$	$X_\alpha(-u)$
8 $x(ct)$	$\sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{c^2 - j \cot \alpha}} e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}\right)} X_\beta\left(u \frac{\sin \beta}{c \sin \alpha}\right)$, eşitlikte $\beta = \arctan(c^2 \tan \alpha)$

Parseval bağıntısı:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_\alpha(u) Y_\alpha^*(u) du \quad (3.17)$$

Enerjinin korunumu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_\alpha(u)|^2 du \quad (3.18)$$

Parseval eşitliği ve enerji koruma özelliği KFD'nin birim dik temel fonksiyonlar üzerinden tanımlanmasının bir sonucu olarak da görülebilir.

Fourier dönüşümünün enerji koruma özelliği sebebiyle bir sinyalin Fourier dönüşümünün genlik karesi $|X(\omega)|^2$ bu sinyalin enerji izgesi olarak adlandırılır ve sinyalin farklı frekanslardaki enerji dağılımı olarak yorumlanır. Sezgisel olarak daha az

anlamalı olsa da, $|X_{\alpha}(u)|^2$ 'nin, $x(t)$ sinyalinin kesirli enerji izgesi olarak adlandırılmasına ve sinyalin enerjisinin farklı çırplar, $K_{-\alpha}(t, u)$, üzerindeki dağılımı olarak yorumlanmasına imkân vermektedir.

Eğer $x(t)$ gerçel bir sinyal ise, daha önce verilen çekirdek özelliklerindeki ikinci özelliğin bir sonucu olarak aşağıdaki eşitlik ek bir özellik olarak yazılabilir.

$$X_{-\alpha}(u) = X_{\alpha}^*(u). \quad (3.19)$$

Ancak burada hemen belirtmek gerekir ki Fourier dönüşümünün tek ve çift sinyaller için geçerli olan simetri özelliğini herhangi bir α açısına sahip KFD'ye genişletmek mümkün değildir. Bunun sebebi KFD'sinin genel olarak gerçel bir fonksiyon olmamasıdır.

3.1.2. Kesirli Fourier Serisi

Periyodik bir işaretin frekans izgesi darbe dizilerinden oluşmaktadır. Bu bize işaretin Fourier serisi açılımının yolunu gösterir. Fourier serisi (FS) açılımı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [75].

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnt\omega_0} \quad (3.20)$$

Burada $x(t)$ ile periyodik bir işaret veya T süreye sahip sınırlı bir işettir. $\omega_0 = (2\pi / T)$. FS açılımının katsayıları

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jnt\omega_0} dt \quad (3.21)$$

Şeklinde hesaplanır. Burada $n=-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$. FS açılımı sürekli zamanlı iki çeşit işarete uygulanabilir.[75]. Bunlardan bir tanesi sonlu bir aralıktaki $[0, T]$ periyodik olmayan $x(t)$ işaretidir temsil eder. Bu durumda, $[0, T]$ aralığı dışında Fourier serisi periyodik $x(t)$ işaretine yakınsar. $x(t+nT)$, $n=\pm 1, \pm 2, \dots$. FS açılımını herhangi bir periyoda sahip periyodik bir işaret için kullanılabilir.

Kesirli Fourier serisini (KFS) bulabilmek için öncelikle ikilidik tabanları bulmalıyız. Klasik FS durumunda taban fonksiyonları Fourier domain'inde birim darbeler şekline sahip olan sinüsoidal fonksiyonlardır. Aynı notasyonu KFS tabanlarını bulmak için kullanabiliriz. α parametresine sahip bir darbe fonksiyonun $\delta(t - nt_0)$ kesirli Fourier domain'indeki gösterimin orjinal zaman gösterimi:

$$KFS_{-\infty}[\delta(t - nt_0)] = \sqrt{\frac{1 + j \cot \alpha}{2\pi}} e^{-j((t^2 + (nt_0)^2)/2) \cot \alpha + j(nt_0)t \csc \alpha} \quad (3.22)$$

KFS'in taban işaretlerinin tanımlanmasında aşağıdaki yapı kullanılmıştır

$$\Phi_{\alpha,n}(t) = \sqrt{\frac{1 + j \cot \alpha}{2\pi}} e^{-j((t^2 + (nt_0)^2)/2) \cot \alpha + j(nt_0)t \csc \alpha} \quad (3.23)$$

t_0 'a kesirli fourier domaininde merkez frekansı adı verilir. KFS'in taban fonksiyonları periyodik olmayan bir çarp fonksiyonudur ve periyodik olmayan sinyallerin toplamı periyodik bir toplam vermezler; bu yüzden KFS sonlu işaretlere uygulanabilir. KFS'inin taban işaretleri belirlendikten sonra, $[-(T/2), (T/2)]$ aralığında iki taban işaretini entegre ederek hesaplayabiliriz, bu bize (3.24) ve (3.25) daki ikilidiklik koşulunu kontrol etme şansı verir.

$$\int_{-(T/2)}^{T/2} \Phi_{n,m}(t) \Phi_{n,m}^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} e^{j(((nt_0)^2 - (mt_0)^2)/2) \cot \alpha} \int_{-(T/2) \csc \alpha}^{(T/2) \csc \alpha} e^{j(m-n)t_0 \tilde{t}} d\tilde{t} \quad (3.24)$$

$$= \begin{cases} \frac{T \csc \alpha}{2\pi} & , m = n \text{ için} \\ \frac{1}{j2\pi(m-n)t_0} e^{j(((nt_0)^2 - (mt_0)^2)/2) \cot \alpha} e^{-j(m-n)t_0(T/2) \csc \alpha} \times \{e^{j(m-n)t_0 T \csc \alpha} - 1\} & , m \neq n \end{cases} \quad (3.25)$$

burada $\tilde{t} = t \csc \alpha$. Eğer $\Phi_{\alpha,n}$ 'in ikilidiklik şartını sağlamasının istiyorsak, (3.25) denkleminin sağ yanın $m \neq n$ için 0 olması gerekmektedir. Bu koşul ancak $t_0 = 2\pi (\sin \alpha / T)$ iken sağlanır. KFS'inin ortonormal tabanları olan $(\tilde{\Phi}_{\alpha,n})$ 'i bulmak için her bir $\Phi_{\alpha,n}$ 'i $\sqrt{T \csc \alpha / (2\pi)}$ 'a böleriz.

$$\tilde{\Phi}_{\alpha,n}(t) = \frac{\Phi_{\alpha,n}(t)}{\sqrt{\frac{T \csc \alpha}{2\pi}}} = \sqrt{\frac{\sin \alpha + j \cos \alpha}{T}} \cdot e^{-j((t^2 + (n(2\pi/T)\sin \alpha)^2/2)\cot \alpha + jnt(2\pi/T))} \quad (3.26)$$

Burada $n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$. Böylece $\{\dots, \tilde{\Phi}_{\alpha,-1}, \tilde{\Phi}_{\alpha,0}, \tilde{\Phi}_{\alpha,1}, \dots\}$ seti orthonormal bir küme oluştururlar. Bu taban işaretlerinin anlık frekansını, bunların fazlarının türevini alarak elde edebiliriz. Bunu yapacak olursak, değeri

$$\omega_{\alpha,n}(t) = -t \cot \alpha + n \frac{2\pi}{T} \quad (3.27)$$

şeklinde bulunur. (3.27) ifadesinden her bir taban işaretinin çarp oranı $(-\cot \alpha)$ ile orantılı olan çarp sinyali olduğu açıkça görülür. Sonlu bir işaretin KFS açılımı, bu işaretin çarp bileşenleri cinsinden gösterimi olarak yorumlanabilir. Klasik Fourier serisi KFS'inin $\alpha = \pi/2$ olması durumuna eşit olduğu ve FS taban sinyallerinin harmoniklerinde zaman frekans düzlemindeki yatay çizgilere denk düştüğü görülür. Sonlu bir uzunluğa sahip $x(t)$ işaretinin KFS aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{\alpha,n} \tilde{\Phi}_{\alpha,n}(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{\alpha,n} \sqrt{\frac{\sin \alpha + j \cos \alpha}{T}} \cdot e^{-j((t^2 + (n(2\pi/T)\sin \alpha)^2/2)\cot \alpha + jnt(2\pi/T))} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$t \in [-T/2, T/2]$, burada $C_{\alpha,n}$ 'e α açılı KFS açılım katsayısı adı verilir. KFS açılım katsayıları işaret ile çarp taban işaretinin iç çarpımı şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}
C_{\alpha,n} &= \int_{-(T/2)}^{T/2} x(t) \tilde{\Phi}_{\alpha,n}^*(t) dt \\
&= \sqrt{\frac{\sin \alpha - j \cos \alpha}{T}} \int_{-(T/2)}^{T/2} x(t) e^{j((t^2 + (n(2\pi/T)\sin \alpha)^2/2)\cot \alpha - jnt(2\pi/T))} dt
\end{aligned} \tag{3.29}$$

KFS açılımı $[-(T/2), T/2]$ aralığında periyodik olmayan işaretlerin gösterimi için kullanılabilir.

Tablo 3.2’de KFS’inin özellikleri verilmiştir. Bu tablo KFD’ün deki Tablo 3.1 özellikleri ile karşılaştırılacak olursa, benzer özelliklere sahip olduğu görülür. Fakat Tablo 3.3’de gösterildiği gibi FS ve KFS’inin öteleme ve modülasyon özellikleri bazı kısıtlamalara sahiptir.

KFS’inin açılım katsayıları $x(t)$ ’nin KFD’ünün örneklenmesi ile elde edilebilir.

$$C_{\alpha,n} = \sqrt{\frac{2\pi \sin \alpha}{T}} \aleph_{\alpha} \left(n \frac{2\pi}{T} \sin \alpha \right) \tag{3.30}$$

$C_{\alpha,n}$, $x(t)$ işaretinin KFS’i açılımının katsayısıdır. $\aleph_{\alpha}(\cdot)$, $x(t)$ işaretinin KFD’ünün katsayılarıdır. (3.30)’den görüleceği üzere örnekleme aralığı T ’ye bağlı olduğu kadar α açısınada bağlıdır. KFS’inin hesaplama aralığı sonsuza yaklaştığında, KFS’inin katsayıları sıfıra yakınsar. Bu yüzden T ’nin hesaplama aralığı sonsuza yaklaştığında, KFS’ü KFD’üne yakınsar.

Tablo 3. 2 KFS'inin özellikleri

Ters işlem	$\text{KFS}[x(-t)] = C_{\alpha,(-n)}$
Eşlenik işlemi	$\text{KFS}[x^*(t)] = j C_{(-\alpha),n}$
Öteleme	$\tau = k \frac{2\pi \tan \alpha}{T}$, k tamsayıdır. $t_0 = 2\pi \sin \alpha / T$ $\text{KFS}[x(t-\tau)] = C_{\alpha,(n-k)} e^{j\frac{\tau^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j n t_0 \tau \sin \alpha}$
Modulasyon	$\text{KFS}[x(t)e^{j m t_0 t}] = e^{-j\frac{(m t_0)^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - j m n t_0^2 \cos \alpha} C_{\alpha,(n-m \sin \alpha)}$ $t_0 = 2\pi \sin \alpha / T$, ve $(n - m \sin \alpha)$ tam sayıdır
Ölçekleme	$\text{KFS}[x(ct)] = \sqrt{c} \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}} \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{c^2 - j \cot \alpha}} e^{\frac{j(n t_0)^2 \cot \beta}{2} (c^4 - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha})} C_{\beta,n}$ $\beta = \tan^{-1}(c^2 \tan \alpha)$, $t_0 = 2\pi \sin \alpha / T$ $\text{KFS}[x(ct)]$ 'in merkezi frekansı $t_0' = 2\pi \sin \beta / T$ 'dür
Parseval	$\alpha \neq m\pi$ ve m tam sayıdır, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{\alpha,n} ^2 = \int_T x(t) ^2 dt$

Tablo 3. 3 FS ve KFS'nin öteleme ve modülasyon kısıtlamaları

	Öteleme Özelliği	Modülasyon Özelliği
KFS	$x(t-\tau)$ $\tau = k(2\pi/T) \cdot \tan \alpha$, k tamsayı	$x(t)e^{j\nu t}$, $\nu = k(2\pi/T)$, k tamsayı
FS	$x(t-\tau)$ τ keyfi	$x(t)e^{j\nu t}$, $\nu = k(2\pi/T)$, k tamsayı
AKFT	$x(n-\tau)$ τ ve $(\tau \cos \alpha)$ iki tamsayı	$x(n)e^{j n T_s \nu}$, $\nu = k T_s \cot \alpha$, k tamsayı
AFT	$x(n-\tau)$, τ tamsayı	$x(n)e^{j n T_s \nu}$, ν keyfi

3.1.3. Ayırık Zamanlı Kesirli Fourier Dönüşümü

Sürekli zaman kesirli Fourier dönüşümü (SKFD) son yıllarda dikkate değer bir ilgi çekmiş, bu ilginin sonucu olarak da optik ve sinyal işleme alanlarında birçok uygulama sahası bulmuştur. Daha sonra ayırık zamanlı sinyaller için de kesirli bir dönüşüme ihtiyaç duyulması sonucu birçok araştırmacı SKFD'nin ayırık zamanlı şeklini elde etmeye çalışmışlar, çeşitli yöntemler önermişlerdir. Bu çeşitliliğin sebebi, doğal olarak, yapılacak bir ayırık zamanlı Fourier dönüşümü (AKFD) tanımdan, SKFD ile uyumlu olması, başka bir deyişle aşağıda belirtilen temel özellikleri sağlaması beklentisinin tam olarak karşılanmaya çalışılmasıdır.

- 1) Uniterlik
- 2) Açısak toplanabilirlik
- 3) Dönüşüm derecesi bir olduğunda AFD'ye dönüşme
- 4) SKFD'ye yakınsama

3.1.3.1. AFD Dönüşüm Matrisinin Öz Değerleri Ve Öz Ayrışımı

AFD matrisinin öz değerleri, öz vektörleri ve bunlara ait pek çok özellik [76] ve [77]'de geniş bir şekilde tartışılmıştır. Burada sadece bazı özellikler kısaca verilecektir. AFD matrisini F ile gösterilirse bu matrisin minimum polinomu $\lambda^4 - 1$ 'dir. [77,78,79]. Yani; $I, N \times N$ birim matris olmak üzere F , (3.31) denklemini sağlar.

$$F^4 = I \quad (3.31)$$

$\lambda^4 - 1$ eşitliğinin kökleri $N \geq 4$ için tek olduğundan, F matrisi basit ve köşegenleştirilebilir bir matris olup, [80], öz değerleri 1'in kökleri olan $\{1, -j, -1, j\}$ 'dir. Bu köklerin $\#(N, k)$ katlılık fonksiyonu tablo-3.4'de verilmiştir. $N \geq 4$ olduğunda öz değerler tek olmadığından dolayı bu durum için AFD matrisinin birçok öz vektör kümesi vardır. AFD matrisinin, 1, -j, -1, j öz değerlerine karşılık, sırasıyla, dört tane E_1, E_2, E_3 ve E_4 öz alt uzayları vardır.

Tablo 3. 4 AFD matrisinin öz vektörlerinin katlılığı

N	1'in katlılığı $\#(N,0)$	-j'nin katlılığı $\#(N,1)$	-1'in katlılığı $\#(N,2)$	j'nin katlılığı $\#(N,3)$
4m	m+1	m	m	m-1
4m+1	m+1	m	m	m
4m+2	m+1	m	m+1	m
4m+3	m+1	m	m+1	m

Tablo 3.5 AKFD çekirdek matrisini öz değer atama kuralı

N	Öz vektörler
4m	e^{-jka} , k=0,1,2, ... , (4m-2),4m
4m+1	e^{-jka} , k=0,1,2, ... , (4m-1),4m
4m+2	e^{-jka} , k=0,1,2, ... , 4m,(4m+2)
4m+3	e^{-jka} , k=0,1,2, ... , (4m+1),(4m+2)

[81]'de AFD matrisinin öz vektörlerinin hesaplanması için bir yöntem önerilmiştir, ancak bu yöntemle elde edilen öz vektörler gerçel değildir. [76]'de birbirinden farklı ve gerçel öz vektörler elde etmek için (3.31) eşitliğindeki gibi bir S matrisi tanımlanmıştır. S, farklı öz değerlere ve F matrisiyle yer değiştirme özelliğine sahip bir matris olsun. e , bu S matrisinin λ öz değerine karşılık gelen öz vektörü olsun. (3.32) eşitliği Fe 'nin, S'nin aynı öz değere denk gelen öz vektörü olduğunu göstermektedir.

$$S(Fe) = F(Se) = F(\lambda e) = \lambda Fe \quad (3.32)$$

S matrisinin öz vektörleri tek (bütün öz vektörleri birbirinden farklı) olduğu için bir β değeri için

$$Fe = \beta e \quad (3.33)$$

eşitliği yazılabilir. Böylelikle e, aynı zamanda F matrisinin de öz vektörü olmuş olur. (3.34) eşitliğinde tanımlanan S matrisi simetrik ve gerçel olduğu için öz vektörleri de gerçel ve birbirine dik olacaktır ki bu da F matrisinin istenen öz vektör kümesini oluşturmaktadır . [82].

N x N boyutlu S matrisinin öz değerleri , N 4'ün tam katı olmadığı sürece tektir. N'nin 4'ün tam katı olması durumunda iki tane öz değer 0 olduğu ve bu 0 öz değerlerinin karşılaşılabilecek katlı tek kök olduğu gösterilmiştir. [82].

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 2 \cos \omega & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos 2\omega & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos (N-1)\omega \end{bmatrix}, \quad \omega = 2\pi/N \quad (3.34)$$

3.1.3.2. S-Yöntemi

3.1.3.2.1. Ayrık Zamanda Açısal Dönme Kavramı

Ayrık zamanlı kesirli Fourier dönüşümü (AKFD) sürekli kesirli Fourier dönüşümünün (SKFD) açısal dönme özelliğini sağlamalıdır. Ancak, ne yazık ki ayrık zamanlı Fourier dönüşümünün (AFD) açısal uzantısını elde etmek için sürekli zamandaki yaklaşımı izlemek mümkün değildir. Çünkü ayrık (n,k) kafesi tamsayı olmayan değerler için açısal bir dönüşüme izin vermemektedir. Bu noktada açısal dönme sağlanmak için çekirdek matrisinin kuvvetlerini kullanma yoluna gidilmiştir. AKFD çekirdek matrisinin kuvvetiyle AKFD'de dönme açısı tam olarak aynı anlama

gelmektedir. AFD çekirdek matrisinin kesirli kuvvetiyle AFD işleminin dönme açısı arasındaki ilişki aşağıda listelenmiştir.

$$\mathfrak{R}_\alpha = F^{\frac{2\alpha}{\pi}} \quad (3.35)$$

$$F^a = \mathfrak{R}_{\frac{a\pi}{2}} \quad (3.36)$$

AKFD'nin hesaplanması için doğrudan AFD çekirdek matrisinin kuvvetlerini kullanmak bu konuda önerilen ilk yöntemdir., [83]. AFD'nin kesirli kuvvetleri (3.37) eşitliğinden yararlanılarak hesaplanabilir.

$$\mathbf{F} = \alpha_0(t)\mathbf{F}^0 + \alpha_1(t)\mathbf{F}^1 + \alpha_2(t)\mathbf{F}^2 + \alpha_3(t)\mathbf{F}^3 \quad (3.37)$$

$$\alpha_i = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 e^{j\frac{\pi}{2}(t-i)k} \quad (3.38)$$

Yukarıda tanımlanan çekirdeği sinyale uyguladığımızda $\mathbf{x}(n)$ sinyalinin AKFD'sini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F^a[\mathbf{x}(n)] = \alpha_0(t)\mathbf{x}(n) + \alpha_1(t)\mathbf{x}(-n) + \alpha_2(t)\mathbf{X}(n) + \alpha_3(t)\mathbf{X}(-n) \quad (3.39)$$

Yukarıdaki denklemde $\mathbf{X}(n)$, $\mathbf{x}(n)$ sinyalinin AFD'sini göstermektedir. (3.55) eşitliğine göre $\mathbf{x}(n)$ sinyalinin AKDF'si dört parçanın açısıl kombinasyonundan oluşmaktadır: $\mathbf{x}(n)$ sinyalinin kendisi, AFD'si, dairesel olarak simetriği ve AFD'sinin dairesel olarak simetriği. Bu AKDF tanımı SKFD'deki dönme özelliğini sağlamasına rağmen bu yöntemle hesaplanan dönüşüm sonuçları SKFD' ile uyuşmamaktadır. Özetle, sürekli Fourier dönüşümü ile AFD arasındakine benzer bir ilişki AKDF ile SKFD arasında yoktur.

S-yöntemi olarak nitelenen AKDF tanımı, AFD çekirdeğinin öz ayrışımı temel alınarak yapılmaktadır [76]. (3.34) eşitliğiyle tanımlanan S matrisi kullanılarak F matrisini öz ayrışımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* \quad (3.40)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{k \in E_0} (1) \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* + \sum_{k \in E_1} (-j) \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* + \sum_{k \in E_2} (-1) \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* + \sum_{k \in E_3} (j) \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^* \quad (3.41)$$

λ_k , S matrisinin öz değeri, $\mathbf{v}_k$ da bu öz değere karşı gelen öz vektördür. S matrisin öz vektörleri aşağıda belirtilen sebeplerden dolayı ayrık Hermite fonksiyonları olarak düşünülebilir:

- 1) S matrisin öz vektörleri aynı zamanda AFD çekirdeğinin de öz vektörleridir.
- 2) S matrisin öz vektörlerinin tamamı gerçel değerlidir.
- 3) S matrisin öz vektörleri birim-dik bir taban oluşturmaktadırlar.

3.1.3.3. Öz değer Atama Kuralı

F matrisini kuvvetleri, öz değer ayrışımında yer alan öz değerlerin kuvvetleri alınarak hesaplanabilir. Ancak burada öz değerlerin kesirli kuvvetleri konusunda bir belirsizlik söz konusudur. Bu belirsizlik Hermite fonksiyonlarının dereceleri kullanılarak giderilebilir. S matrisin öz vektörleri ayrık Hermite fonksiyonları olarak düşünüldüğünden ve n .dereceden Hermite fonksiyonu n tane sıfıra sahip olduğundan, S matrisinin öz değerlerindeki işaret değişimi sayısı Hermite fonksiyonlarının derecesiyle ilişkilendirilebilir. Eğer öz vektörde k tane işaret değişimi varsa bu vektör k . dereceden ayrık Hermite fonksiyonu olarak düşünülüp bu öz vektöre karşı gelen öz değer $e^{-jk\alpha}$ olarak atanabilir. N elemanlı bir öz vektör en fazla $N-1$ tane işaret değişimine sahip olabilir. Eğer $N-1$ işaret değişimine karşılık $e^{-j(N-1)\alpha}$ öz değeri atanırsa Tablo 3.3'de yer alan AFD çekirdeğinin öz değerlerinin katlılık durumlarıyla $N=4m$ ve $N=4m+2$ için uyuşmamaktadır. Bu nedenle $N-1$ işaret değişimi içeren öz vektör $e^{-jN\alpha}$ öz değerine atanmalıdır. Tablo-3.5' de AKFD için öz değer atama kuralı verilmiştir.

AFD çekirdek matrisinin öz değerleri belirlendikten sonra AKFD çekirdek matrisi öz değerlerin kesirli kuvvetleri alınarak aşağıdaki gibi kolaylıkla tanımlanabilir.

$$\mathfrak{R}_\alpha = F^{\frac{2\alpha}{\pi}} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\alpha} v_k v_k^*, & \text{N tek ise} \\ \sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\alpha} v_k v_k^* + e^{-jN\alpha} v_k v_k^*, & \text{N çift ise} \end{cases} \quad (3.42)$$

$\mathbf{x}(n)$ sinyalinin AKFD'si ise (3.43) eşitliyle hesaplanır.

$$X_\alpha(n) = \mathfrak{R}_\alpha \mathbf{x}(n) = F^{\frac{2\alpha}{\pi}} \mathbf{x}(n) = V D^{\frac{2\alpha}{\pi}} V^* \mathbf{x}(n) \quad (3.43)$$

$X_\alpha(n)$ 'den $\mathbf{x}(n)$ sinyaline sürekli zamanda olduğu gibi ($-\alpha$) parametresi yoluyla aşağıdaki gibi geçilebilir.

$$\mathbf{x}(n) = \mathfrak{R}_{-\alpha} X_\alpha(n) = F^{-\frac{2\alpha}{\pi}} X_\alpha(n) = V D^{-\frac{2\alpha}{\pi}} V^* X_\alpha(n) \quad (3.44)$$

3.1.3.4. AKFD'nin Özellikleri

1) Üniterlik: AKFD operatörü $\mathfrak{R}_\alpha$ AFD'nin üniterlik özelliğini taşımaktadır.

$$\mathfrak{R}_\alpha^* = \mathfrak{R}_\alpha^{-1} = \mathfrak{R}_{-\alpha} \quad (3.45)$$

Başka bir deyişle bu dönüşüm sinyalin enerjisini korumaktadır.

$$\|\mathfrak{R}_\alpha \mathbf{x}(n)\| = \|\mathbf{x}(n)\| \quad (3.46)$$

2) Açısal toplanabilirlik: Önce α açısı kadar sonra da β açısı kadar dönme, $\alpha + \beta$ kadarlık bir dönmeye eşittir.

$$\mathfrak{R}_\alpha \mathfrak{R}_\beta = \mathfrak{R}_{\alpha+\beta} \quad (3.47)$$

3) Zamanda ters dönme:

$$\mathfrak{R}_\alpha \mathbf{x}(-n) = X_\alpha(-n) \quad (3.48)$$

4) Periyodiklik:

$$\mathfrak{R}_{\alpha+2\pi} = \mathfrak{R}_\alpha \quad (3.49)$$

5) Simetri: Dönüşüm matrisi simetriktir.

$$\mathfrak{R}_\alpha(a, b) = \mathfrak{R}_\alpha(b, a) \quad (3.50)$$

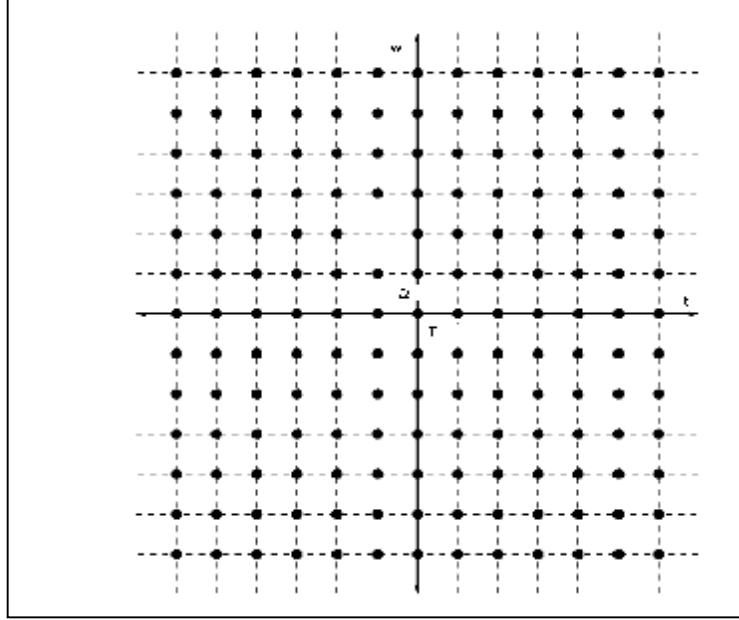
7) öz fonksiyon: SKFD' de olduğu gibi benzer-Hermite fonksiyonları AKFD'nin öz fonksiyonlarıdır.

8) Teklik-çiftlik: Eğer $\mathbf{x}(n)$ çift ise $X_\alpha(n)$ de çift, eğer $\mathbf{x}(n)$ tek ise $X_\alpha(n)$ de tektir.

3.2. SÜREKLİ ZAMANLI KESİRLİ GABOR AÇILIMI

Daha önce açıklanan sinüsoidal Gabor açılımı, sinyal analizi alanında çok çeşitli uygulamalarda başarıyla kullanılmıştır [42,43,44,62]. Taban işlevleri $h_{m,k}(t)$ sabit bir $h(t)$ pencere fonksiyonunun zamanda eşit aralıklarla ötelenmesi ve düzgün aralıklarla sinüsoidal modüle edilmesiyle elde edilir. Bunun sonucunda ZF düzleminde düzgün ve dikdörtgen bir bir örnekleme kafesi kullanılmış olur. Şekil 3-2 böyle bir örnekleme kafesini göstermektedir. Ancak çözümlenmek istenen sinyal, böyle sabit genişliğini ile modellenemiyor ise (sinüsoidal bileşenlerin toplamından oluşmuyor ise) bu sinyalin Gabor gösterimi yetersiz bir ZF yerelleşmesi sergileyecektir. Çünkü, sinyalin gösteriminde gereğinden fazla Gabor katsayısı kullanılacaktır. Pratikte karşılaşılan birçok sinyal (ses, müzik, biyolojik, sismik, makina titreşimleri vs.) zamanla değişen frekans özellikleri gösterir ve bu sinyaller sinüsoidal Gabor analizi için uygun değildir. Durağan olmayan sinyallerin Gabor analizinde ZF yerelleşmesini arttırmak amacıyla taban işlevleri sinyalin zamanla değişen frekans karakteristiğine uyumlu yapılmaktadır [43,84,85,86]. Bu yöntemlerin bir çoğunda sinyali en iyi temsil eden taban işlevlerini

bulabilmek için çok sayıda deneme yapılarak bunlar arasından seçim yapılmaktadır. Dolayısı ile çok uzun ve zaman alıcı hesaplamalar gerekmektedir.



Şekil 3.2 Sinüsoidal Gabor açılımında kullanılan ZF düzlemi bölütlemesi

Bu bölümde, taban işlevleri kesirli Fourier serisi (KFS) [75,87] yardımı ile elde edilen kesirli Gabor açılımı önerilmektedir. Bu taban işlevleri ile ZS düzlemi paralelkenarlar biçiminde bölütlenmekte ve bunların köşe noktaları Şekil 3.3'de verilen örnekleme kafesini oluşturmaktadır. Sürekli zamanlı bir $x(t)$ sinyalinin ZF analizi için Kesirli Gabor Açılımı aşağıda verilmektedir. Klasik Gabor açılımındaki sinüsoidal kernel yerine, kesirli Fourier dönüşümü kerneline benzer [75] taban işlevleri kullanılarak, $x(t)$ sinyalinin kesirli Gabor açılımı

$$x(t) = \sum_m \sum_k a_{m,k,\alpha} h_{m,k,\alpha}(t) \quad m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.51)$$

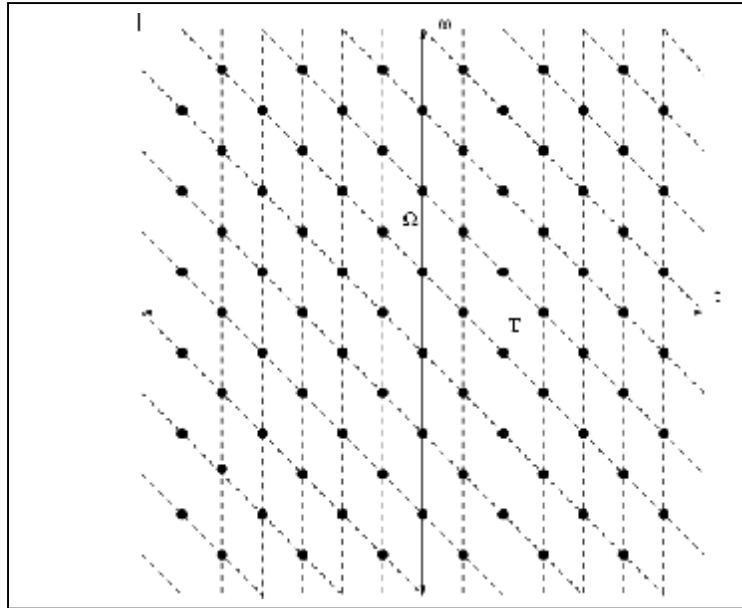
elde edilir burada $h_{m,k,\alpha}(t)$ taban işlevleri,

$$h_{m,k,\alpha}(t) = h(t - mT)W_{\alpha,k}(t) \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad (3.52)$$

ve sinüsoidal olmayan kernel,

$$W_{\alpha,k}(t) = \exp \left\{ i \left[-\frac{1}{2} (t^2 + (k\Omega \sin \alpha)^2) \cot \alpha + k\Omega t \right] \right\} \quad (3.53)$$

Burada T zamanda öteleme ve Ω frekans örnekleme aralığını göstermektedir. Klasik Gabor'da olduğu gibi kayıpsız bir gösterim için örnekleme hücreleri şu koşulu sağlamalıdır: $\Omega T \leq 2\pi$. $\Omega T = 2\pi$ kritik örnekleme ve $\Omega T < 2\pi$ fazla örnekleme olarak adlandırılır. (3.53) kesirli çekirdekten oluşturulan $h_{m,k,\alpha}(t)$ taban işlevinin anlık frekansı (3.27)'de gösterildiği gibi doğrusaldır. Şekil 3.3'de gösterilen, bu $\{h_{m,k,\alpha}(t)\}$ kesirli taban fonksiyonları ZS düzleminde paralelkenarlar oluştururlar, ve köşe noktaları kesirli düzlemdeki örnekleme noktalarını tanımlar.



Şekil 3.3 Kesirli Gabor açılımında oluşturulan ZF düzlemi bölütlemesi

Kesirli Gabor katsayıları $a_{m,k,\alpha}$ daha önce olduğu gibi iç çarpım ile elde edilebilir:

$$a_{m,k,\alpha} = \langle x(t), \gamma_{m,k,\alpha}(t) \rangle = \int x(t) \gamma_{m,k,\alpha}^*(t) dt \quad (3.54)$$

burada $\gamma_{m,k,\alpha}(t)$ analiz işlevidir.

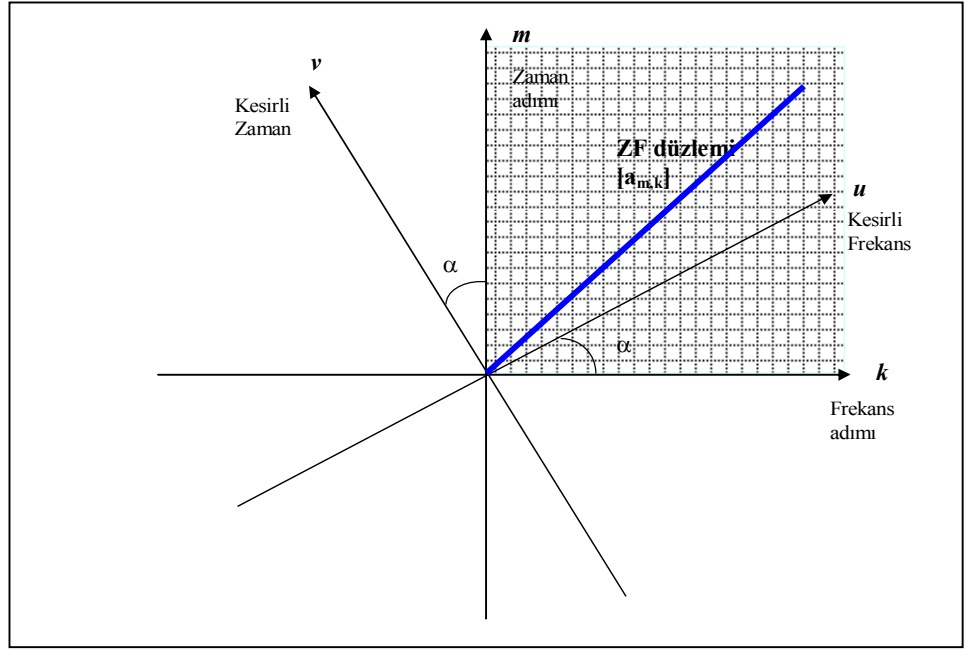
$$\gamma_{m,k,\alpha}(t) = \gamma(t - mT) W_{\alpha,k}(t) \quad (3.55)$$

olup klasik Gabor açılımında olduğu gibi $h_{m,k,\alpha}(t)$ sentez işlevlerine dik olarak

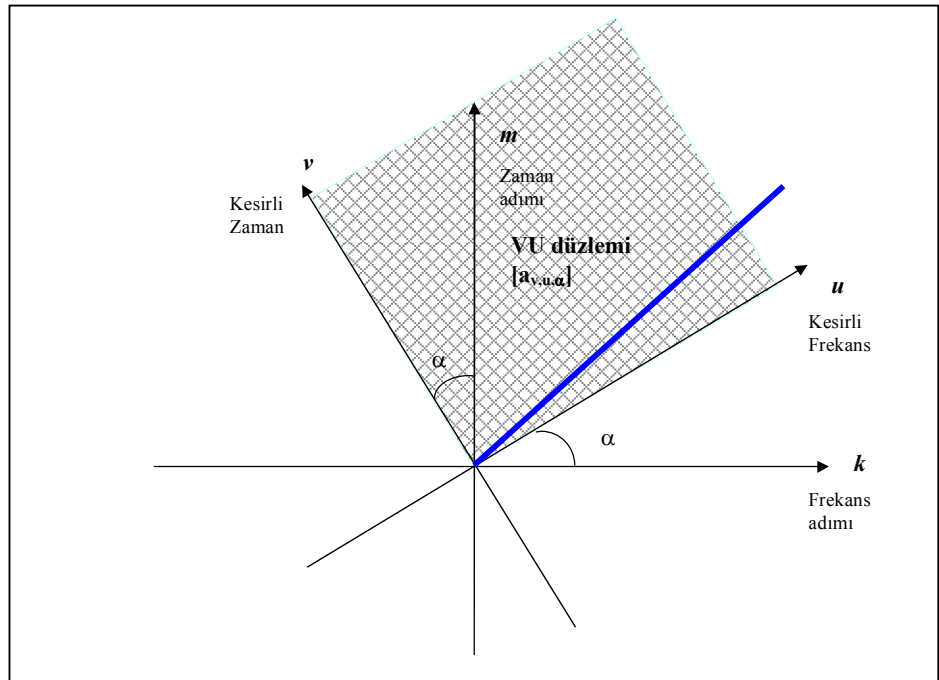
bulunacaktır. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ olduğu durumda (3.51) eşitliği

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_m \sum_k a_{m,k,\frac{\pi}{2}} h(t - mT) \exp \left\{ i \left[-\frac{1}{2} (t^2 + (k\Omega \sin \alpha)^2) \cot \alpha + k\Omega t \right] \right\} \\ &= \sum_m \sum_k a_{m,k,\frac{\pi}{2}} h(t - mT) \exp \{ ik\Omega t \} \end{aligned} \quad (3.56)$$

haline gelir ki bu klasik Gabor açılımıdır [39]. Burada önerilen kesirli Gabor açılımında verilen $x(n)$ işareti için α kesirli VU düzleminde yeni bir gösterim elde edilmektedir. Bu düzlem, kesirli zaman ve kesirli frekans eksenleri ile oluşmaktadır. Şekil-3.4 geleneksel Zaman-Frekans düzleminde Gabor katsayıları $[a_{m,k}]$ matrisini göstermektedir. Şekil 3.5 ise, α kesir derecesi kadar dönmüş, VU düzleminde hesaplanacak olan $[a_{v,u,\alpha}]$ katsayı matrisini vermektedir.



Şekil 3.4 Geleneksel Zaman-Frekans düzleminde Gabor katsayıları



Şekil 3.5 α kesir derecesi kadar dönmüş, VU düzleminde hesaplanacak olan $[a_{v,u,\alpha}]$ katsayı matrisini vermektedir.

3.2.1. Taban Kümesinin Tamlığı

$\{h_{m,k,\alpha}(t)\}$ taban işlevinin kümesinin tam olduğunu göstermek için (3.54) eşitliği (3.51) ifadesinde yerine konur

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_m \sum_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t') \gamma^*(t' - mT) W_{\alpha,k}^*(t') dt' \right) h(t - mT) W_{\alpha,k}(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') dt' \sum_m \sum_k h(t - mT) \gamma^*(t' - mT) W_{\alpha,k}(t) W_{\alpha,k}^*(t') \end{aligned} \quad (3.57)$$

eşitliği bulunur ve tamlık koşulunun sağlanabilmesi için gerekli koşul:

$$\sum_m \sum_k h_{m,k,\alpha}(t) \gamma_{m,k,\alpha}^*(t') = \delta(t - t') \quad (3.58)$$

Yukardaki formülde, (3.55) ve (3.52) deki açık ifadeleri kullanırsak (3.58) ifadesi

$$\begin{aligned} &\sum_m \sum_k h(t - mT) \exp \left\{ j \left[-\frac{1}{2} (t^2 + (k\Omega \sin \alpha)^2) \cot \alpha + k\Omega t \right] \right. \\ &\left. x \gamma^*(t' - mT) \exp \left\{ -j \left[-\frac{1}{2} (t'^2 + (k\Omega \sin \alpha)^2) \cot \alpha + k\Omega t' \right] \right\} = \delta(t - t') \right. \end{aligned} \quad (3.59)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\{h_{m,k,\alpha}(t)\}$ kümesinin $L_2(\mathfrak{R})$ uzayında bir taban oluşturabilmesi için

$$\sum_m \sum_k h(t - mT) \gamma^*(t' - mT) \exp \left\{ j \left[\frac{1}{2} (t'^2 - t^2) \cot \alpha + k\Omega(t' - t) \right] \right\} = \delta(t' - t) \quad (3.60)$$

$m, k = \pm 1, \pm 2, \dots$, denkleminin sağlanması yeterlidir.

3.2.2.1. Taban Kümesine Ait Kesirli Diklik Koşulu

Kesirli ikili-diklik koşulunu yukardaki (3.60) ifadesinden bulabilmek için

$$\sum_m h(t - mT) \gamma^*(t' - mT) \exp \left\{ j \left[\frac{1}{2} (t'^2 - t^2) \cot \alpha \right] \right\} \sum_k \exp \{ jk\Omega(t' - t) \} = \delta(t - t') \quad (3.61)$$

Yukarıdaki k toplamına Poisson toplam kuralı uygulanarak,

$$\sum_k \exp\{jk\Omega(t' - t)\} = \sum_k T_0 \delta(t - t' - kT_0) \quad (3.62)$$

Bu eşitlik (3.61)'de yerine koyarsak

$$\sum_m h(t - mT) \gamma^*(t' - mT) \exp\left\{j \left[\frac{1}{2} (t'^2 - t^2) \cot \alpha \right]\right\} \sum_k T_0 \delta(t - t' - kT_0) = \delta(t - t') \quad (3.63)$$

olur. Burada $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$ dir. $t' = t - kT_0$ değişken dönüşümü yaparak denklemi düzenleyecek olursak,

$$\sum_k T_0 \delta(t - t' - kT_0) \left[\sum_m h(t - mT) \gamma^*(t' - kT_0 - mT) \right] \exp\left\{j \frac{1}{2} ((t - kT_0)^2 - t^2) \cot \alpha\right\} = \delta(t - t') \quad (3.64)$$

m toplamına Poisson toplamı aşağıdaki şekilde uygulanırsa

$$\sum_m h(t - mT) \gamma^*(t' - kT_0 - mT) = \frac{\Omega_0}{2\pi} \sum_m e^{jm\Omega_0 t} \int_{t'} h(t') \gamma^*(t' - mT_0) e^{-jk\Omega_0 t'} dt' \quad (3.65)$$

olur. Burada $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ olarak tanımlanmıştır. Yukardaki ifade (3.64)'de yerine konursa;

$$\sum_k T_0 \delta(t - t' - kT_0) \left[\int_{t'} h(t') \gamma^*(t' - mT_0) e^{-jk\Omega_0 t'} dt' \right] e^{j \frac{1}{2} ((t - kT_0)^2 - t^2) \cot \alpha} \cdot \frac{\Omega_0}{2\pi} \sum_m e^{jm\Omega_0 t} = \delta(t - t') \quad (3.66)$$

Burada

$$\gamma_{m,k}^{*(0)}(t) \square \gamma^*(t' - mT_0) e^{-jk\Omega_0 t'} \quad (3.67)$$

olarak tanımlanabilir. Yukarıdaki denklemin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul;

$$\frac{\Omega_0 T_0}{2\pi} \int h(t) \gamma_{m,k}^{*(0)}(t) e^{j\frac{1}{2}((t-kT_0)^2 - t^2) \cot \alpha} dt = \delta_m \delta_k \quad (3.68)$$

olarak bulunur. Burada δ_j Kronecker Delta olup,

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & j \neq 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.68)'de elde edilen ikili diklik koşulu [44]'de verilen sinüsoidal Gabor açılımı koşulunun genelleştirilmiş halidir ve $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için klasik Gabor açılımının diklik koşuluna indirgenir.

Taban kümesine ait kesirli diklik koşulu farklı bir şekilde de elde edilebilir. (3.59) denklemindeki ifadeyi kullanacak olursak

$$\sum_m \sum_k h(t-mT) \gamma^*(t'-mT) e^{j\left[\frac{1}{2}(t'^2 - t^2) \cot \alpha + jk\Omega(t'-t)\right]} = \delta(t-t') \quad (3.70)$$

buradan ikili diklik koşulunu bulabilmek için,

$$\sum_m h(t-mT) \gamma^*(t'-mT) e^{j\left[\frac{1}{2}(t'^2 - t^2) \cot \alpha\right]} \sum_k e^{jk\Omega(t'-t)} = \delta(t-t') \quad (3.71)$$

k toplamına Poisson formülü uygulanırsa,

$$\sum_k e^{jk\Omega(t'-t)} = \frac{2\pi}{\Omega} \sum_k \delta\left(t-t' - k \frac{2\pi}{\Omega}\right) \quad (3.72)$$

bu ifade (3.71)'de yerine konursa.

$$\frac{2\pi}{\Omega} \sum_m h(t-mT) \gamma^*(t' - \left[m + k \frac{2\pi}{\Omega T}\right] T) e^{j\frac{1}{2}[(t-k\frac{2\pi}{\Omega})^2 - t^2] \cot \alpha} \sum_k \delta(t-t' - k \frac{2\pi}{\Omega}) = \delta(t-t') \quad (3.73)$$

elde edilir. Bu denklemin sağlanabilmesi için $\{h_{m,k,\alpha}(t)\}$ sentez taban kümesi ile $\{\gamma_{m,k,\alpha}(t)\}$ analiz taban kümesi arasındaki diklik koşulu

$$\frac{2\pi}{\Omega} \exp \left\{ i \frac{2k\pi}{\Omega} \left[\frac{k\pi}{\Omega} - t \right] \cot \alpha \right\} \sum_m h(t - mT) \gamma^* \left(t - \left[m + k \frac{2\pi}{\Omega T} \right] T \right) = \delta_k \quad (3.74)$$

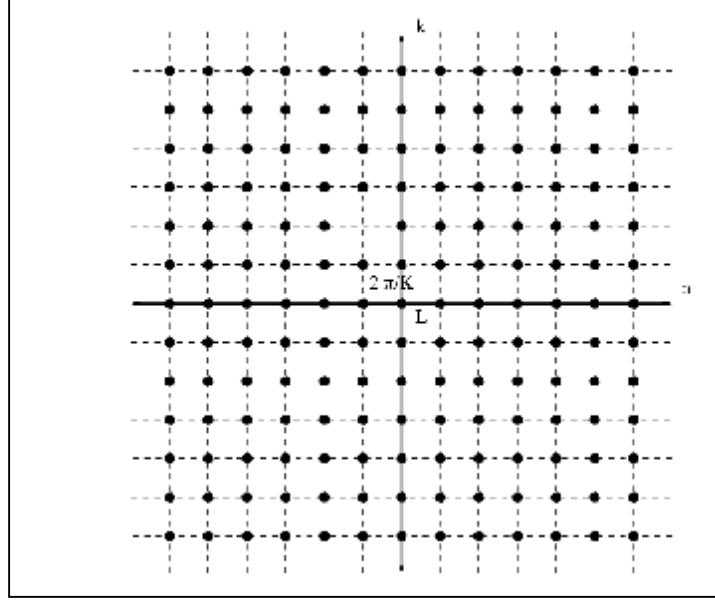
$m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olarak elde edilir. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için (3.74) koşulu, klasik Gabor açılımının diklik koşuluna dönüşmektedir [39]. Bu da yukarıda tanımlanan kesirli Gabor açılımının, [90] da verilen klasik Gabor açılımının, dikdörtgen olmayan zaman frekans bölütlemesi kullanan genelleştirilmiş hali olduğunu gösterir.

$\{a_{m,k,\alpha}\}$ kesirli Gabor katsayılarını bulmak için gerekli olan $\gamma(t)$ analiz penceresi, (3.74) lineer denklem sisteminin çözümünden elde edilir. $\{a_{m,k,\alpha}\}$ katsayıları (3.55)'deki $\{\gamma_{m,k,\alpha}(t)\}$ analiz işlevi yardımıyla bulunur.

3.3.1. Ayırık Kesirli Gabor Açılımı

Sinüsoidal taban fonksiyonları kullanan klasik ayırık Gabor açılımı ve Bölüm 2.5.1'de anlatılan Çok Pencere Gabor Açılımı, durağan olmayan çeşitli işaretlerin zaman frekans analizine başarıyla uygulanmıştır. Taban işlevleri $h_{m,k}(n)$ sabit bir $h(n)$ pencere işlevinin zamanda eşit aralıklarla ötelenmesi ve düzgün aralıklarla sinüsoidal modüle edilmesiyle elde edilir. Bunun sonucunda Şekil-3.6'da görülen ayırık ZF düzleminde düzgün ve dikdörtgen bir örnekleme kafesi kullanılmış olur. Ancak çözümlenmek istenen sinyal, böyle sabit genişliğini ile modellenemiyor ise (sinüsoidal bileşenlerin toplamından oluşmuyor ise) bu sinyalin Gabor gösterimi yine yetersiz bir ZF yerelleşmesi sergileyecektir. Çünkü, sinyalin gösteriminde gereğinden fazla Gabor katsayısı kullanılacaktır. Pratikte karşılaşılan birçok sinyal (ses, müzik, biyolojik, sismik, makina titreşimleri vs.) zamanla değişen frekans özellikleri gösterir ve bu sinyaller sinüsoidal Gabor analizi için uygun değildir. Durağan olmayan sinyallerin Gabor analizinde ZS yerelleşmesini arttırmak amacıyla taban işlevleri çarp ile modüle edilmekte, veya sinyalin zamanla değişen frekans karakteristiğine uyumlu yapılmaktadır [43,84,85,86]. Bu yöntemlerin bir çoğunda sinyali en iyi temsil eden taban işlevlerini

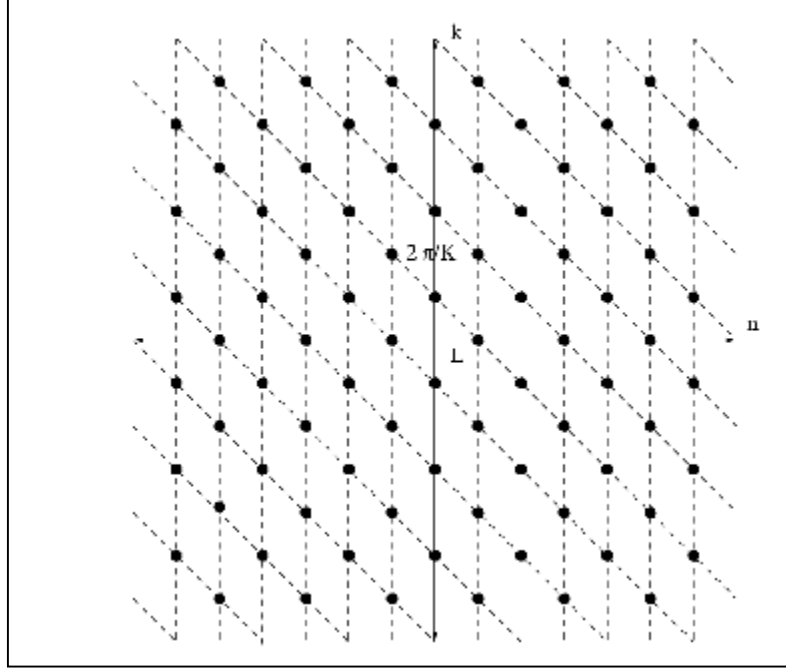
bulabilmek için çok sayıda deneme yapılarak bunlar arasından seçim yapılmaktadır. Dolayısı ile çok uzun ve zaman alıcı hesaplamalar gerekmektedir.



Şekil 3.6 Ayırık Gabor açılımında kullanılan düzgün ve dikdörtgen örnekleme kafesi

Son yıllarda kesirli Fourier dönüşümü (KFD) [75,88], kesirli Fourier serisi [87], KFD'nin sayısal olarak hesaplanması ve uygulamaları [89,90], ayırık zamanlı KFD [91] tanımı üzerinde yoğun çalışmalar yapılmaktadır. Ayrıca Gabor açılımında kesirli taban fonksiyonları kullanan yeni sinyal gösterimleri de tanımlanmıştır [92].

Bu bölümde ise, ayırık zamanlı sinyallerin zamanla değişen frekans bileşenlerinin yüksek çözünürlük ile temsil edilebilmesi için dikdörtgen olmayan bir örnekleme kafesi üzerinde, kesirli bir Gabor açılımı verilmektedir. Bu yeni açılımın taban fonksiyonları kesirli Fourier serisi ve örnekleme kullanılarak elde edilecektir. Bu taban işlevleri ile ZF düzlemi Şekil 3.7'de verildiği gibi paralelkenarlar biçiminde bölütlenmekte ve bunların köşe noktaları örnekleme kafesini oluşturmaktadır.



Şekil 3.7 Ayrık kesirli Gabor açılımı ile oluşturulan örnekleme kafesi

Sonlu uzunlukta veya periyodik bir $x(n)$ sinyalin göz önüne alalım, $x(n)=x(n+rN)$, r tamsayı. Bu sinyalin kesirli Gabor açılımı

$$x(n) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{m,k,\alpha} \tilde{h}_{m,k,\alpha}(n) \quad (3.75)$$

elde edilir burada $h_{m,k,\alpha}(t)$ taban işlevleri,

$$\tilde{h}_{m,k,\alpha}(n) = \tilde{h}(n - mL)W_{\alpha,k}(n) \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad (3.76)$$

ve $\tilde{h}(n)$ sentez penceresi, $h(n)$ 'in periyodikleşmiş halidir; $\tilde{h} = h(n + rN)$, r tamsayı $W_{\alpha,k}(n)$ kesirli çekirdeği ise;

$$W_{\alpha,k}(n) = e^{j[-\frac{1}{2}(n^2 + (k\frac{2\pi}{K}\sin\alpha)^2)\cot\alpha + k\frac{2\pi}{K}]} \quad (3.77)$$

Buradaki N, M ve L pozitif tamsayıları $N=ML$ eşitliğini sağlar. Kesirli Gabor katsayıları daha öncekilere benzer şekilde iç çarpım ile elde edilir.

$$a_{m,k,\alpha} = \langle x(n), \tilde{\gamma}_{m,k,\alpha}(n) \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \tilde{\gamma}_{m,k,\alpha}^*(n) \quad (3.78)$$

ve $\tilde{\gamma}(n)$ periyodik analiz penceresi

$$\tilde{\gamma}_{m,k,\alpha}(n) = \tilde{\gamma}(n - mL) W_{\alpha,k}(n).$$

$\tilde{\gamma}(n)$ penceresi aşağıdaki bölümde anlatılan ikili-diklik ve tamlık koşullarından elde edilecektir.

Şimdi yukarıdaki ayrık kesirli Gabor açılımını örnekleme ile elde edelim:

Yukarıdaki $x(n)$ işaretini elde etmek için periyodik bir $x(t)$ sürekli zamanlı sinyalin örneklenmesini ele alalım: $d > 0$ örnekleme adımı, Nd ise $x(t)$ sinyalinin periyodu (N pozitif tamsayı) olmak üzere, örneklenmiş sinyal

$$x(t) = d \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \delta(t - (n + Nl)d) \quad (3.79)$$

ve burada $x(n) = x(nd)$. Ayrıca $x(t)$, $h(t)$ ve $\gamma(t)$ için gerekli süreklilik ve toplanabilirlik koşullarının sağlandığını kabul ederek, kesirli Gabor katsayıları

$$a_{m,k,\alpha} = d \sum_l \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \tilde{\gamma}_{m,k,\alpha}^*(n + Nl) \quad (3.80)$$

ve

$$\tilde{\gamma}_{m,k,\alpha}(n) = \tilde{\gamma}_{m,k,\alpha}(nd) \quad (3.81)$$

T , d ve Ω parametreleri $\Omega = \frac{2\pi}{Kd}$, $T = \frac{Nd}{M}$ olarak tanımlanabilir ki burada M , K , L ve L pozitif tamsayıları $N = ML = KL$ koşulunu sağlar. Ayrıca analiz penceresi $\tilde{\gamma}_{m,k,\alpha} = \tilde{\gamma}(n - m\bar{K}) W_{\alpha,k}(n)$. Dolayısı ile $\{a_{m,k,\alpha}\}$ dizisi:

$$a_{m,k,\alpha} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nd) \tilde{\gamma}^*(nd - mL) \exp \left\{ j \left[\frac{1}{2} ((nd)^2 + (k \frac{2\pi}{Kd} \sin \alpha)^2) \cot \alpha - k \frac{2\pi}{Kd} \right] \right\} \quad (3.82)$$

$x(t)$ işaretinin kesirli Gabor gösterimdeki (m,k) 'yi (m',k') ile değiştirerek ve

$$\begin{aligned} m' &= m + lM; & 0 \leq m \leq M-1; & & -\infty < l < \infty \\ k' &= n + NK; & 0 \leq k \leq K-1; & & -\infty < N < \infty \end{aligned}$$

kullanarak ve aşağıdaki Poisson toplamı yardımıyla

$$\sum_N e^{j \frac{2\pi nt}{t}} = d \sum_N \delta(t - nd) \quad (3.83)$$

kesirli Gabor açılımı şu şekilde yazılabilir:

$$x(t) = d \sum_{m'} \sum_{k'} a_{m,k,\alpha} \tilde{h}(n - mL) \exp \left\{ j \left\{ -\frac{1}{2} ((nd)^2 + (k \frac{2\pi}{Kd} \sin \alpha)^2) \cot \alpha + k \frac{2\pi}{Kd} \right\} \right\} \quad (3.84)$$

ve buradan $x(n)$ 'in ayrık kesirli Gabor açılımı elde edilir.

$$x(n) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{m,k,\alpha} \tilde{h}_{m,k,\alpha}(n - mL) \exp \left\{ -j \left\{ \frac{1}{2} (n^2 + (k \frac{2\pi}{K} \sin \alpha)^2) \cot \alpha + k \frac{2\pi}{K} \right\} \right\}$$

Burada $\tilde{h}_{m,k,\alpha}(n - mL) = \tilde{h}(n - mL) W_{\alpha,k}(n)$ sentez penceresidir.

Kesirli çekirdek fonksiyonunda:

$$\begin{aligned} W_{\alpha,k}(n) &= \exp \left\{ j \left[-\frac{1}{2} (n^2 + (k \frac{2\pi}{K} \sin \alpha)^2) \cot \alpha + k \frac{2\pi}{K} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ j \left[-\frac{1}{2} (n^2 \cot \alpha + \omega_k^2 \sin \alpha \cos \alpha) + \omega_k \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ j \left[-\frac{1}{2} (n^2 \cot \alpha + \frac{1}{2} \omega_k^2 \sin 2\alpha) + k \omega_k \right] \right\} \end{aligned}$$

ve $\omega_k = k \frac{2\pi}{K}$ dir.

3.3.1.1. Ayırık Kesirli Gabor Açılımının Tamlığı

$\{\tilde{h}_{m,k,\alpha}(n)\}$ taban işlevinin kümesinin tam olduğunu göstermek için (3.78) eşitliği (3.75) ifadesinde yerine konur;

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^{L-1} x(l) \tilde{\gamma}^*(l-mL) W_{\alpha,k}^*(n) \right) \tilde{h}(n-mL) W_{\alpha,k}(n) \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l) \tilde{\gamma}^*(l-mL) \\
 &\quad \cdot e^{-j\left[-\frac{1}{2}(l^2 + (k\frac{2\pi}{K}\sin\alpha)^2)\cot\alpha + k\frac{2\pi}{K}l\right]} \tilde{h}(n-mL) e^{j\left[-\frac{1}{2}(n^2 + (k\frac{2\pi}{K}\sin\alpha)^2)\cot\alpha + k\frac{2\pi}{K}n\right]} \\
 &= \sum_{l=0}^{L-1} x(l) \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \tilde{h}(n-mL) \tilde{\gamma}^*(l-mL) e^{j\left[-\frac{1}{2}(n^2 - l^2)\cot\alpha + k\frac{2\pi}{K}(n-l)\right]}
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

bu denklemden tamlık koşulunun sağlanabilmesi için gerekli koşul

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \tilde{h}(n-mL) \tilde{\gamma}^*(l-mL) e^{j\left[-\frac{1}{2}(n^2 - l^2)\cot\alpha\right]} e^{k\frac{2\pi}{K}(n-l)} = \delta(n-l) \tag{3.86}$$

olarak elde edilir. Burada $\delta(n-l)$ Delta fonksiyonu olup

$$\delta(n-l) = \begin{cases} 1 & n=l \\ 0 & n \neq l \end{cases} \tag{3.87}$$

3.3.1.2. Ayırık Kesirli Gabor Açılımının ikili-dikliği

Ayrık kesirli Gabor açılımının analiz penceresinin hesaplanmasında kullanılacak olan, ikili diklik koşulunu elde etmek için, (3.86)'daki tamlık eşitliği düzenlenecek olursa,

$$\sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}(n-mL) \tilde{\gamma}^*(l-mL) e^{j\left[-\frac{1}{2}(n^2 - l^2)\cot\alpha\right]} \sum_{k=0}^{K-1} e^{k\frac{2\pi}{K}(n-l)} = \delta(n-l) \tag{3.88}$$

Bu eşitlikteki k toplamına, ayırık Poisson toplam formülü uygulanarak,

$$\sum_{k=0}^{K-1} e^{jk \frac{2\pi}{K}(n-l)} = K \sum_{q=0} \delta(n-l-qK) \quad (3.89)$$

elde edilir. Bu yerine konacak olursa

$$\sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}(n-mL) \tilde{\gamma}^*(l-mL) e^{j[-\frac{1}{2}(n^2-l^2) \cot \alpha]} K \sum_{q=0} \delta(n-l-qK) = \delta(n-l) \quad (3.90)$$

elde edilir. $l = n-qK$ değişken dönüşümü yapılarak

$$\sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}(n-mL) \tilde{\gamma}^*(n-qK-mL) e^{j[-\frac{1}{2}(n^2-(n-qK)^2) \cot \alpha]} K \sum_{q=0} \delta(n-l-qK) = \delta(n-l) \quad (3.91)$$

m toplamına ikinci kez Poisson toplamı şu biçimde uygulanabilir:

$$\sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}(n-mL) \tilde{\gamma}^*(n-qK-mL) = \frac{1}{L} \sum_{p=0}^{L-1} e^{jp \frac{2\pi}{L} q} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{h}(n) \tilde{\gamma}^*(l-qK) e^{-jp \frac{2\pi}{L} l} \quad (3.92)$$

bu son durumda eşitlik şu hale gelecektir;

$$\frac{1}{L} \sum_{p=0}^{L-1} e^{jp \frac{2\pi}{L} q} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{h}(n) \tilde{\gamma}^*(l-qK) e^{-jp \frac{2\pi}{L} l} e^{j[-\frac{1}{2}(n^2-(n-qK)^2) \cot \alpha]} K \sum_{q=0} \delta(n-l-qK) = \delta(n-l) \quad (3.93)$$

buradan ikili-diklik koşulu

$$\frac{K}{L} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{h}(n) \tilde{\gamma}^*(n-mK) e^{-jk \frac{2\pi}{L} n} e^{j[-\frac{1}{2}(n^2-(n-mK)^2) \cot \alpha]} = \delta_m \delta_k \quad (3.94)$$

olarak bulunur. Burada $n=n + mK$ değişken dönüşümü yapılarak

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{h}(n+mK) e^{-jk \frac{2\pi}{L} (n+mK)} \tilde{\gamma}^*(n) e^{j[-\frac{1}{2}((n+mK)^2-n^2) \cot \alpha]} = \frac{L}{K} \delta_m \delta_k, \quad (3.95)$$

Kritik örnekleme durumunda $L=K$ olduğu dikkate alınarak ve eşitlikte, her iki tarafın karmaşık eşleniğı alınarak,

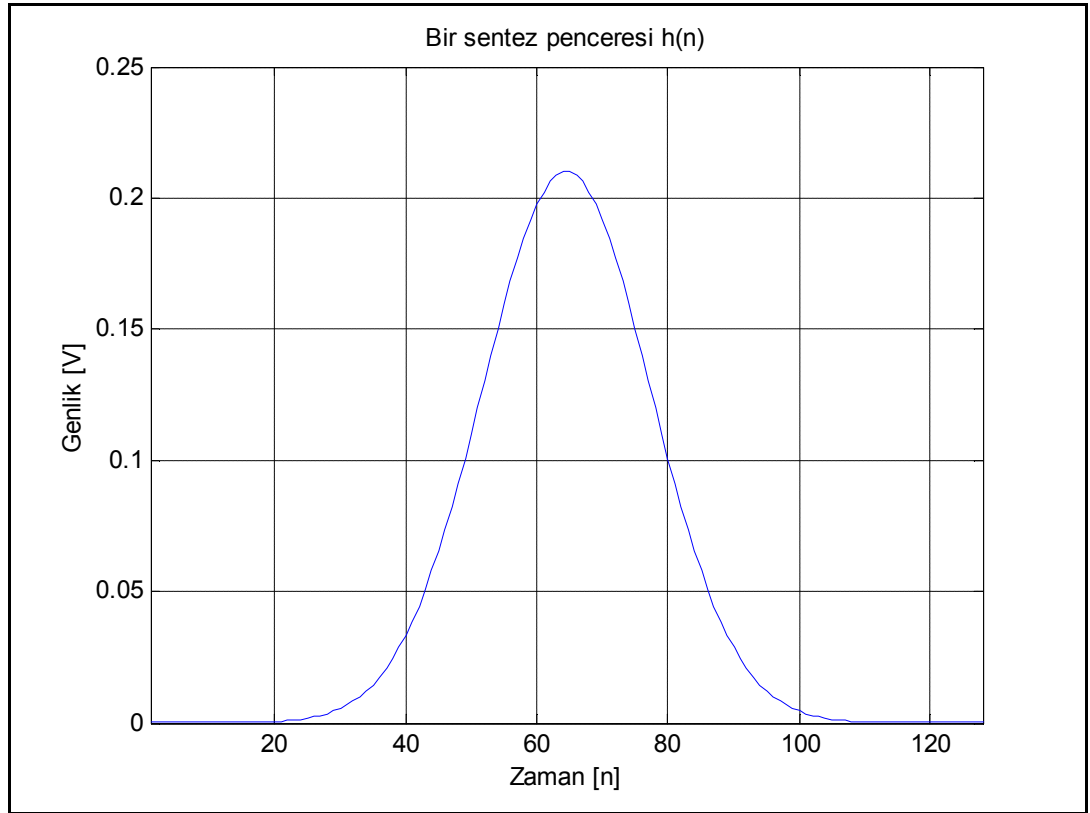
$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{h}^*(n+mK) e^{jk \frac{2\pi}{L} n} \tilde{\gamma}(n) e^{j[(nmK + \frac{m^2 K^2}{2}) \cot \alpha]} = \frac{L}{K} \delta_m \delta_k \quad (3.96)$$

$$0 \leq m \leq L' - 1, \quad 0 \leq k \leq L' - 1, \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

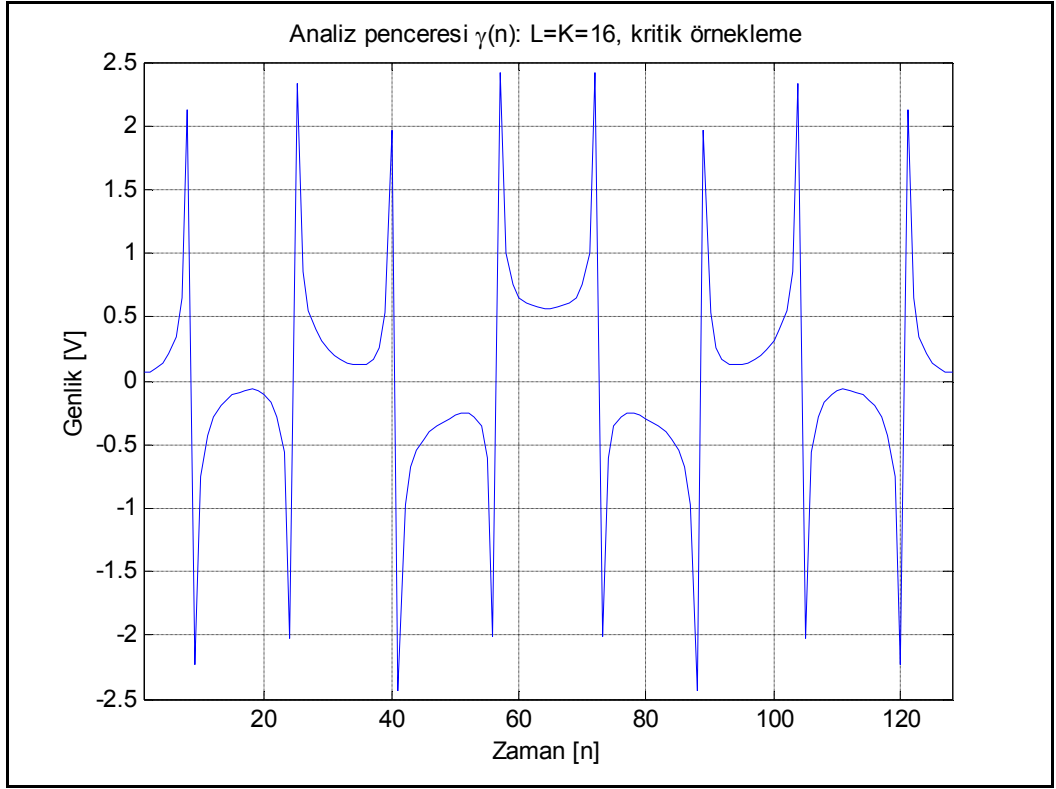
şeklinde diklik koşulunu elde etmiş oluruz. Bu koşul, $\alpha = \pi / 2$ için klasik ayrık Gabor açılımının ikili diklik koşuluna dönüşmektedir [39]. Aşağıda, ayrık kesirli Gabor açılımında kullanılan, sentez ve analiz pencereleri için farklı Gabor örnekleme parametreleri ve farklı kesir dereceleri için örnekler sunulmaktadır.

3.3.2. Ayrık Kesirli Gabor Açılımı Benzetimleri

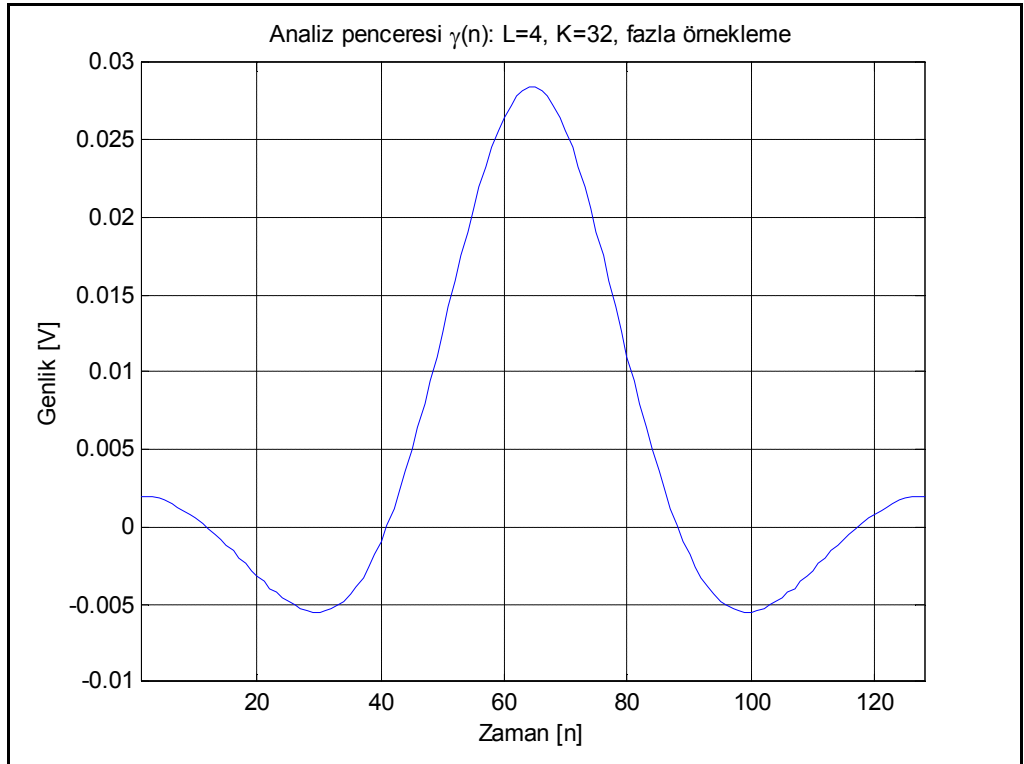
Örnek 1: Şekil 3.3.1-a bir Gauss penceresi ve $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için ikili diklik koşulunun çözümü ile hesaplanan analiz pencereleri verilmektedir Şekil 3.8,9,10,11. Bu analiz penceresi kullanılarak bir çarp işaretinin Gabor analizi yapılmış ve Gabor izgesi $\{|a_{m,k,\alpha}|^2\}$ verilmiştir. Şekil 3.12



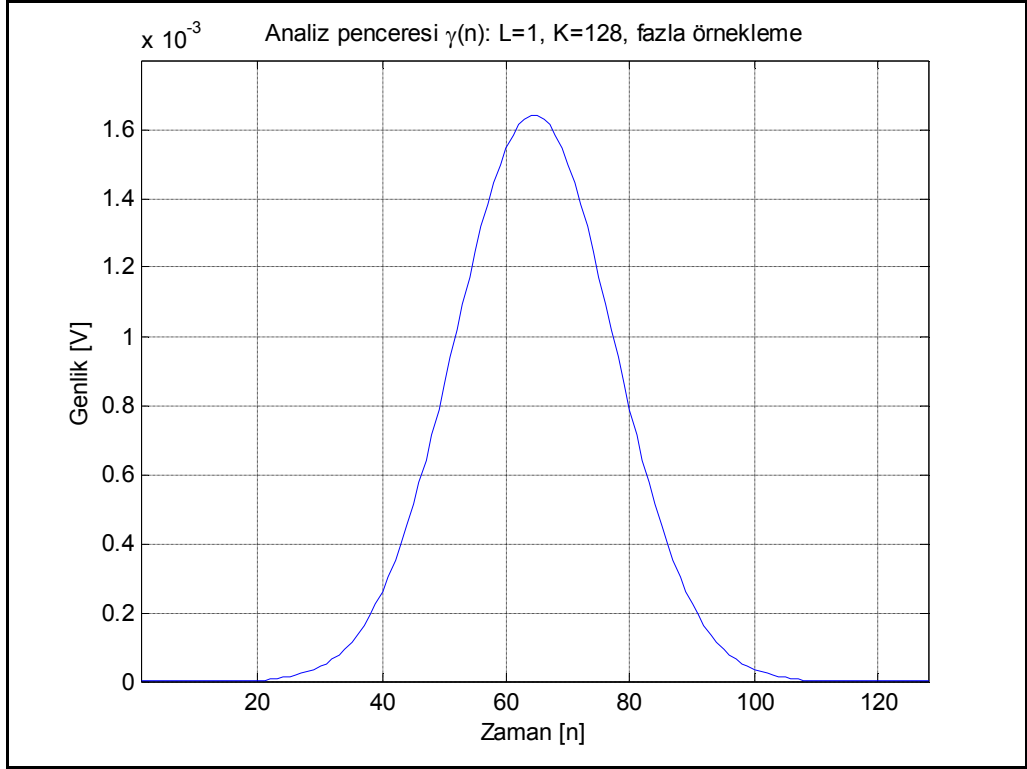
Şekil 3. 8 Bir Gauss sentez penceresi



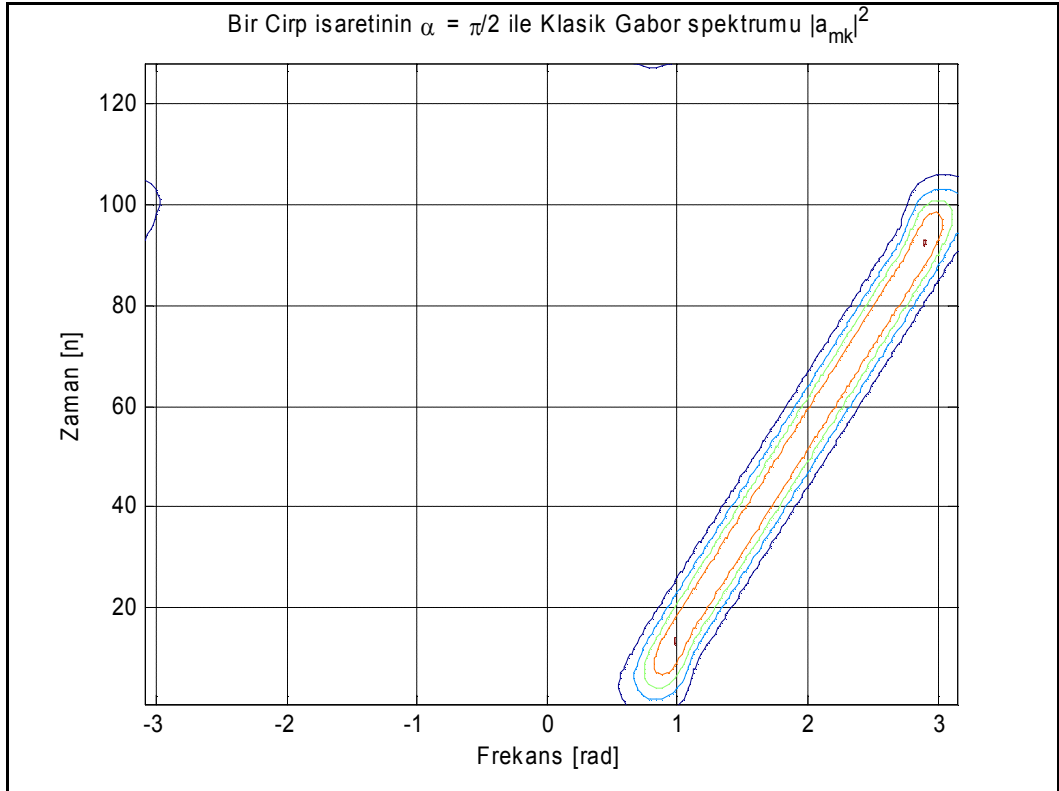
Şekil 3. 9 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için Analiz pencerelesi, $L=K=16$ kritik örnekleme durumu



Şekil 3. 10 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için Analiz pencerelesi, $L=4$, $K=32$ fazla örnekleme durumu

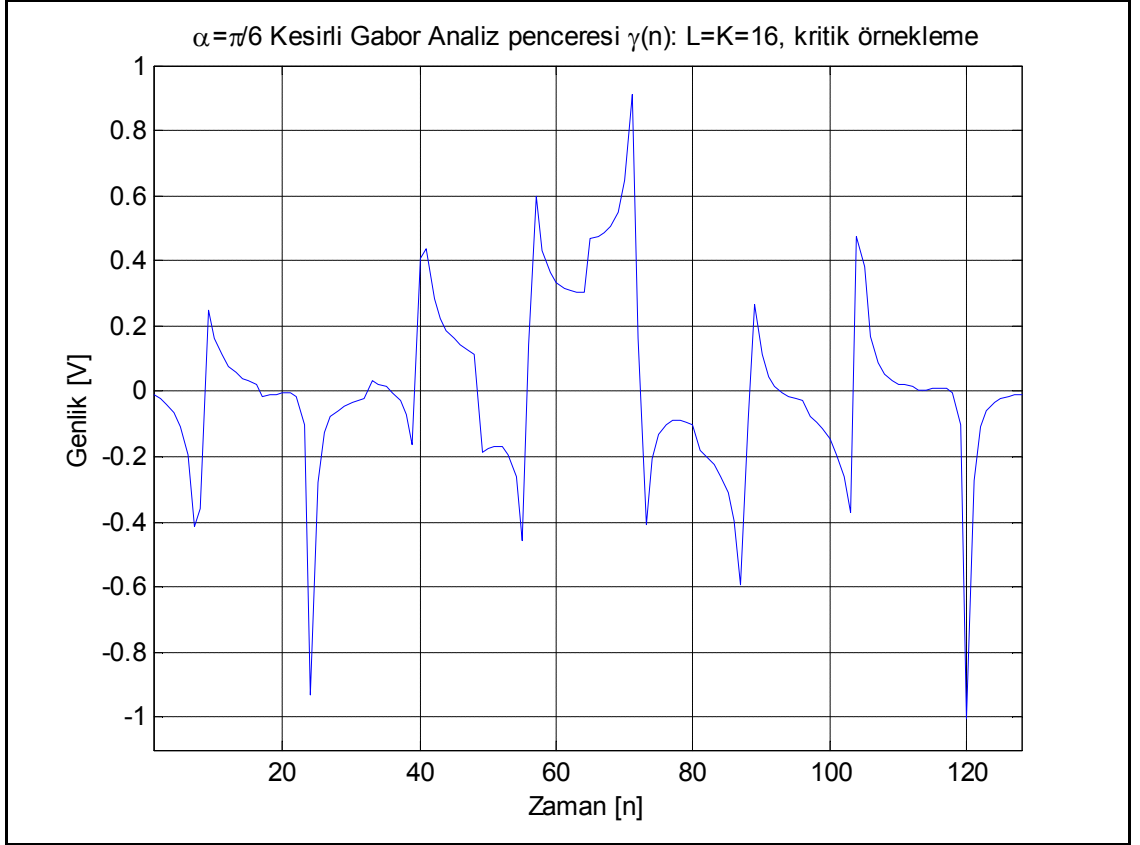


Şekil 3.11 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ için Analiz penceresi, $L=1$, $K=128$ en fazla örnekleme durumu

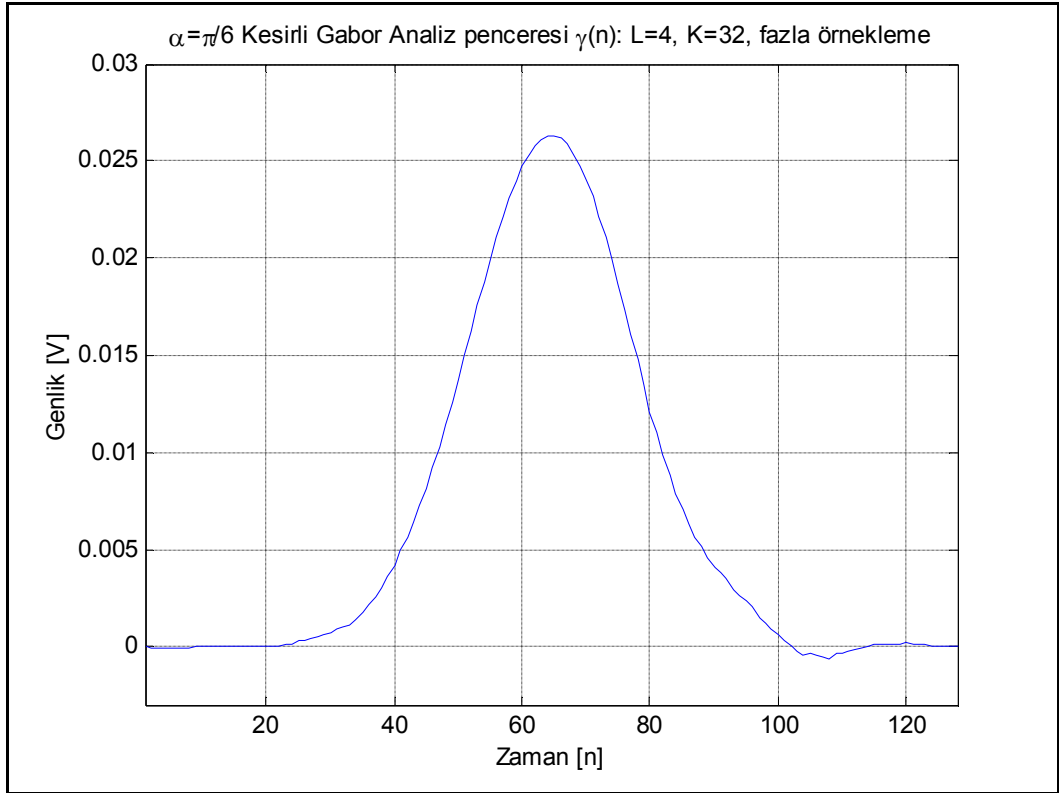


Şekil 3.12 Bir cırp işaretinin $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ile klasik Gabor izgesi

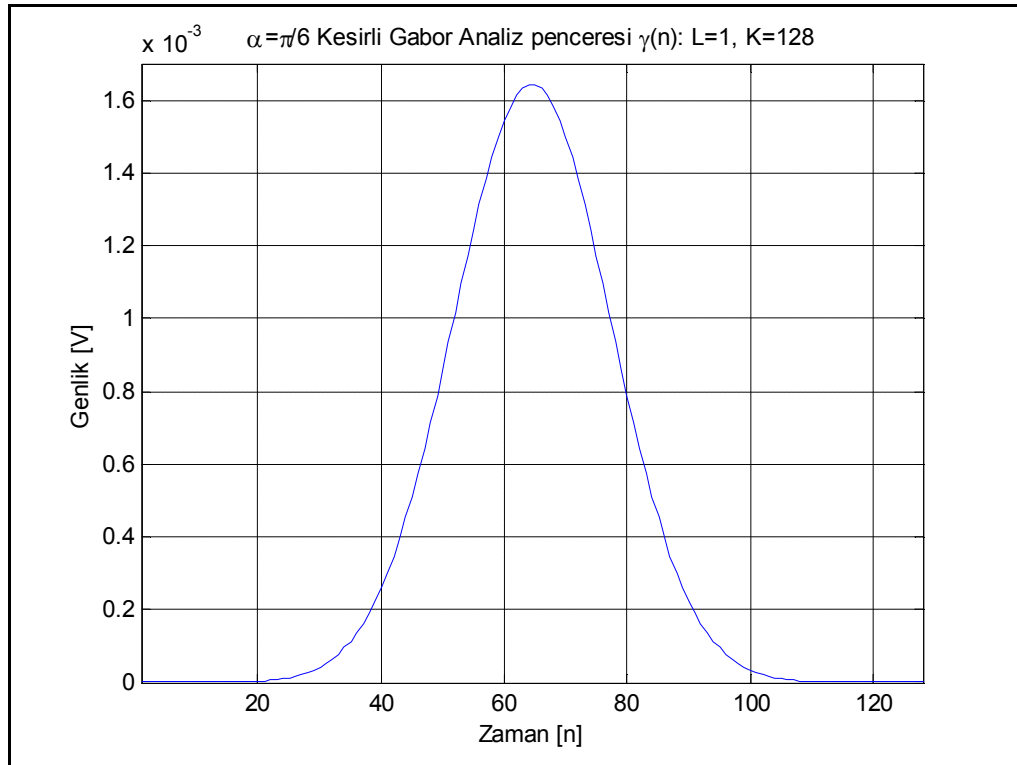
Örnek 2: Aynı sentez penceresi için $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ile Analiz pencereleri farklı Gabor öteleme parametreleri için hesaplanmış ve aşağıdaki şekillerde verilmiştir. (Şekil 3.13,14,15) Ayrıca aynı çarpı işaretini sonuncu γ penceresi ile analiz edilmiş ve kesirli Gabor izgesi $\left\{ \left| a_{v,u,\alpha} \right|^2 \right\}^2$ (Şekil 3.16) verilmiştir.



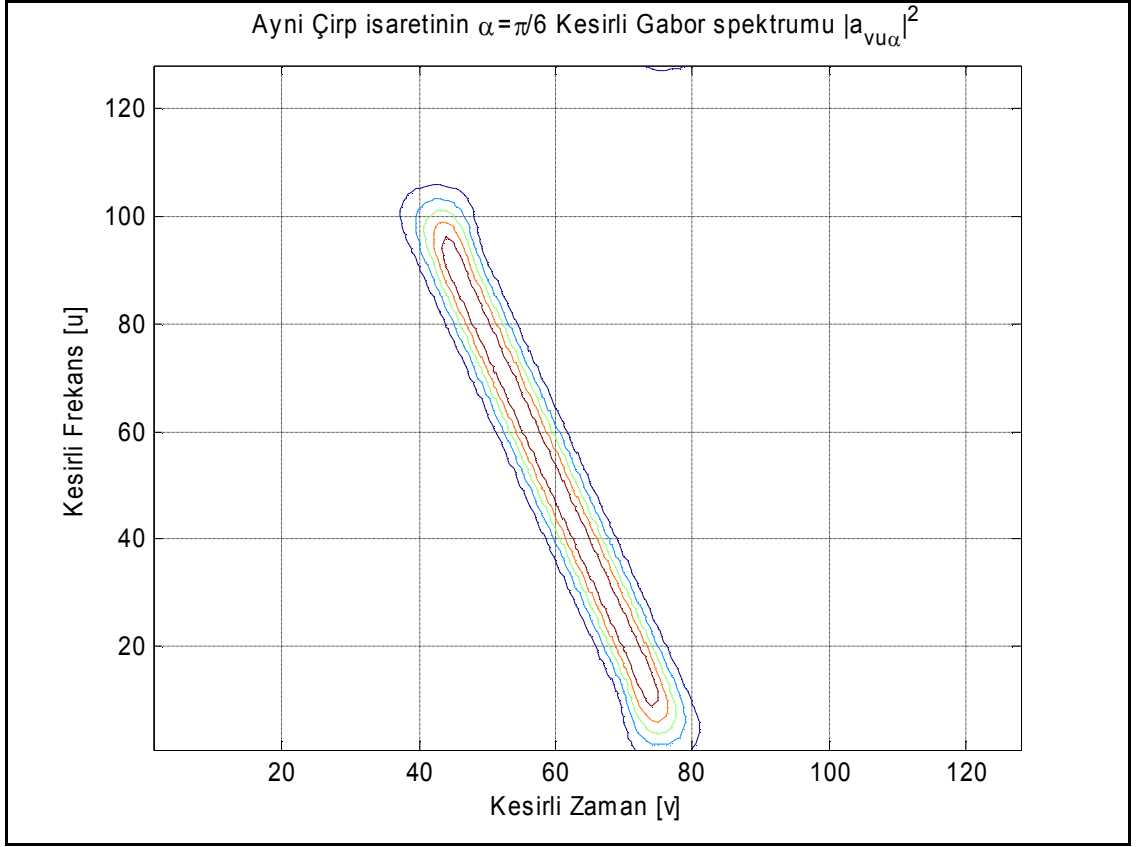
Şekil 3.13 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ile Analiz penceresi



Şekil 3.14 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ Analiz penceresi, $L=4$, $K=32$, fazla örnekleme durumu

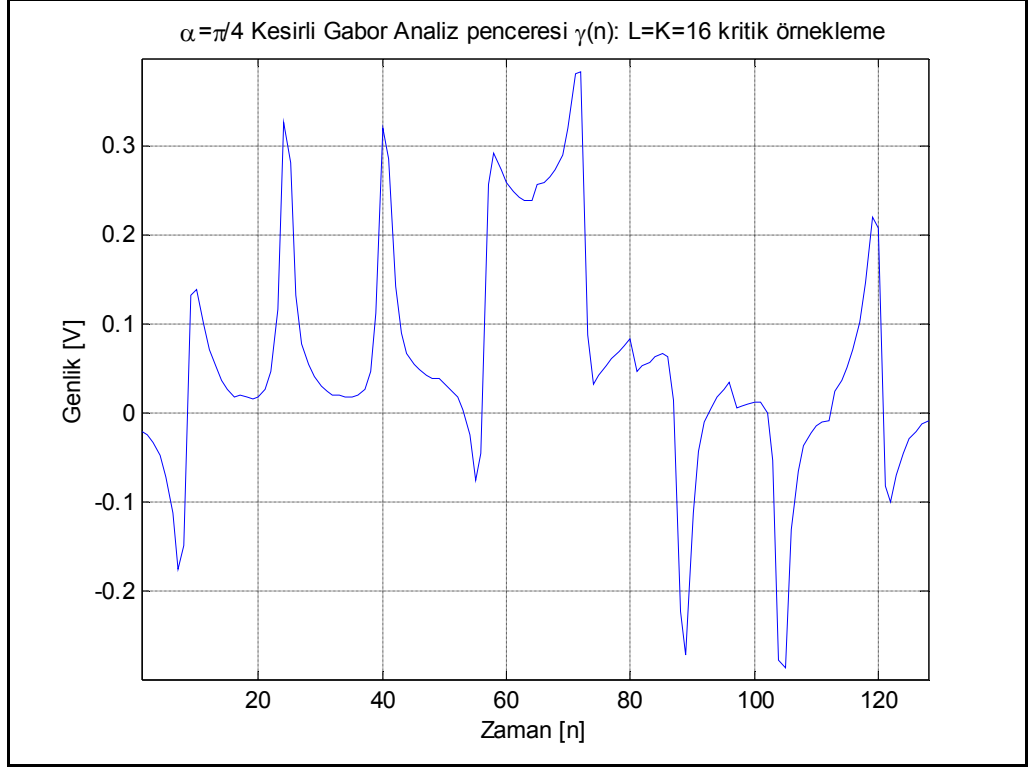


Şekil 3.15 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ Analiz penceresi, $L=1$, $K=128$ en fazla örnekleme durumu

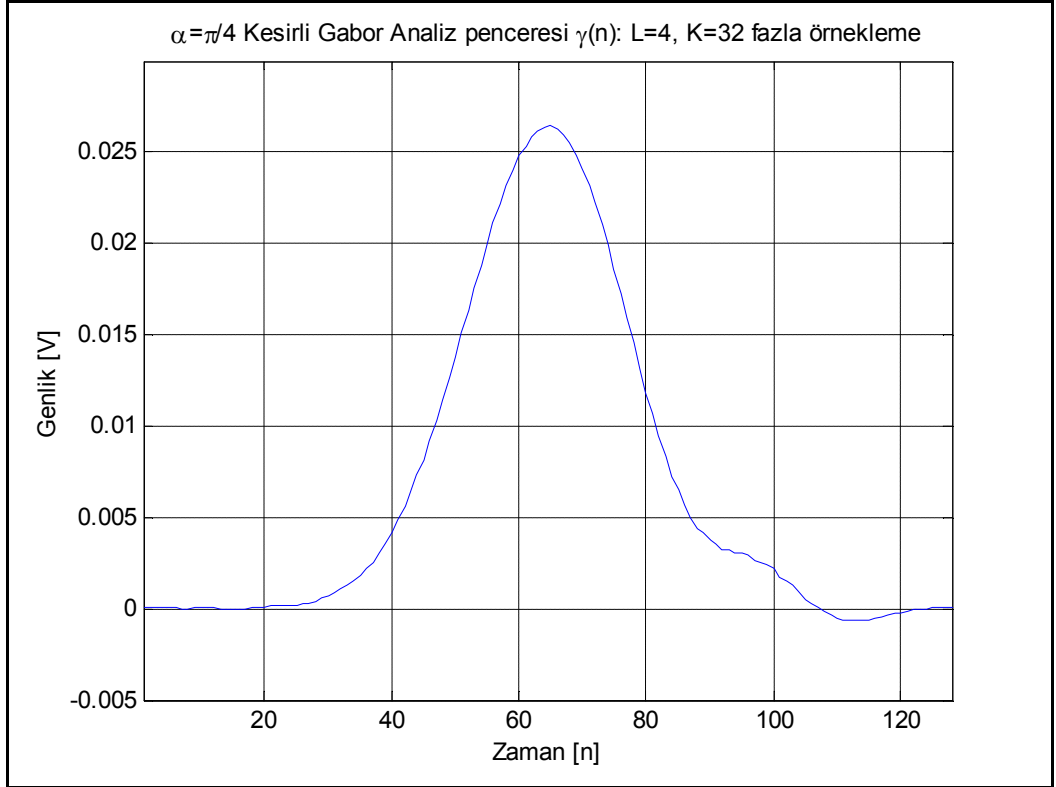


Şekil 3.16 İşaretin $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ile kesirli Gabor analizi

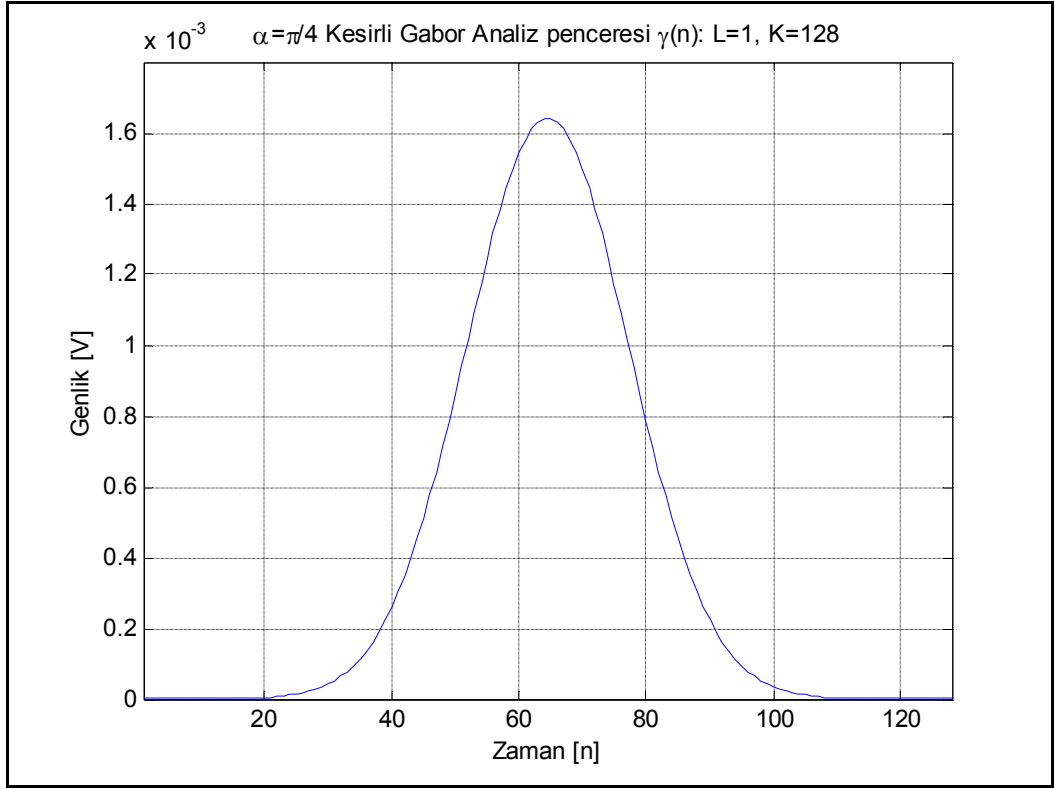
Örnek 3. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ için Analiz pencereleri farklı Gabor öteleme parametreleri için hesaplanmış ve aşağıdaki şekillerde verilmiştir. (Şekil 3.17,18,19) Ayrıca aynı çırp işareti sonuncu γ penceresi ile analiz edilmiş ve kesirli Gabor izgesi $\left\{ \left| a_{v,u,\alpha} \right|^2 \right\}$ (Şekil 3.20) verilmiştir.



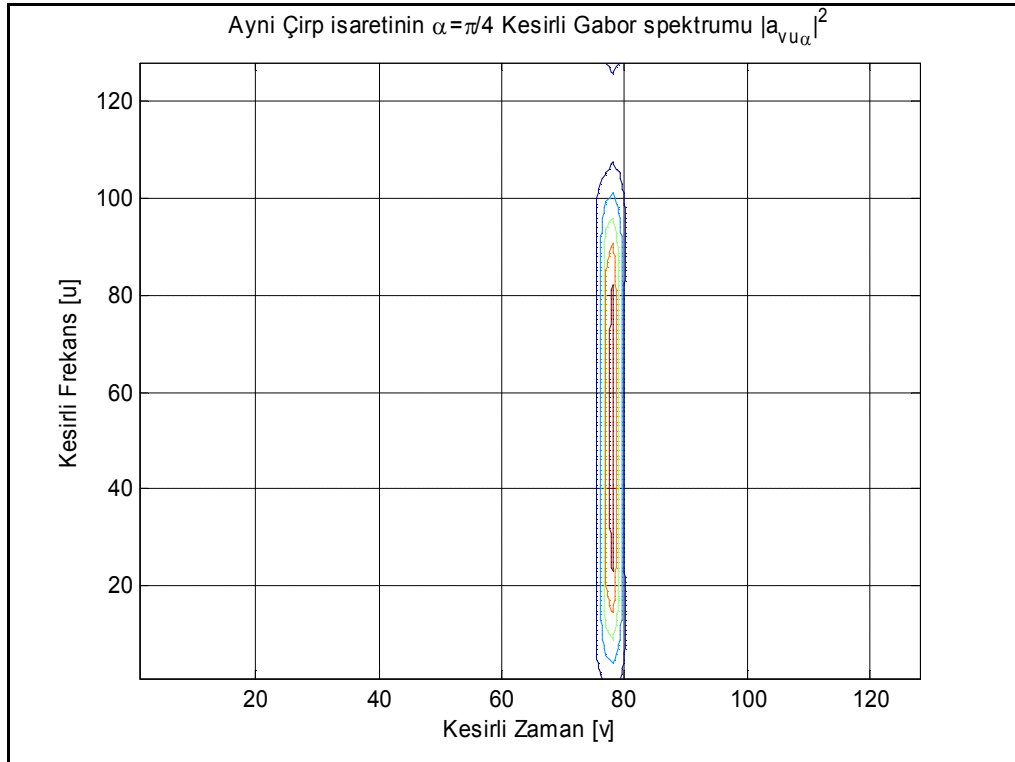
Şekil 3.17 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ için Analiz penceresi, $L=K=16$ kritik örnekleme



Şekil 3.18 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ için Analiz penceresi, $L=4, K=32$ fazla örnekleme durumu

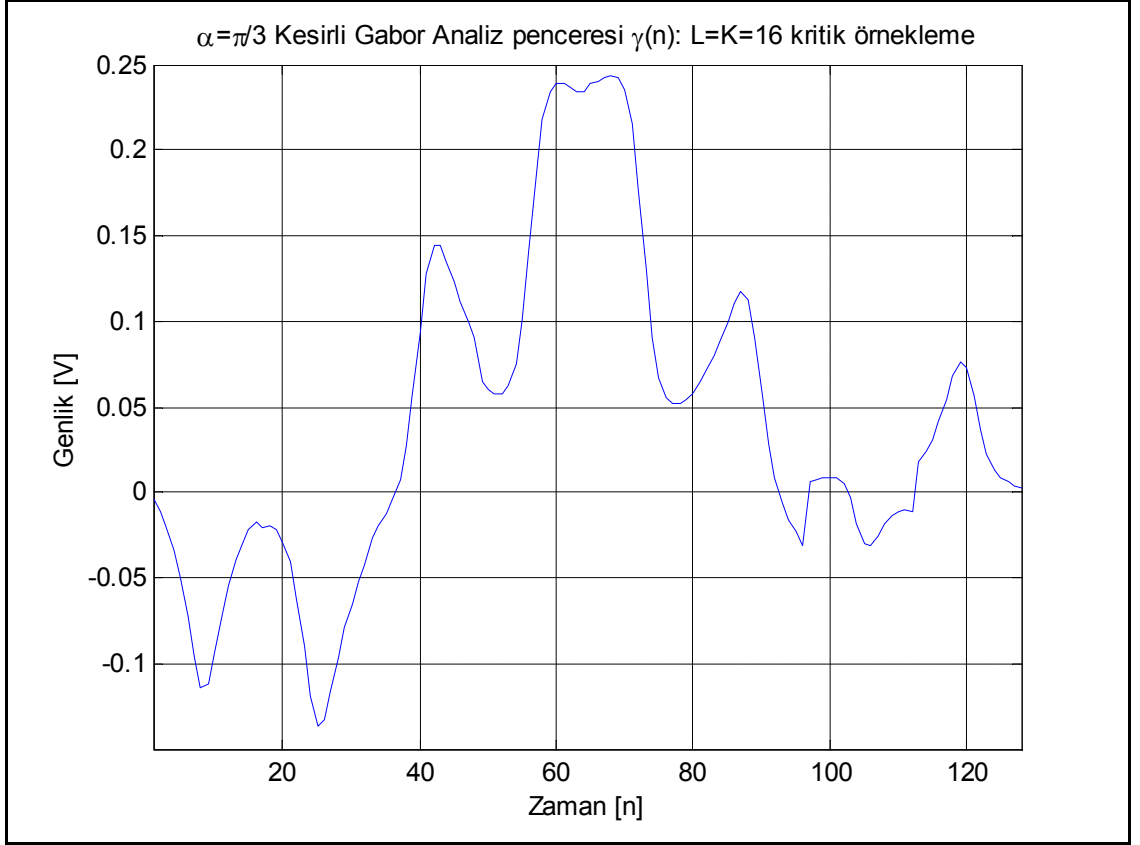


Şekil 3.19 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ için Analiz penceresi, $L=1$, $K=128$ en fazla örnekleme durumu

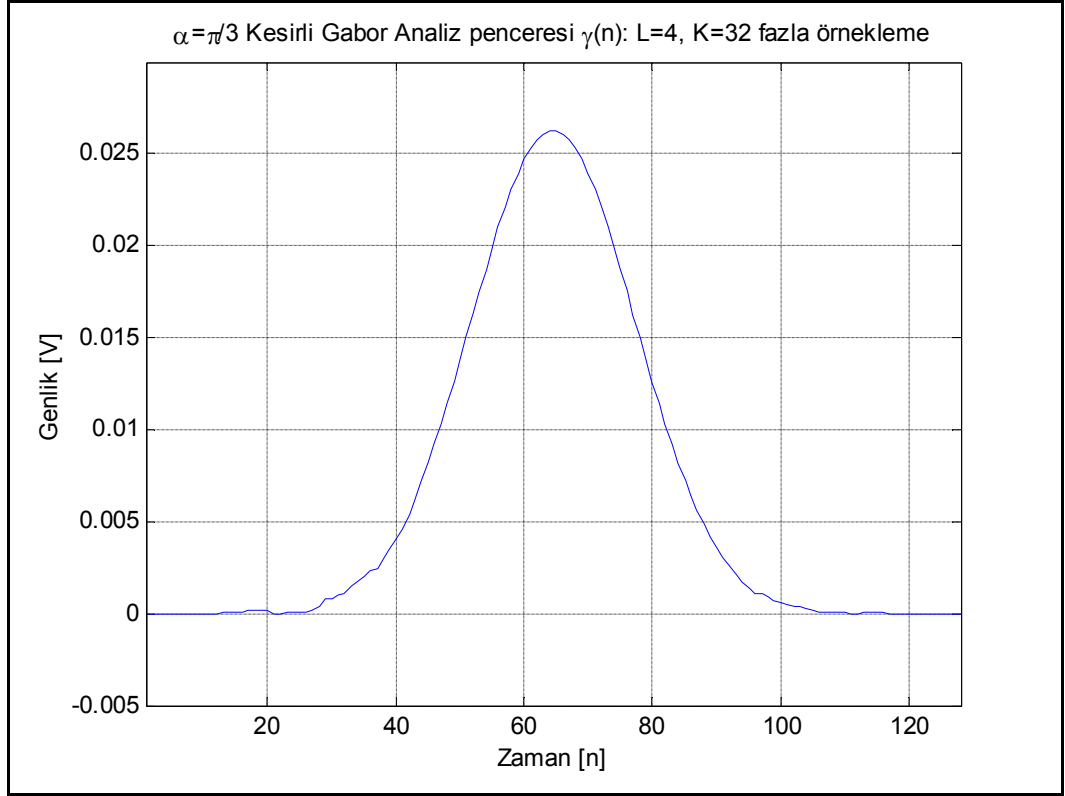


Şekil 3.20 Aynı çırp işaretin $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ile kesirli Gabor izgesi

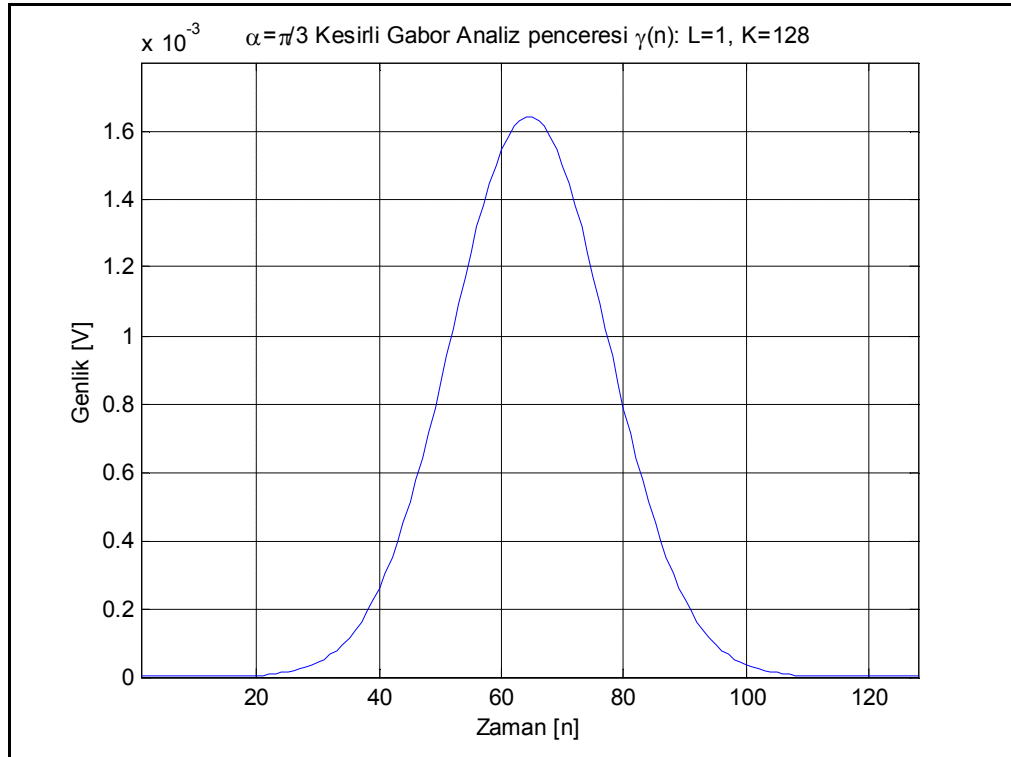
Örnek 4. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ için Analiz pencereleri farklı Gabor öteleme parametreleri için hesaplanmış ve aşağıdaki şekillerde verilmiştir. (Şekil 3.21,22,23) Ayrıca aynı çarpı işaretini sonuncu γ penceresi ile analiz edilmiş ve kesirli Gabor izgesi $\left\{ |a_{v,u,\alpha}|^2 \right\}$ (Şekil 3.24) verilmiştir.



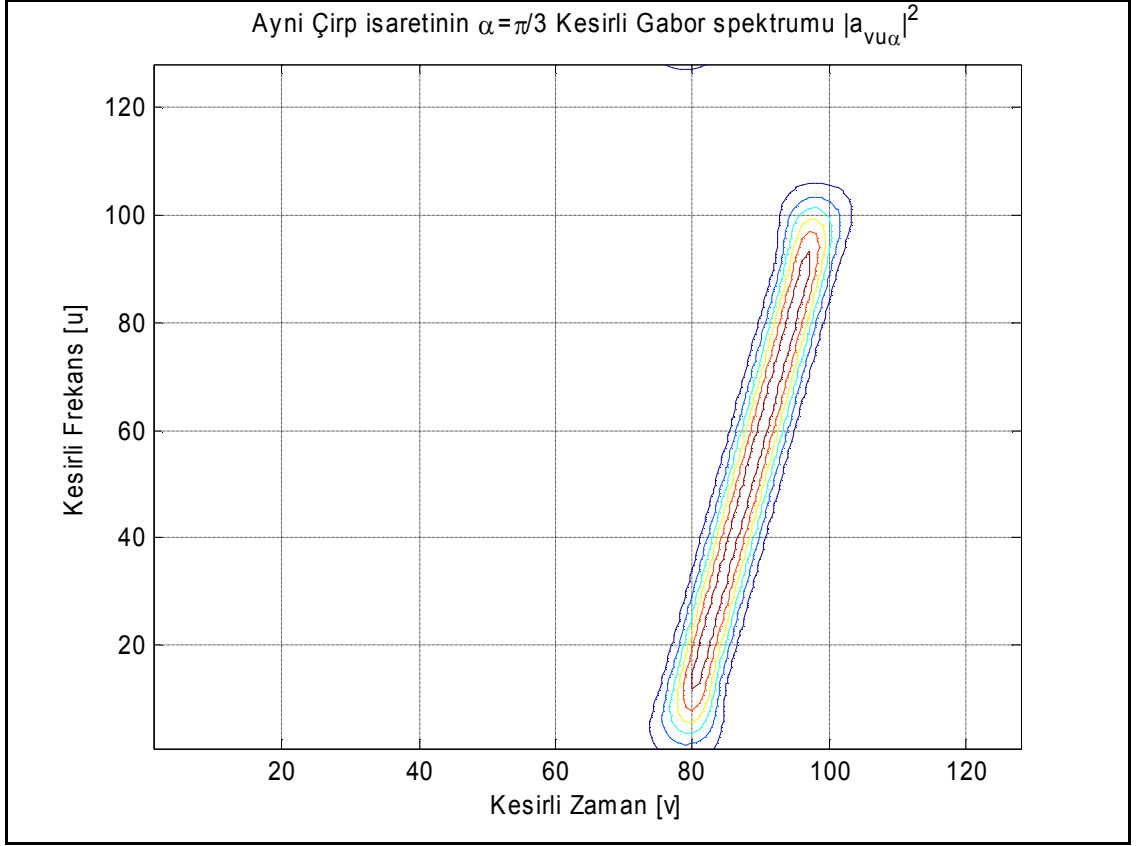
Şekil 3.21 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ için Analiz penceresi, $L=K=16$ kritik örnekleme durumu



Şekil 3.22 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ için Analiz penceresi, $L=4$, $K=32$ fazla örnekleme durumu



Şekil 3.23 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ için Analiz penceresi, $L=1$, $K=128$ en fazla örnekleme durumu



Şekil 3.24 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ için kesirli Gabor izgesi

3.3.3. Çok Pencerele Kesirli Gabor Açılımı

Ayrık Gabor açılımının zaman frekans çözünürlüğünün arttırılması için literatürde çeşitli yöntemler önerilmiştir. Bunlardan bir tanesi, bir ana Gabor penceresinin zamanda ölçeklenmesi ile elde edilen pencerelerin sentez penceresi olarak kullanıldığı, Çok Pencerele Gabor Açılımıdır [62]. Burada ise yukarıdaki bölümde verilen ayrık kesirli Gabor açılımı genişletilerek, çok pencerele kesirli Gabor analizi sunulmaktadır. Sonlu uzunlukta bir $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ işareti için, ayrık zamanlı kesirli çok pencerele Gabor açılımı aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$x(n) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{i,m,k,\alpha} \tilde{h}_{i,m,k,\alpha}(n) \quad (3.97)$$

elde edilir. Burada $a_{i,m,k,\alpha}$ kesirli Gabor katsayılarını, α kesir derecesini göstermek üzere $h_{i,m,k,\alpha}(t)$ taban işlevleri,

$$\tilde{h}_{i,m,k,\alpha}(n) = \tilde{h}_i(n - mL)W_{\alpha,k}(n) \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad (3.98)$$

ve $\tilde{h}_i(n)$ sentez penceresi daha önce olduğu gibi bir pencerenin ölçeklenmesi ve periyodikleştirilmesiyle elde edilir. $W_{\alpha,k}(n)$ kesirli çekirdek işlevidir;

$$W_{\alpha,k}(n) = e^{j[-\frac{1}{2}[n^2 + (k\frac{2\pi}{K}\sin\alpha)^2]\cot\alpha + k\frac{2\pi}{K}n]} \quad (3.99)$$

Bu çekirdek [87]'deki Kesirli Fourier Serisi (KFS) taban fonksiyonları örneklenerek elde edilmiştir. (3.97) eşitliği $\alpha = \pi/2$ için klasik Gabor açılımına dönüşmektedir. M, K, L , ve L' parametreleri klasik Gabor açılımının parametreleri ile aynıdır. Sayısal olarak kararlı bir çözüm elde edebilmek için $L \leq K$ koşulu sağlanmalıdır. $L = K$ kritik örnekleme ve $L < K$ ise fazla örnekleme durumunu göstermektedir. Buradaki Gabor katsayıları, klasik Gabor katsayılarına benzer olarak

$$a_{i,m,k,\alpha} = \langle x(n), \tilde{\gamma}_{i,m,k,\alpha}(n) \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \tilde{\gamma}_{i,m,k,\alpha}^*(n) \quad (3.100)$$

ile verilir ve buradaki analiz fonksiyonları aşağıdaki şekildedir:

$$\tilde{\gamma}_{i,m,k,\alpha}(n) = \tilde{\gamma}_i(n - mL)W_{\alpha,k}(n). \quad (3.101)$$

$\tilde{\gamma}_i(n)$ penceresi $\tilde{\gamma}(n)$ 'in periyodik halidir ve $\tilde{h}_i(n)$ ile $\tilde{\gamma}_i(n)$ arasındaki kesirli ikililik koşulunun çözümünden elde edilir. Her bir i ölçeği için kesirli Gabor'un tamlığını bulabilmek için (3.100) denklemi (3.97)'denklemine konursa

$$\begin{aligned}
x(n) &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^{L-1} x(l) \tilde{\gamma}_i^*(l-mL) W_{\alpha,k}^*(l) \right) \tilde{h}_i(n-mL) W_{\alpha,k}(n) \\
&= \sum_{l=0}^{L-1} x(l) \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \tilde{h}_i(n-mL) \tilde{\gamma}_i^*(l-mL) e^{j[-\frac{1}{2}(n^2-l^2)\cot\alpha + k\frac{2\pi}{K}(n-l)]}
\end{aligned} \tag{3.102}$$

elde edilir. Buradan tamlık koşulu

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \tilde{h}_i(n-mL) \tilde{\gamma}_i^*(l-mL) e^{j[-\frac{1}{2}(n^2-l^2)\cot\alpha]} e^{jk\frac{2\pi}{K}(n-l)} = \delta(n-l) \tag{3.103}$$

olarak elde edilir.

Analiz ve sentez taban kümelerinin dikliği ise, yukardaki tamlık koşuluna daha önceden olduğuna benzer olarak ayırık Poisson toplamı uygulanarak

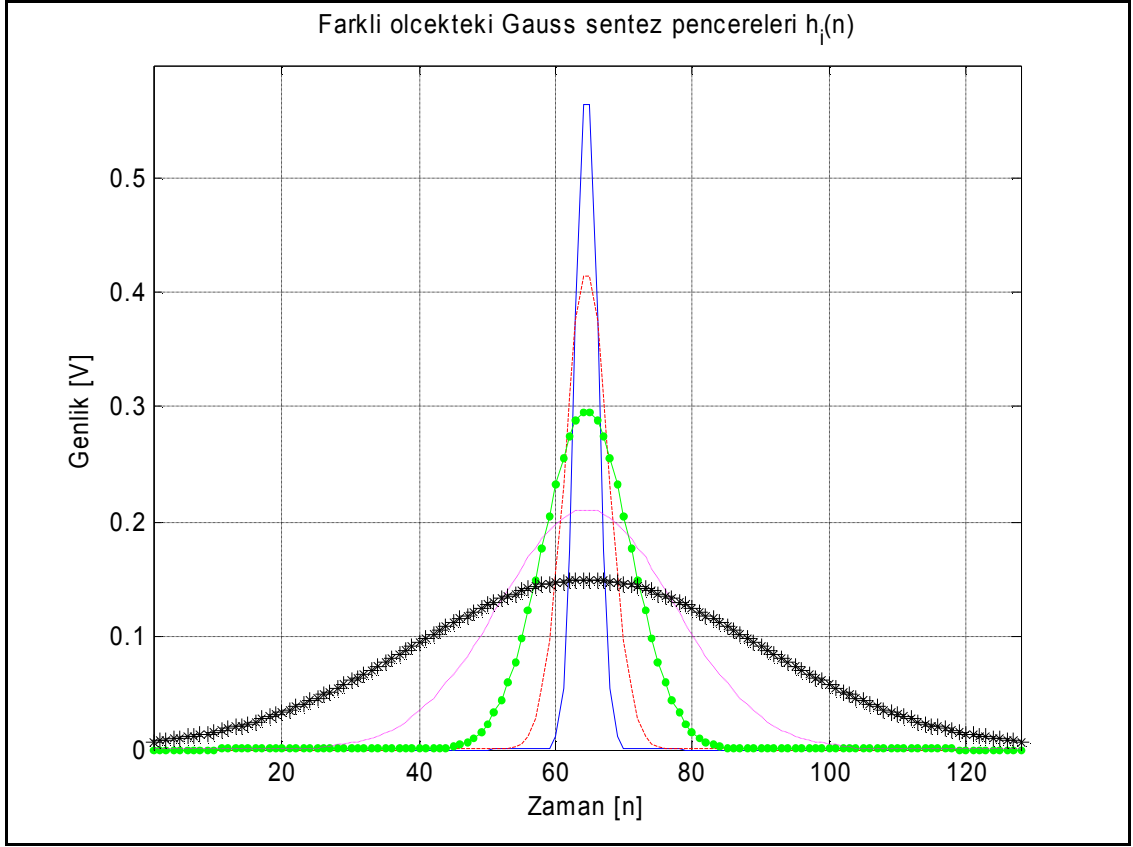
$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{h}_i^*(n+mK) e^{jk\frac{2\pi}{L}(n+mK)} \tilde{\gamma}_i(n) e^{j(nmK + \frac{m^2K^2}{2})\cot\alpha} &= \frac{L}{K} \delta_m \delta_k \\
0 \leq m \leq L'-1, \quad 0 \leq k \leq L'-1
\end{aligned} \tag{3.104}$$

bulunur.

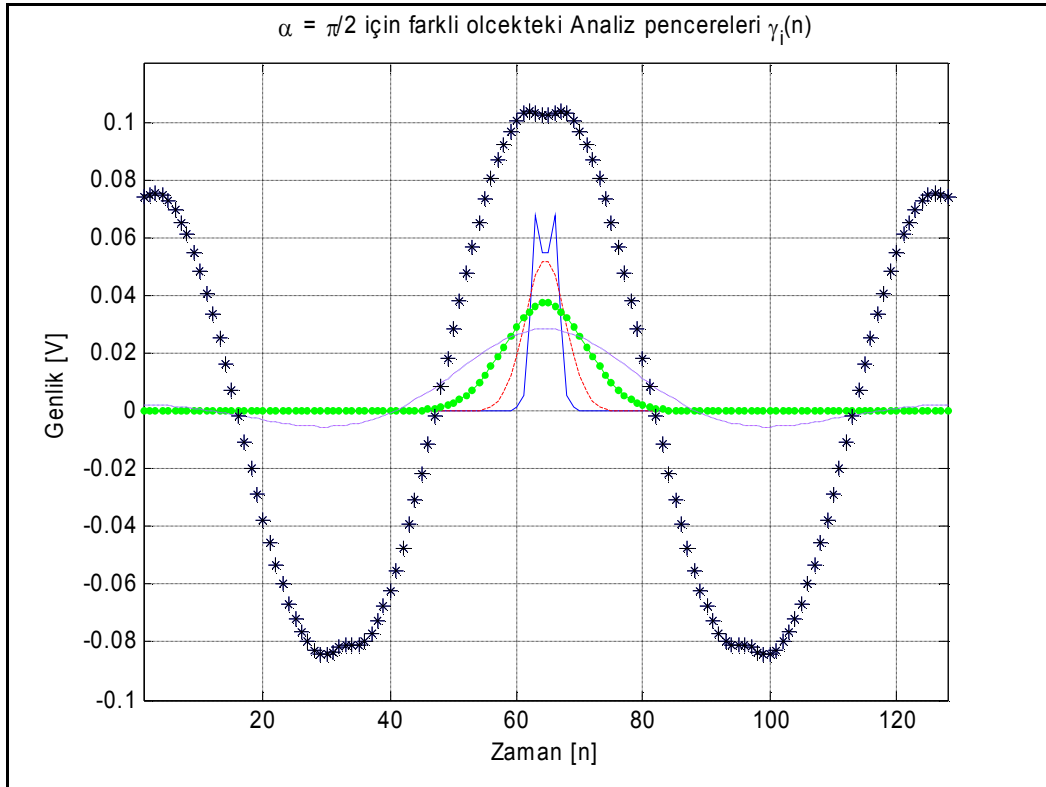
(3.103) ve (3.104)'de verilen tamlık ve ikili-diklik koşulları $\alpha = \pi/2$ durumunda klasik sinüsoidal Gabor açılımının koşullarına dönüşmektedir [39]. Bu bize yukardaki kesirli Gabor açılımın, ayırık Gabor açılımının genel hali olduğunu göstermektedir.

3.3.2. Çok Pencereleli Kesirli Gabor Açılımı Benzetimleri

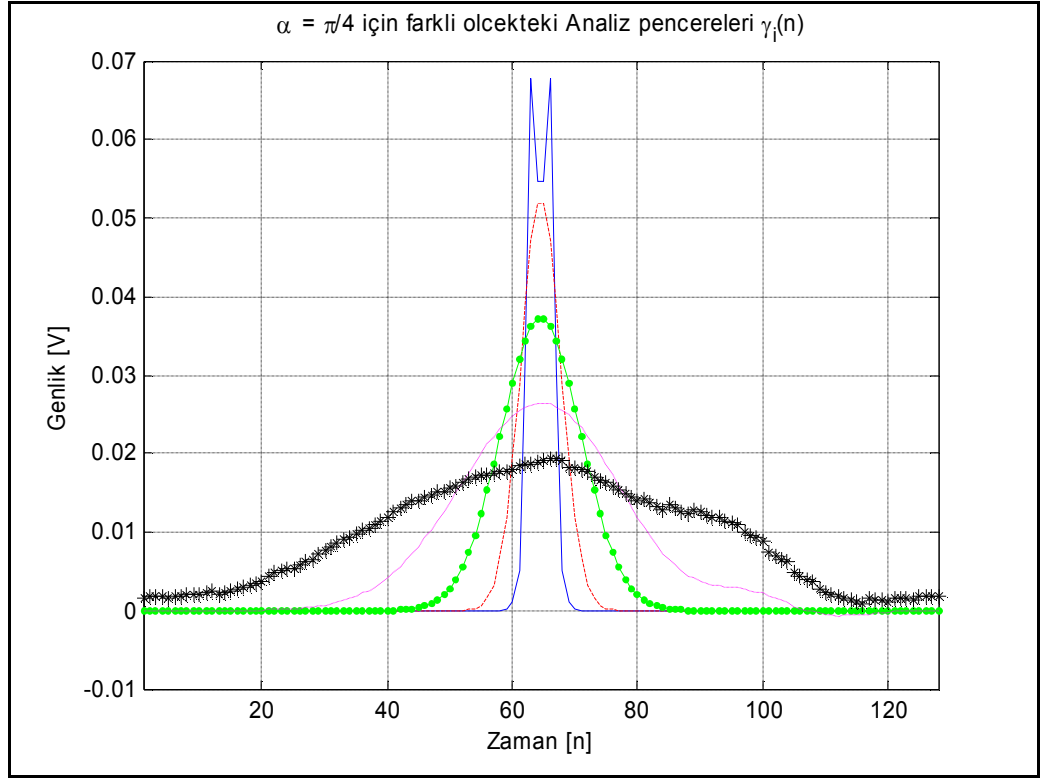
Örnek 1: Bu örnekte bir ana Gabor penceresinden elde edilen ölçeklenmiş sentez pencereleri ($i=0,1,2,3$ için) ve bunlara karşı gelen ikili dik γ analiz pencereleri farklı kesir dereceleri için verilmektedir. (Şekil 3.25,26,27,28)



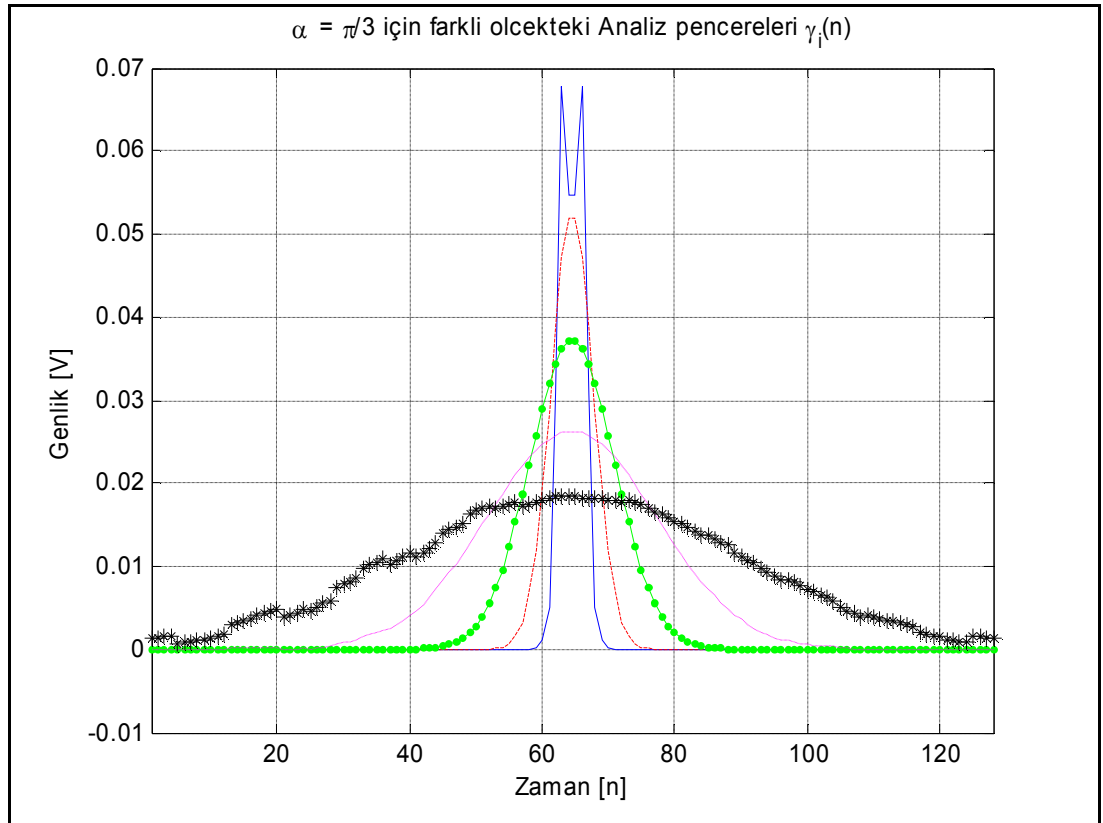
Şekil 3.25 Çeşitli ölçeklerdeki Gauss sentez pencereleri



Şekil 3.26 $\alpha=\pi/2$ için elde edilen analiz pencereleri

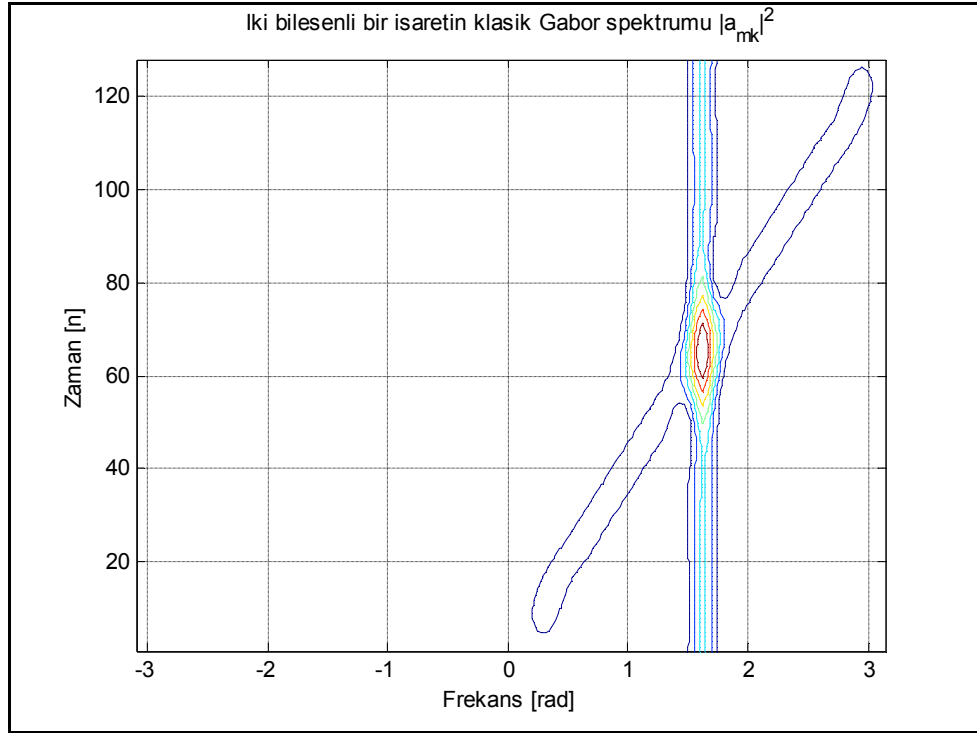


Şekil 3.27 $\alpha=\pi/4$ için elde edilen analiz pencereleri

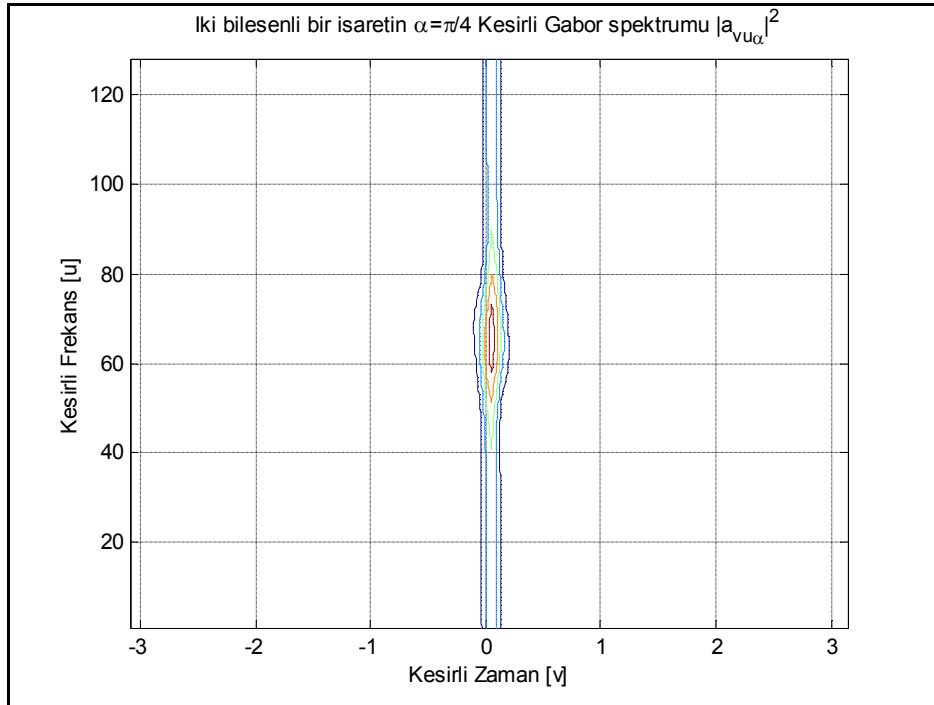


Şekil 3.28 $\alpha=\pi/3$ sentez pencerelerine karşı gelen analiz pencereleri

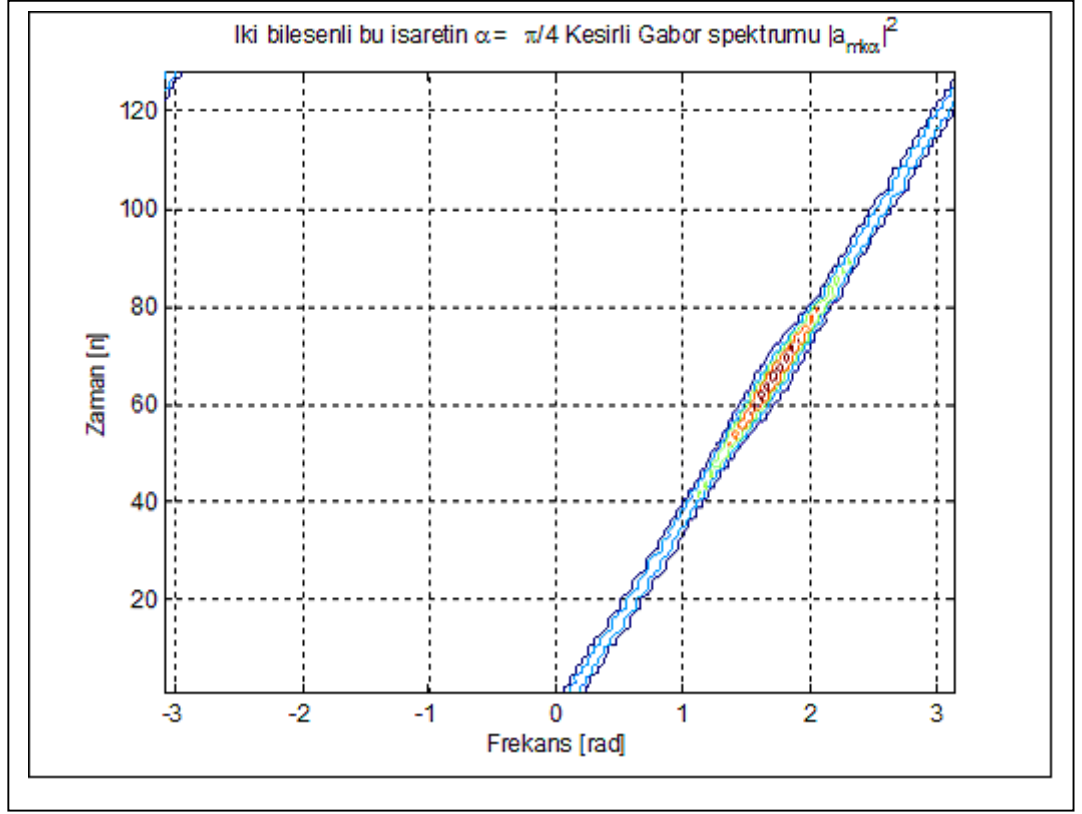
Örnek 2: Burada ise iki bileşenli bir $x(n)$ işaretinin çok pencereli Gabor izgesi önce $\alpha=\pi/2$ ile ve daha sonra da $\alpha=\pi/4$ ile (Şekil 3.29,30,31) verilmiştir.



Şekil 3.29 İki bileşenli bir işaretin klasik Gabor izgesi

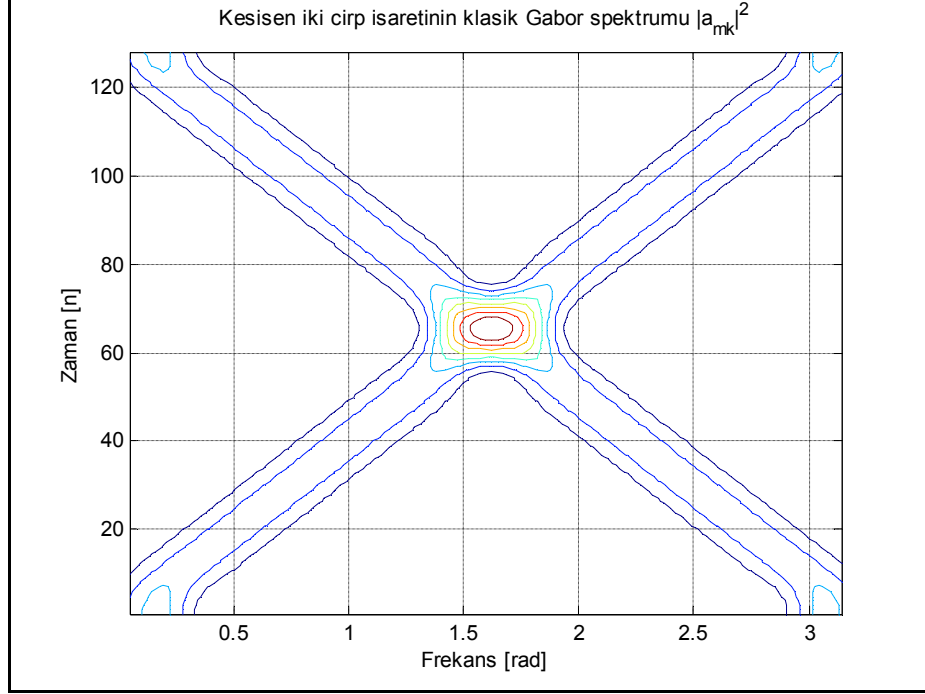


Şekil 3.30 Bu işaretin $\alpha=\pi/4$ kesirli Gabor izgesi, $\left\{ \left| a_{v,u,\alpha} \right|^2 \right\}$

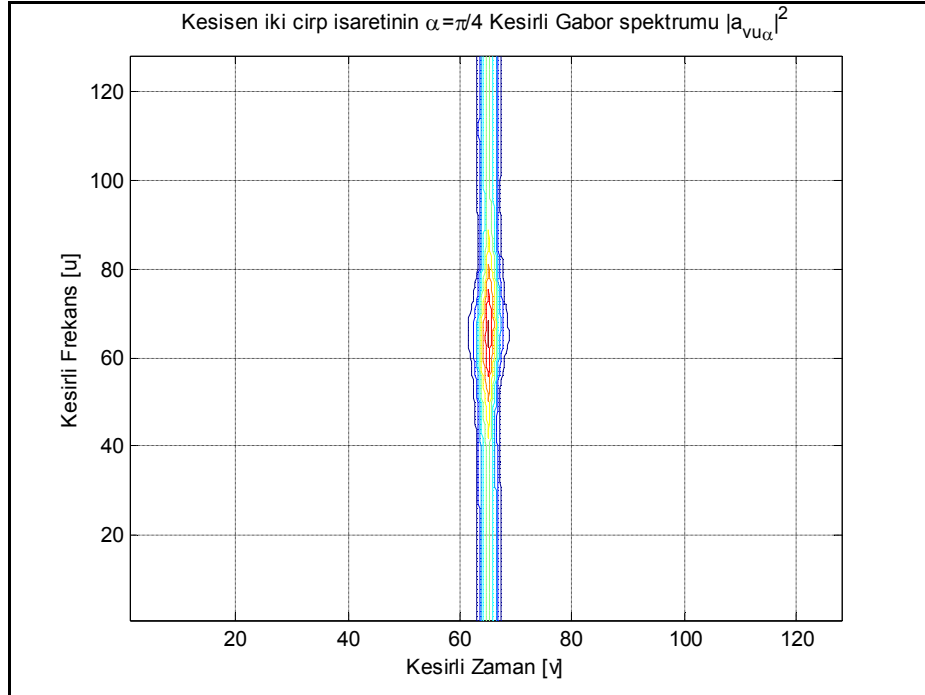


Şekil 3.31 Aynı işaretin $\alpha = \pi/4$ kesirli Gabor izgesi, n-w düzlemine ötelenerek

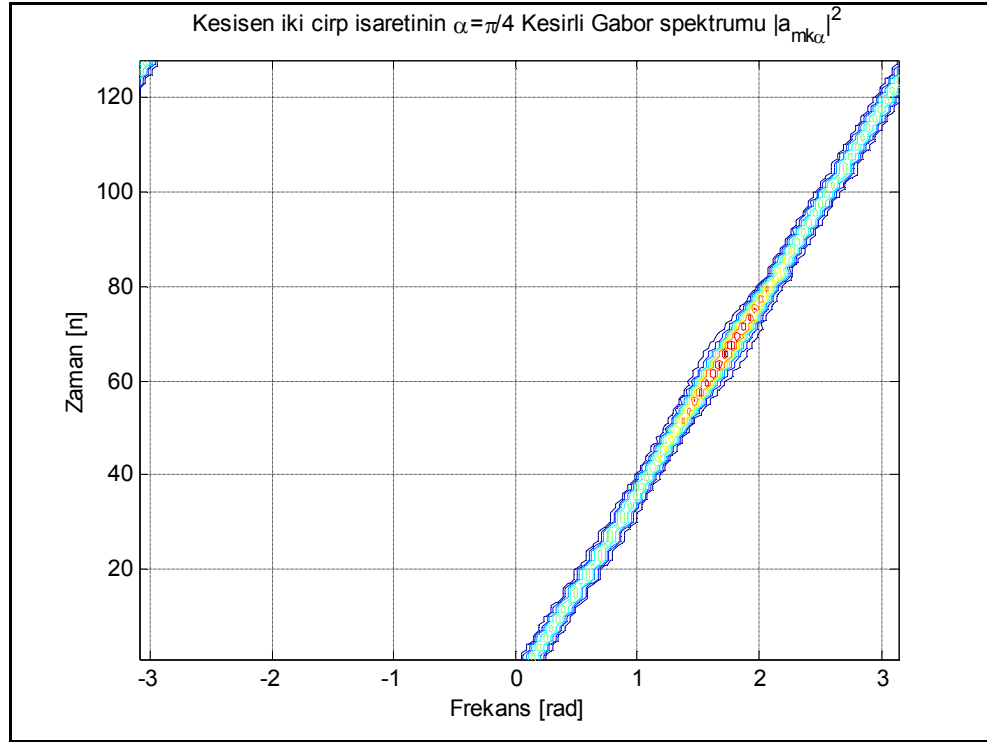
Örnek 3: Kesişen iki çarp bileşenden oluşan bir işaret ele alınmaktadır, Gabor izgesi önce $\alpha=\pi/2$ ile ve daha sonra da $\alpha=\pi/4$ ve $\alpha=-\pi/4$ ile (Şekil-3.32,33,34,35,36) verilmiştir.



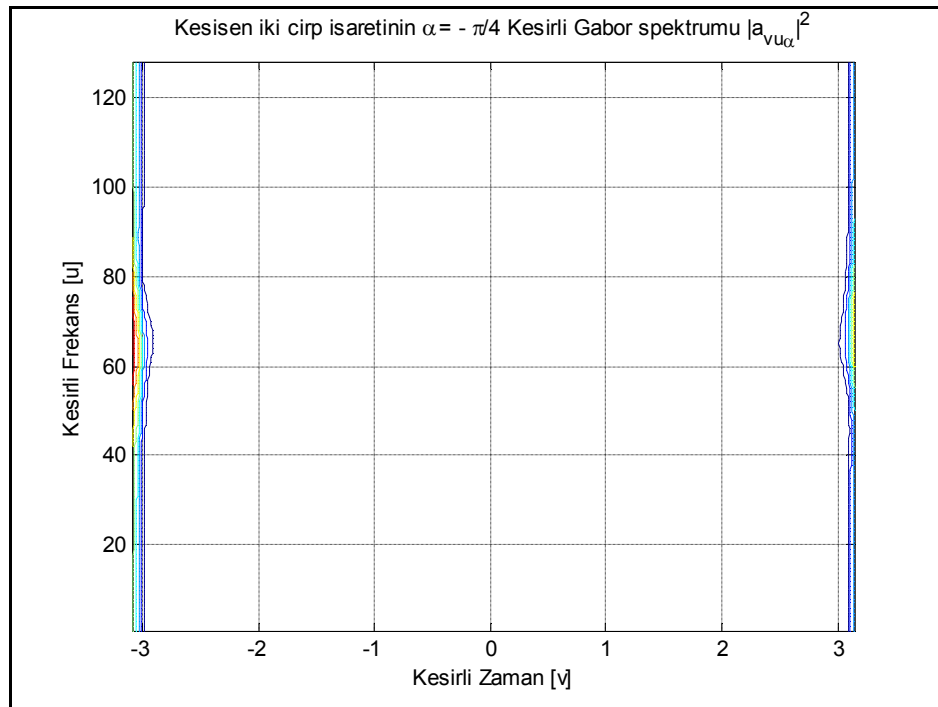
Şekil 3.32 Kesişen iki çarp işaretin klasik Gabor izgesi, $\alpha=\pi/2$



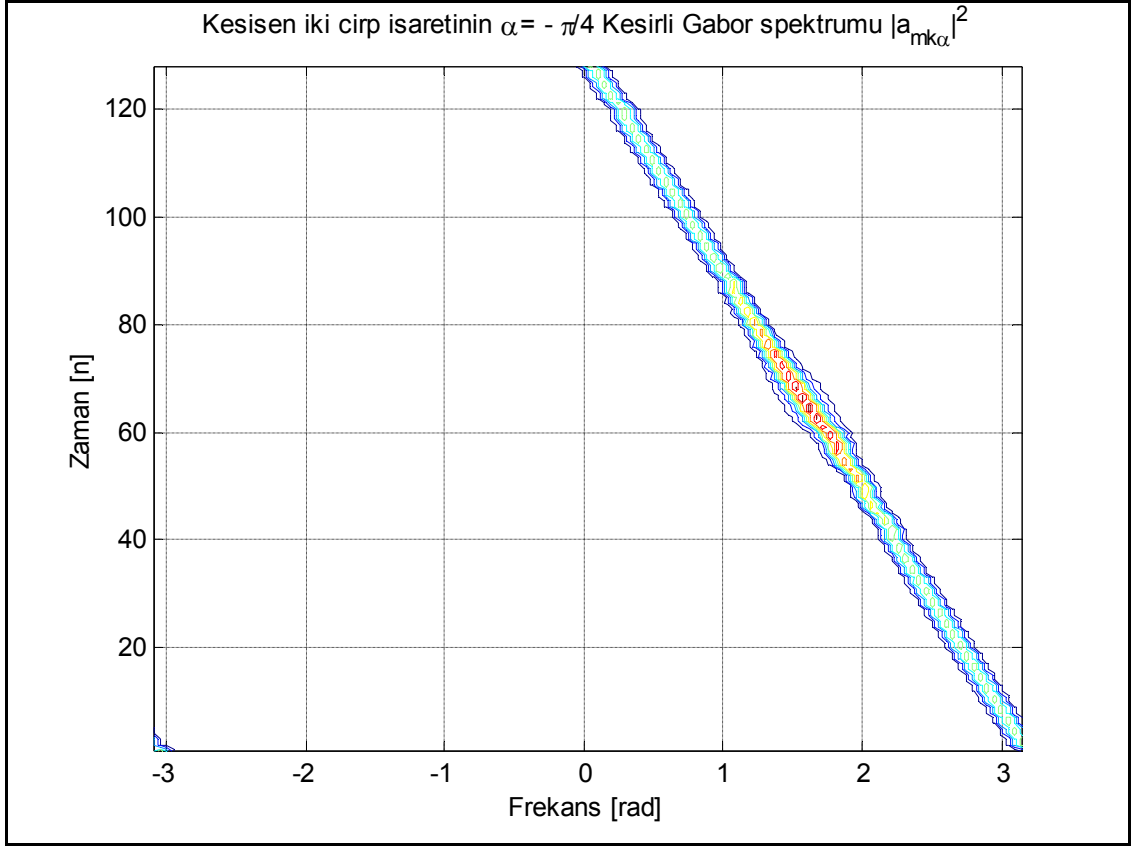
Şekil 3.33 Bu işaretin $\alpha=\pi/4$ ile kesirli Gabor izgesi, $\{ |a_{v,u,\alpha}|^2 \}$



Şekil 3.34 $\alpha=\pi/4$ kesirli Gabor izgesi, n-w düzlemine ötelenmiş olarak



Şekil 3.35 Aynı işaretin $\alpha=-\pi/4$ ile kesirli Gabor izgesi, $\left\{ |a_{v,u,\alpha}|^2 \right\}$



Şekil 3.36 $\alpha=-\pi/4$ kesirli Gabor izgesi, n-w düzlemine ötelenmiş olarak

3.4.1. Kesirli Evrimsel İzge

Daha önce belirtildiği gibi Zaman Frekans (ZF) analizi sinyal enerjisinin birleşik zaman frekans düzlemine dağılımını veya zamanla değişen güç izgesini elde etmekte kullanılan bir yöntemdir [93]. ZF analizinde ana hedeflerden biri, sinyal enerjisinin birleşik ZF düzlemine dağılımını delta fonksiyonu yerleşmesi ile elde etmektir; ancak kestirim yöntemlerinin getirdiği kısıtlamalar nedeniyle bu genel olarak mümkün değildir. Bir ZF analiz yöntemi olan Evrimsel İzge (Eİ) yaklaşımı rasgele durağan sinyallerin izgesel gösterimine benzeyen, ancak zamanla değişen bir sinyal gösterimine dayanır [57,58]. Bu Wold-Cramer gösterimine göre durağan olmayan sinyaller, rasgele ve zamanla değişen genlik ve faza sahip sinüsoidallerin birleşimi olarak gösterilebilirler [57]. Buna paralel olarak, ayrık zamanlı, sonlu uzunlukta bir $x(n)$ işareti, zamanla değişen genlikli sinüsoidallerin birleşimi olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir [86]:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{K-1} X(n, k) e^{jn \frac{2\pi}{K} k} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (105)$$

Ayrıca $x(n)$ işaretinin evrimsel izgesi $S_{EI}(n, k) = \frac{1}{K} |X(n, k)|^2$ şeklinde verilir ve kestirimi için çeşitli yöntemler önerilmiştir [61,62,94,95]. Eİ kestirimi veya $x(n)$ sinyalinin modellenmesi için gerekli olan $X(n, k)$ çekirdek işlevi [66]'de çok pencereli Gabor katsayıları kullanılarak elde edilmiştir.

Verilen bir $x(n)$ işaretinin çok pencereli kesirli Gabor açılımı ile yukarıdaki ayrık zamanlı ve ayrık frekanslı Wold-Cramer izgesel gösterimini karşılaştırarak, i , pencere ile hesaplanacak α kesirli ZF çekirdeği aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$X_i^\alpha(n, k) = \sum_{m=0}^{M-1} a_{i,m,k,\alpha} \tilde{h}_i(n - mL) e^{-j \frac{1}{2} (n^2 + (\omega_k \sin \alpha)^2) \cot \alpha} \quad (3.106)$$

$$\omega_k = k \frac{2\pi}{K}$$

Daha sonra (3.100) eşitliğinde verilen çok pencereli kesirli Gabor katsayıları ifadesi yukarıda yerine konursa

$$\begin{aligned} X_i^\alpha(n, k) &= \sum_{m=0}^{M-1} \left[\sum_{l=0}^{N-1} x(l) \tilde{\gamma}_i^*(n - mL) e^{j \frac{1}{2} (l^2 + (\omega_k \sin \alpha)^2) \cot \alpha} e^{-j \omega_k l} \right] \tilde{h}_i(n - mL) \\ &\quad \cdot e^{-j \frac{1}{2} (n^2 + (\omega_k \sin \alpha)^2) \cot \alpha} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) e^{-j \omega_k l} \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}_i(n - mL) \tilde{\gamma}_i^*(n - mL) e^{j \frac{1}{2} (l^2 - n^2) \cot \alpha} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) p_i^\alpha(n, l) e^{-j \omega_k l} \end{aligned} \quad (3.107)$$

bulunur. Burada zamanla değişen ve kesirli (sinüsoidal olmayan biçimde) modüle edilmiş pencere fonksiyonu,

$$p_i^\alpha(n, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}_i(n - mL) \tilde{\gamma}_i^*(n - mL) e^{j \frac{1}{2} (l^2 - n^2) \cot \alpha} \quad (3.108)$$

ile verilmektedir. Dolayısıyla (3.108) eşitliği, 2^i ölçeğinde zamana bağlı ve kesirli modüle edilmiş $p_i^\alpha(n, l)$ penceresi ile hesaplanan kısa zamanlı bir Fourier dönüşümü olarak yorumlanabilir. Böylece $x(n)$ işaretinin kesirli ve çok pencereli evrimsel izgesi

$$S_i^\alpha(n, k) = \frac{1}{K} |X_i^\alpha(n, k)|^2 \quad i = 0, 1, \dots, I-1 \quad (3.109)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca $p_i^\alpha(n, l)$ penceresi işaretten bağımsız olarak hesaplanabilecek ve yukarıdaki evrimsel izge hesabı FFT ile kolayca yapılabilir.

Simdi bu kısımda, bulduğumuz İzgenin, zaman frekans izgesi olarak kullanılabileceğinin gösterilmesi amacıyla önce, izgenin zaman ve frekans'daki karesel toplamının, işaretin zamandaki karesel toplamına eşit olup olmadığı (Enerjisinin eşit olduğu) kontrol edilecek daha sonra da sırasıyla frekans ve zaman kenar yoğunluklarının sağlanabilmesi için gerekli koşullar elde edilecektir.

$$1- \sum_{n,k} S_i^\alpha(n, \omega_k) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} |X_i^\alpha(n, \omega_k)|^2 \stackrel{?}{=} \sum_{l=0}^{N-1} |x(l)|^2$$

$$\text{burada } X_i^\alpha(n, \omega_k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) p_i^\alpha(n, l) e^{-j\omega_k l} \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l) p_i^\alpha(n, l) e^{-j\omega_k l} \right) \left(\sum_{l'=0}^{N-1} x^*(l') p_i^{\alpha*}(n, l') e^{-j\omega_k l'} \right) \\ & \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} x(l) x^*(l') \underbrace{\sum_n \sum_k p_i^\alpha(n, l) p_i^{\alpha*}(n, l') e^{-j\omega_k (l-l')}}_{K\delta(l-l')} \end{aligned}$$

ve

$$\sum_l x(l) x^*(l) = \sum_l |x(l)|^2 = E_x$$

bunun için gerek yeter koşul

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} p_i^\alpha(n, l) p_i^{\alpha*}(n, l') e^{-j\omega_k(l-l')} = K \delta(l-l') \quad (3.110)$$

dur.

2- Sıklık Marjinali $\frac{1}{K} \sum_n |X_i^\alpha(n, \omega_k)|^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{K} |X(\omega_k)|$ midir.

Burada $X(\omega_k) = \sum_n x(n) e^{-j\omega_k n}$, $x(n)$ işaretinin ayrık zamanlı Fourier dönüşümüdür.

$$\begin{aligned} & \sum_n \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l) p_i^\alpha(n, l) e^{-j\omega_k l} \right) \left(\sum_{l'=0}^{N-1} x^*(l) p_i^{\alpha*}(n, l') e^{-j\omega_k l'} \right) \\ & \sum_{l=0}^{N-1} x(l) e^{-j\omega_k l} \sum_{l'=0}^{N-1} x^*(l') e^{-j\omega_k l'} \sum_{n=0}^{N-1} p_i^\alpha(n, l) p_i^{\alpha*}(n, l') \Rightarrow \\ & X(\omega_k) X(\omega_k)^* \sum_{n=0}^{N-1} p_i^\alpha(n, l) p_i^{\alpha*}(n, l') = |X(\omega_k)|^2 \end{aligned}$$

bunun için koşul

$$\sum_{n=0}^{N-1} p_i^\alpha(n, l) p_i^{\alpha*}(n, l') = 1 \quad \forall, l, l' \in [0, N-1] \quad (3.111)$$

3- Zaman Marjinali $\frac{1}{K} \sum_n |X_i^\alpha(n, \omega_k)|^2 \stackrel{?}{=} |x(n)|^2$ midir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K} \sum_k \left(\sum_{l=0}^{N-1} x(l) p_i^\alpha(n, l) e^{-j\omega_k l} \right) \left(\sum_{l'=0}^{N-1} x^*(l) p_i^{\alpha*}(n, l') e^{-j\omega_k l'} \right) \\ & = \sum_l \sum_{l'} x(l) x^*(l') \frac{1}{K} \sum_k p_i^\alpha(n, l) p_i^{\alpha*}(n, l') e^{j\omega_k(l-l')} \\ & = \sum_l \sum_{l'} x(l) x^*(l') \frac{1}{K} \sum_k p_i^\alpha(n, l) p_i^{\alpha*}(n, l') \delta(l' - l) \\ & = \sum_k |x(l)|^2 |p_i^\alpha(n, l)| \delta(l' - l) = \delta(n - l) \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ & = |x(n)|^2 \end{aligned}$$

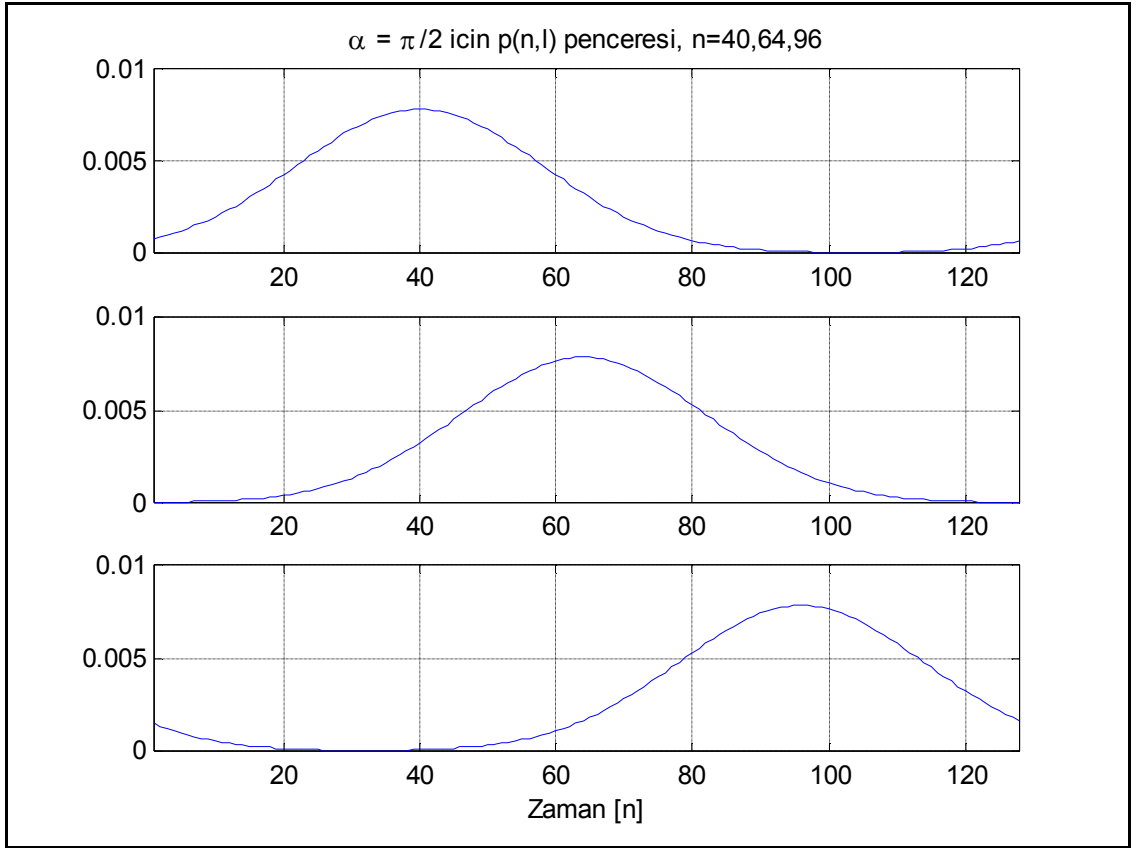
olması için koşul

$$|p(n, l)|^2 = \delta(n - l) \quad (3.112)$$

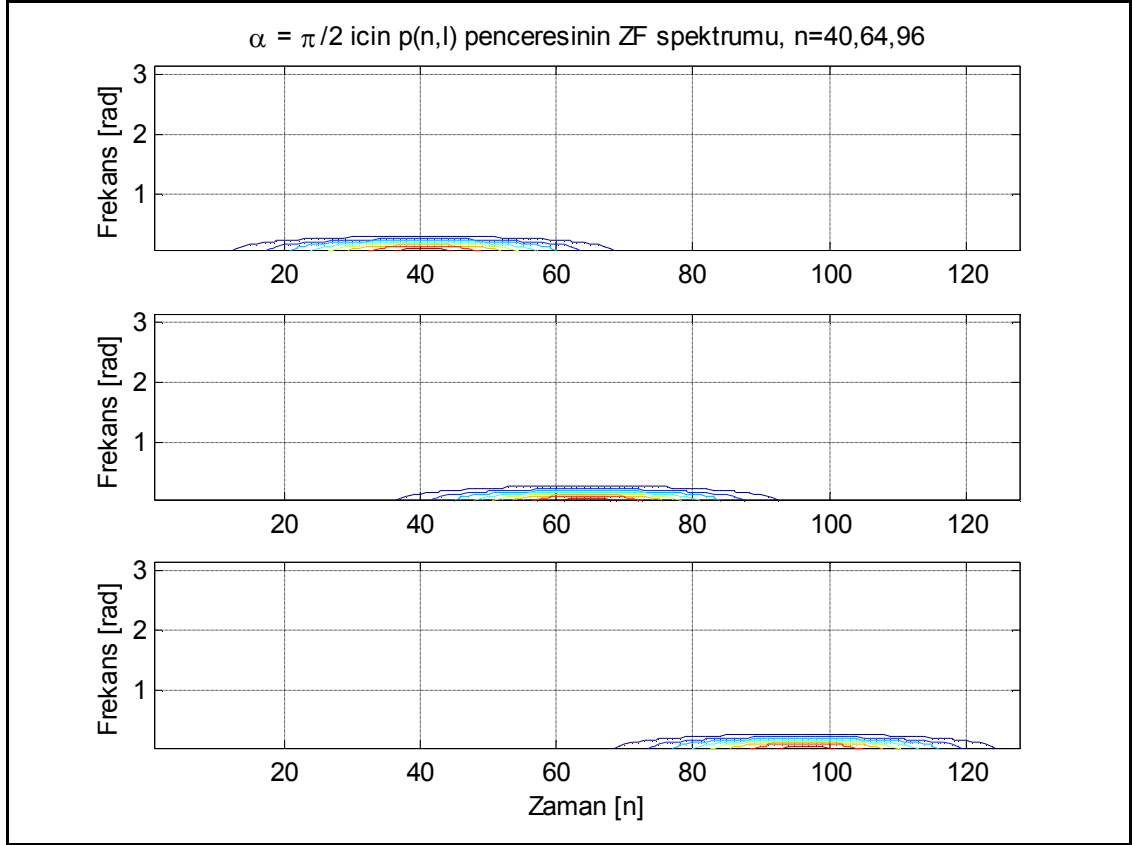
olarak elde edilebilir. Aşağıda bu yöntemin çeşitli işaretlere uygulanması ile elde edilen zaman frekans izge analiz benzetimleri verilmiştir.

3.4.2. Kesirli Evrimsel İzge Benzetimleri

Örnek 1: Öncelikle yukarıda tanımlanan zamanla değişen ve kesirli modüle edilmiş $p(n,l)$ pencereleri farklı kesir dereceleri için hesaplanmış ve verilmiştir. Şekil 3.37 $\alpha=\pi/2$ için hesaplanan $p(n,l)$ penceresini $n=32,64,96$ anları için vermektedir. Şekil 3.38’de ise bu pencerelerin klasik Gabor izgeleri verilmektedir. Görüldüğü gibi taban fonksiyonları ZF düzleminde sabit $\omega = 0$ frekanslı sinüsoidal fonksiyonlardır.

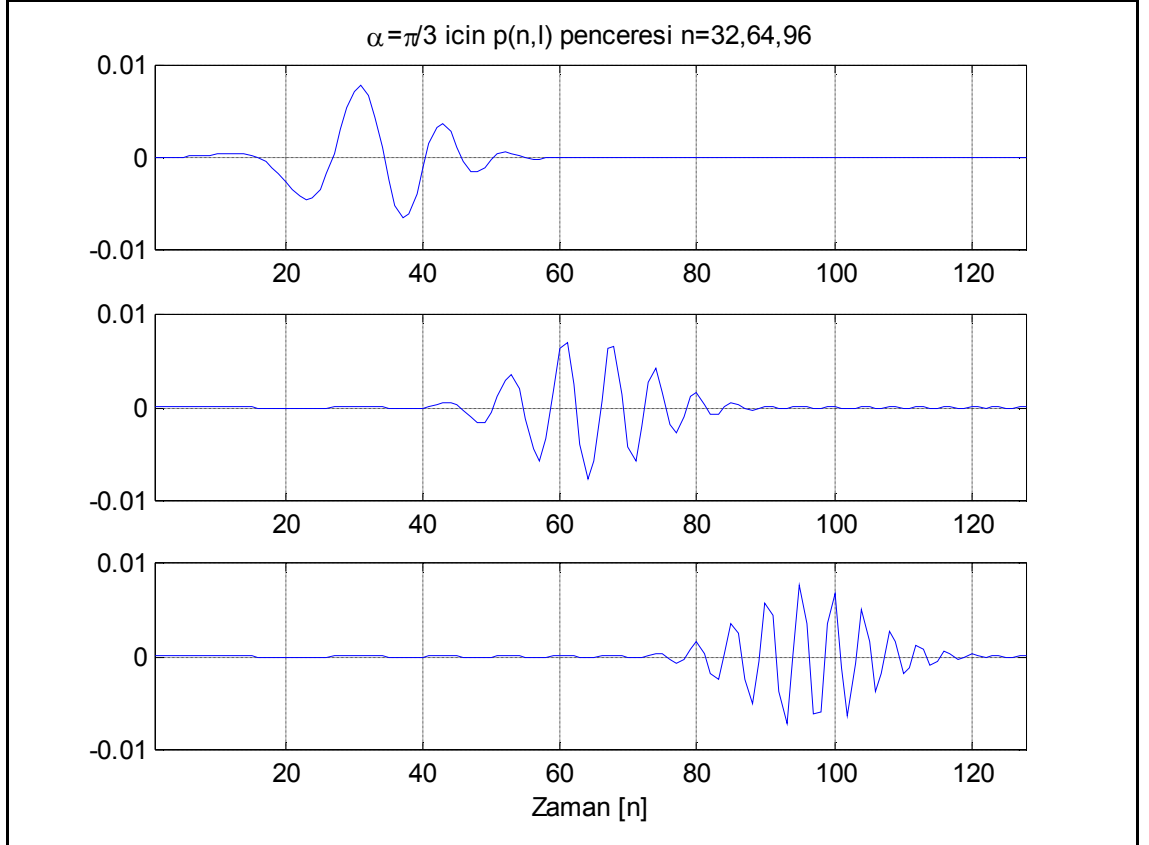


Şekil 3.37 $\alpha=-\pi/2$ için hesaplanan $p(n,l)$ penceresi

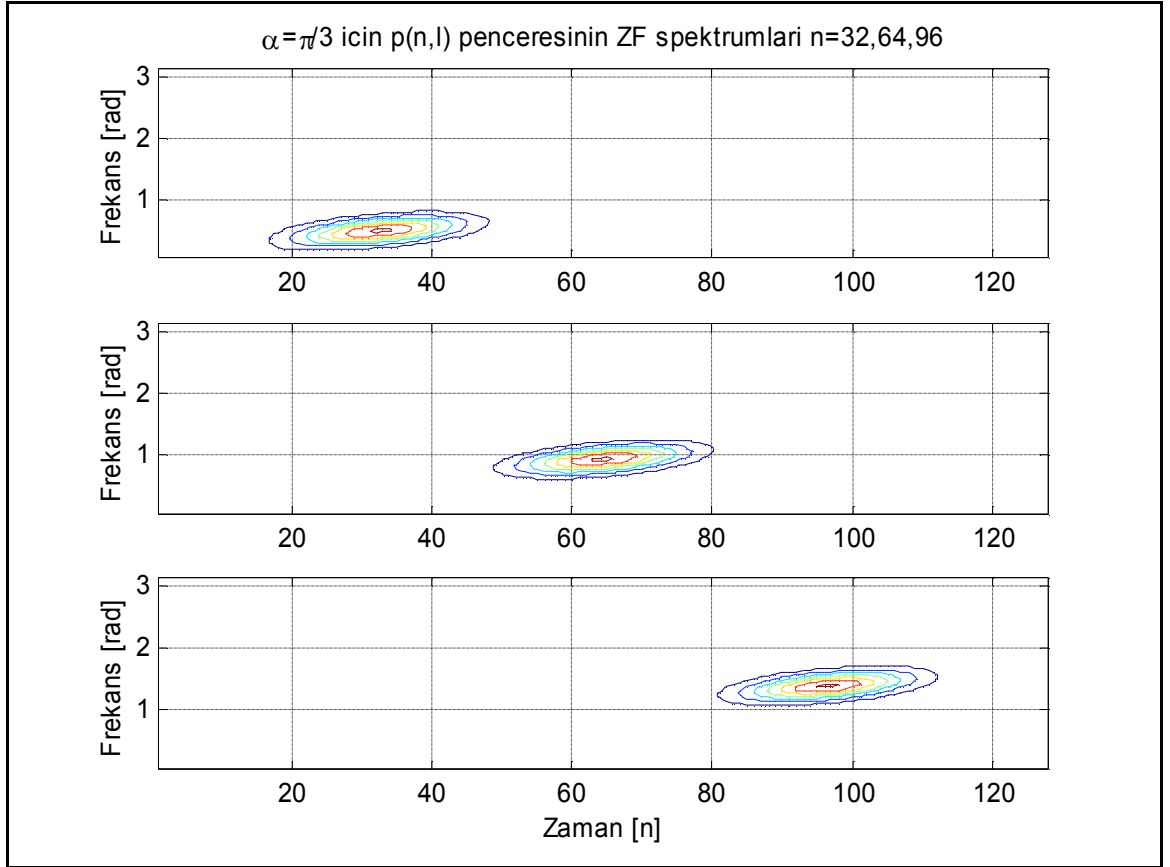


Şekil 3.38 Yukardaki pencerelerin klasik Gabor izgeleri

Örnek 2: Şekil 3.39’ da $p(n,l)$ penceresi $\alpha=\pi/3$ için yine $n=32,64,96$ anlarında görülmektedir. Ayrıca bu pencerelerin klasik Gabor izgeleri Şekil 3.40’da verilmektedir. Taban fonksiyonlarının ZF düzleminde $\pi/3$ kesir derecesi kadar dönmüş ya da çarpı ile modüle edilmiş oldukları görülmektedir.

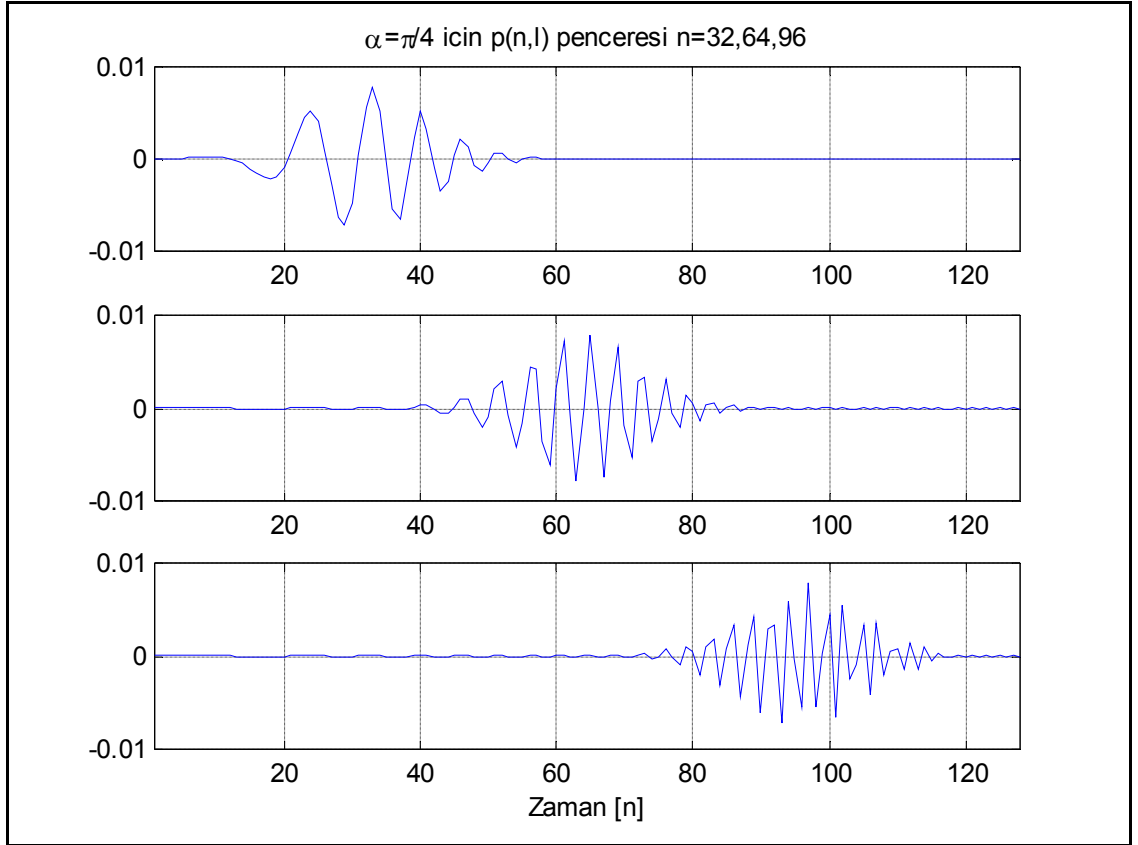


Şekil 3.39 $p(n,l)$ penceresi $\alpha=-\pi/3$, $n=32,64,96$

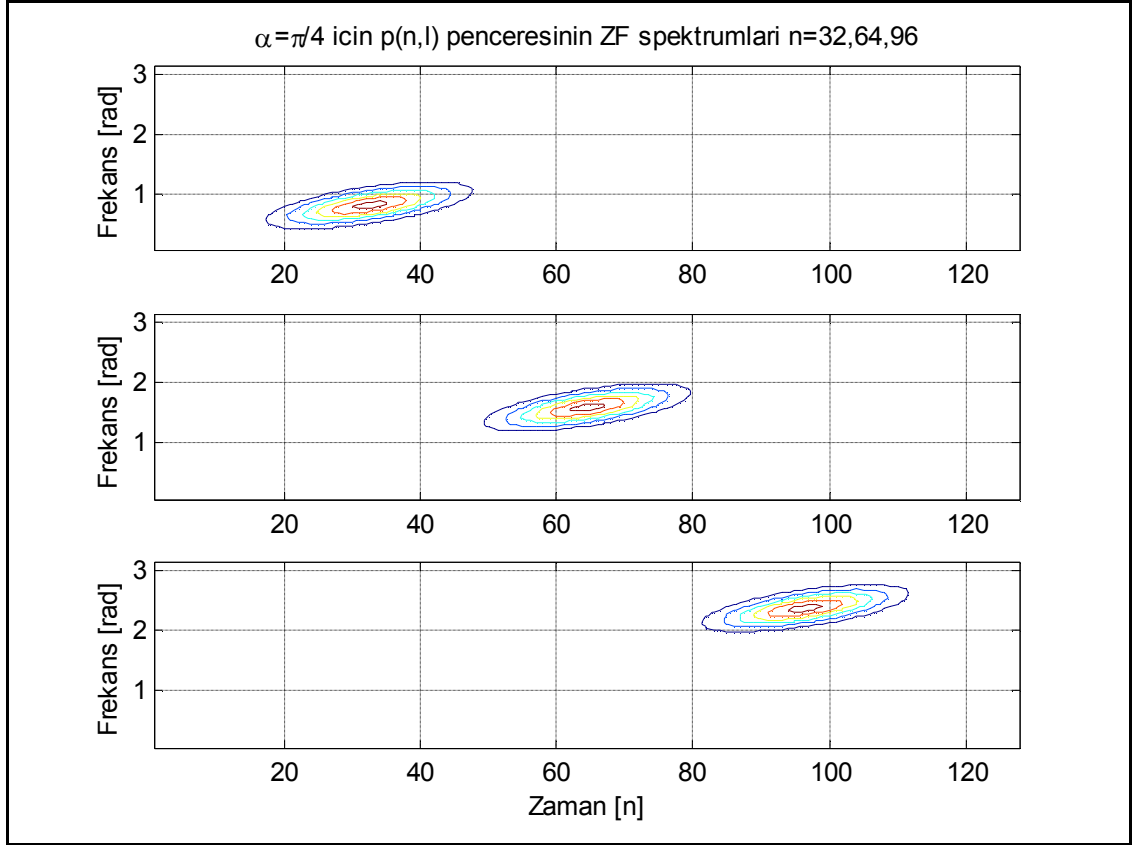


Şekil 3.40 Yukardaki işaretin Gabor izgesi

Örnek 3. Şekil 3.41 de $p(n,l)$ penceresi $\alpha=\pi/4$ için $n=32,64,96$ anlarında görülmektedir. Bu pencerelerin Gabor izgeleri Şekil 3.42’de sunulmuştur. Bu taban fonksiyonlarının ZF düzleminde $\pi/4$ kesir derecesi kadar bir dönüş yaratacakları yani VU düzlemini tanımlayacakları şekilden anlaşılmaktadır,

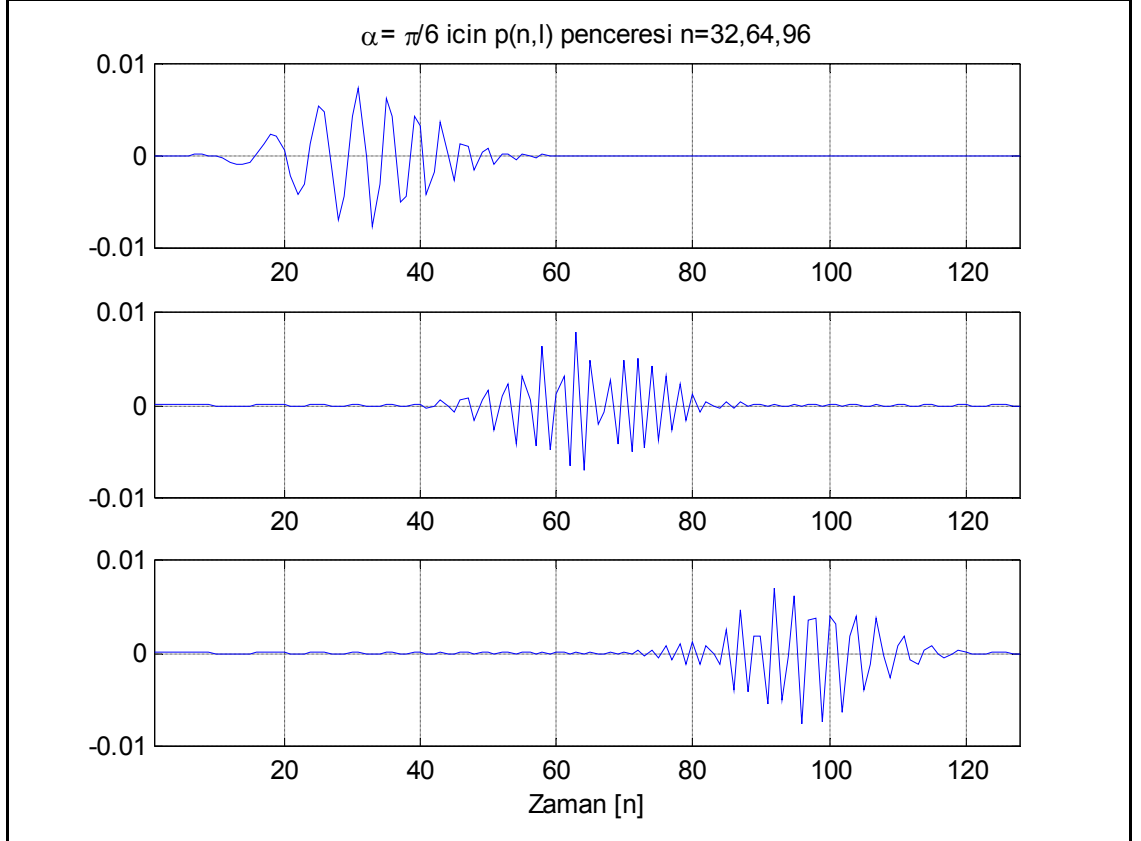


Şekil 3.41 $p(n,l)$ penceresi, $\alpha=\pi/4$, $n=32,64,96$

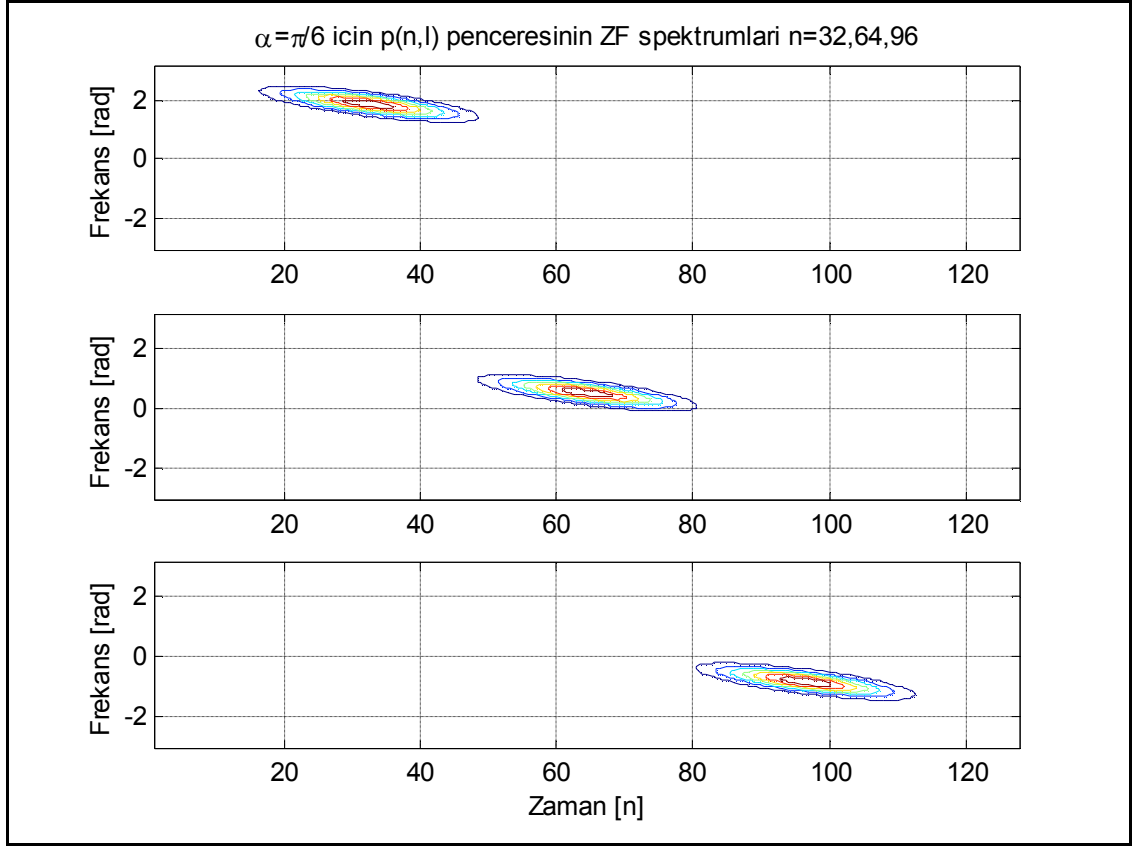


Şekil 3.42 $\alpha = \pi/4$ için $p(n,l)$ pencere ZF izgesi

Örnek 4: Kesirli evrimsel izgenin hesaplanmasında kullanılacak olan zamanla değişen ve çırp ile modüle edilmiş $p(n,l)$ penceresi Şekil 3.43’de $\alpha=\pi/6$ için $n=32,64,96$ anlarında görölmektedir. Bu pencerelerin Gabor izgeleri Şekil 3.44’de verilmiştir. Bu taban fonksiyonlarının ZF düzleminde $\pi/6$ kesir derecesi kadar kadar dönmüş ya da çırp ile modüle edilmiş oldukları görölmektedir.

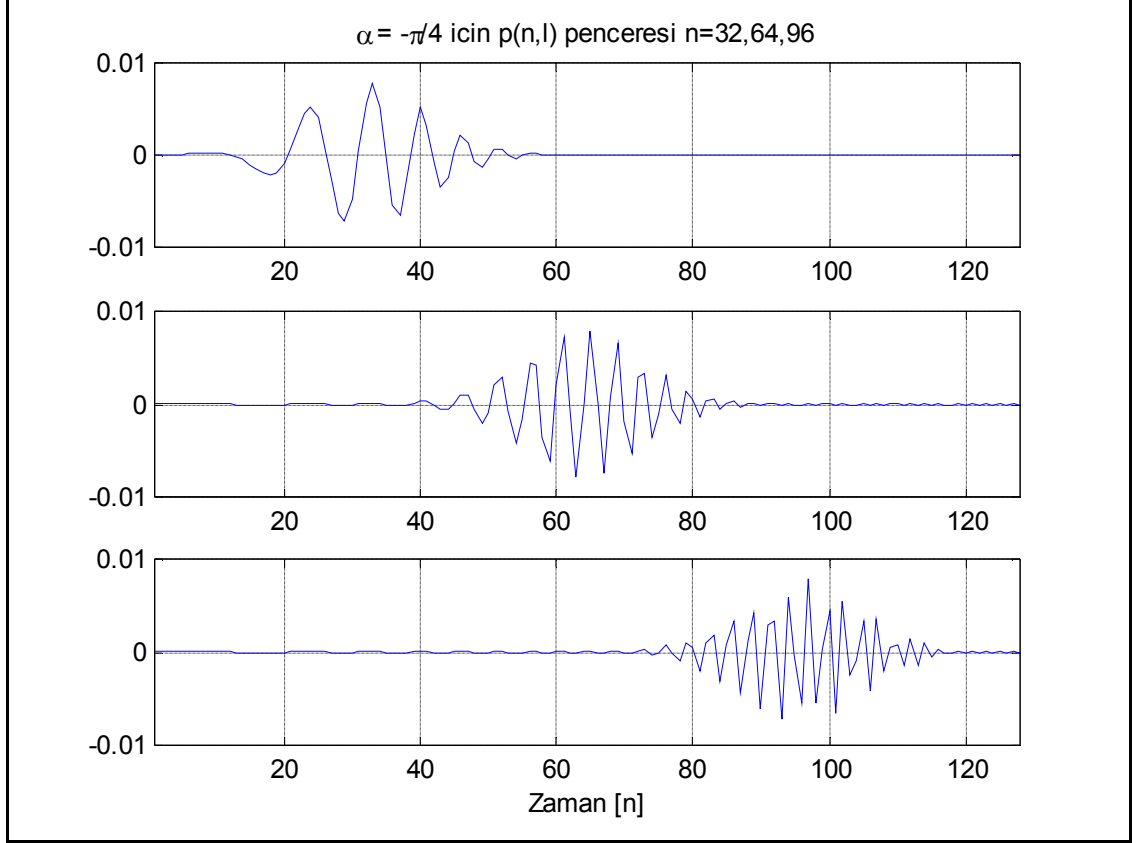


Şekil 3.43 $\alpha=\pi/6$, $n=32,64,96$ için $p(n,l)$ pencereleri

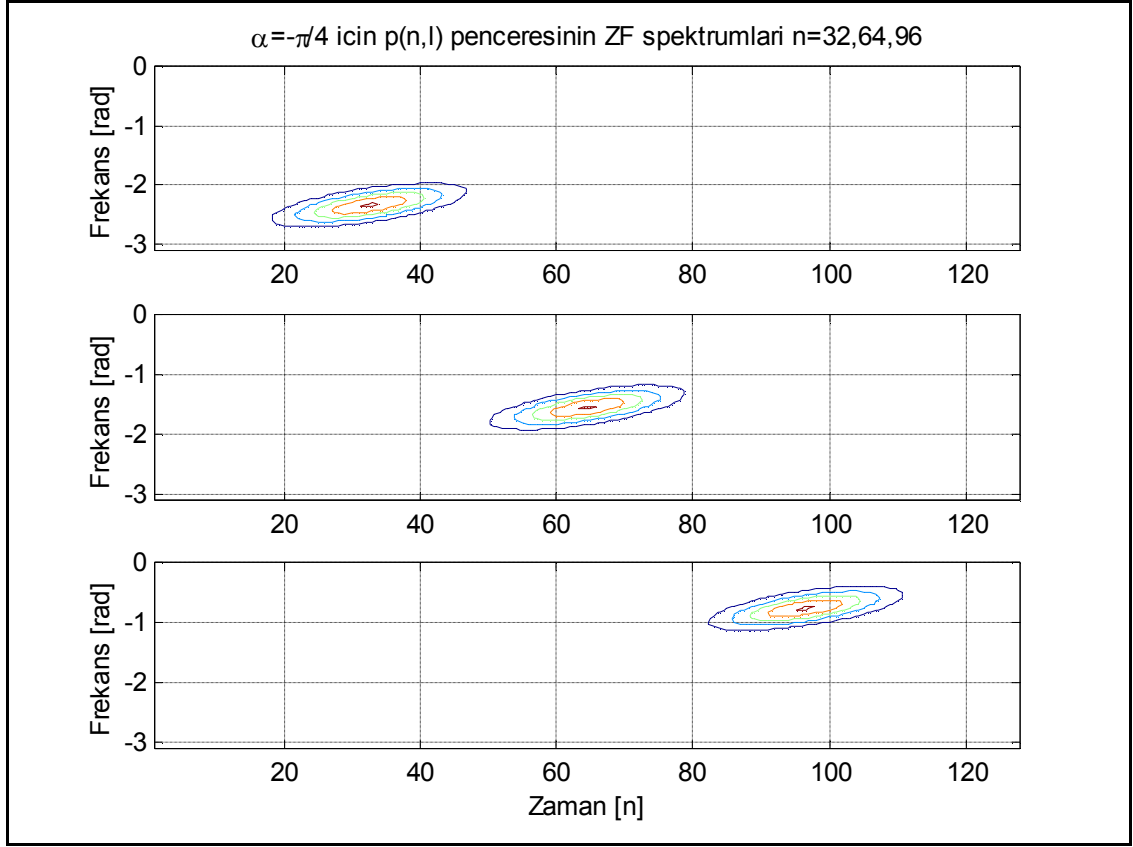


Şekil 3.44 $\alpha = \pi/6$ için $p(n,l)$ penceresinin ZF izgesi

Örnek 5: Bu örnekte ise kesirli evrimsel izgenin hesaplanmasında kullanılacak olan zamanla değişen ve çarpı ile modüle edilmiş $p(n,l)$ penceresi $\alpha=-\pi/4$ için hesaplanmış ve Şekil 3.45’da $n=32,64,96$ anlarında verilmiştir. Bu pencerelerin Gabor izgeleri Şekil 3.46’de verilmiştir.



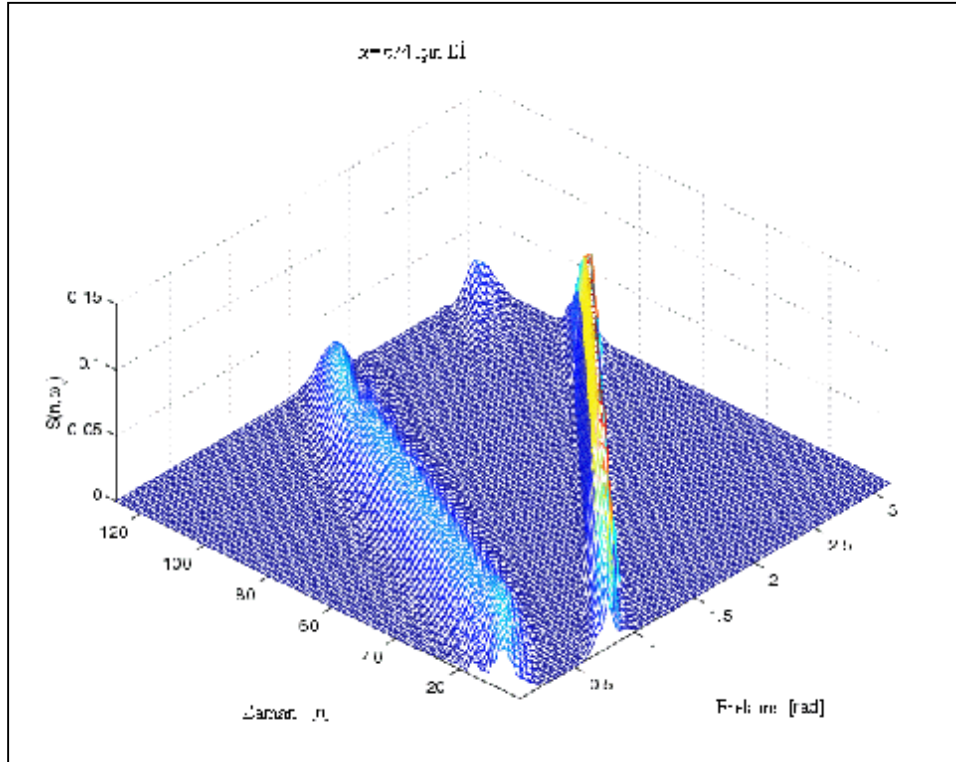
Şekil 3.45 $\alpha=-\pi/4$, $n=32,64,96$ için $p(n,l)$ pencereleri



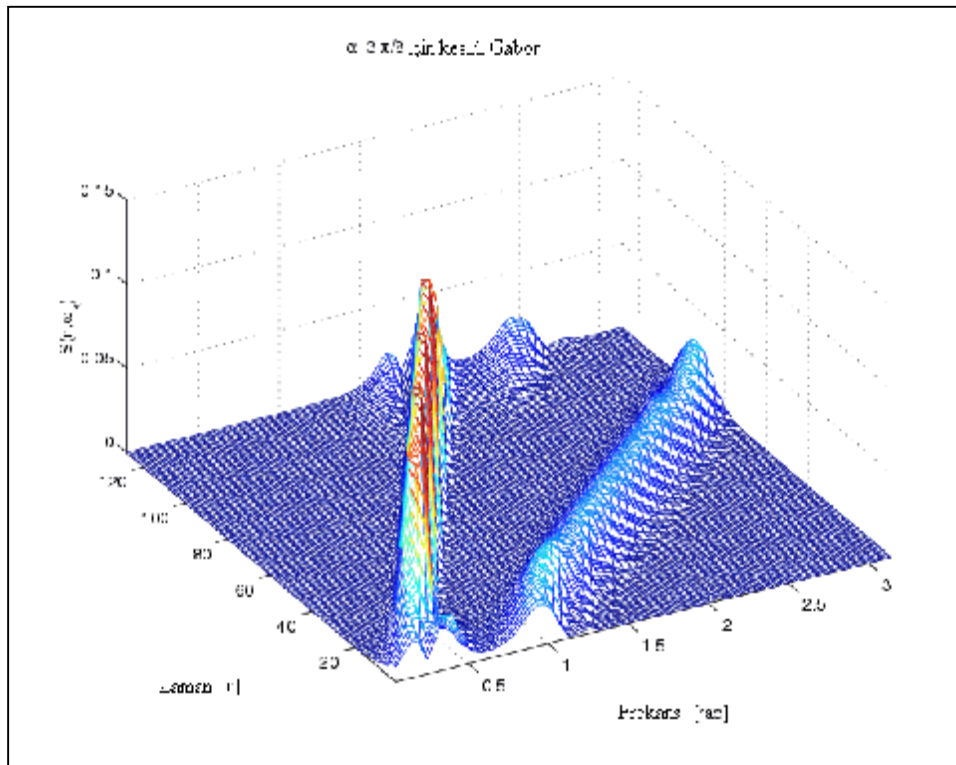
Şekil 3.46 $\alpha = -\pi/4$, $n=32,64,96$ için $p(n,l)$ ZF izgesi

Örnek 6: Farklı açılara sahip ($\pi/4$ ve $3\pi/8$) iki çırp bileşenden oluşan bir işarete, kesirli evrimsel izge analizi uygulanmıştır. Öncelikle bu işaret $\alpha=\pi/4$, $L=4$, $K=128$, $I=4$ ile analiz edilmiş ve evrimsel izge kestirimi Şekil 3.47’de verilmiştir. Daha sonra aynı işaret $\alpha=3\pi/4$, ve $L=4$, $K=128$, $I=4$ ile analiz edilmiş ve evrimsel izge kestirimi Şekil 3.48’de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi α kesir derecesi ile uyumlu olan bileşen yüksek ZF çözünürlüğü ile temsil edilebilmiştir. Ayrıca enerjisi normalize edilmiş $p(n,l)$ penceresi kullanılarak elde edilen kesirli evrimsel izge, işaretin toplam enerjisini de korumaktadır. Tabi ki, verilen herhangi bir işaret için optimum analiz kesir derecelerinin bulunması önemli bir problemdir. Elde edilen sonuçların diğer yöntemlerle karşılaştırılması amacıyla bu işaret çok pencereli sinüsoidal evrimsel izge yöntemi ile analiz edilerek izge kestirimi Şekil 3.49’da verilmiştir. Görüldüğü gibi bu durumda her iki bileşen de daha yetersiz ZF çözünürlüğü ile temsil edilmiştir. Çünkü bu durumda kullanılan dikdörtgen ZF örnekleme kafesi incelenen işaret için uygun değildir.

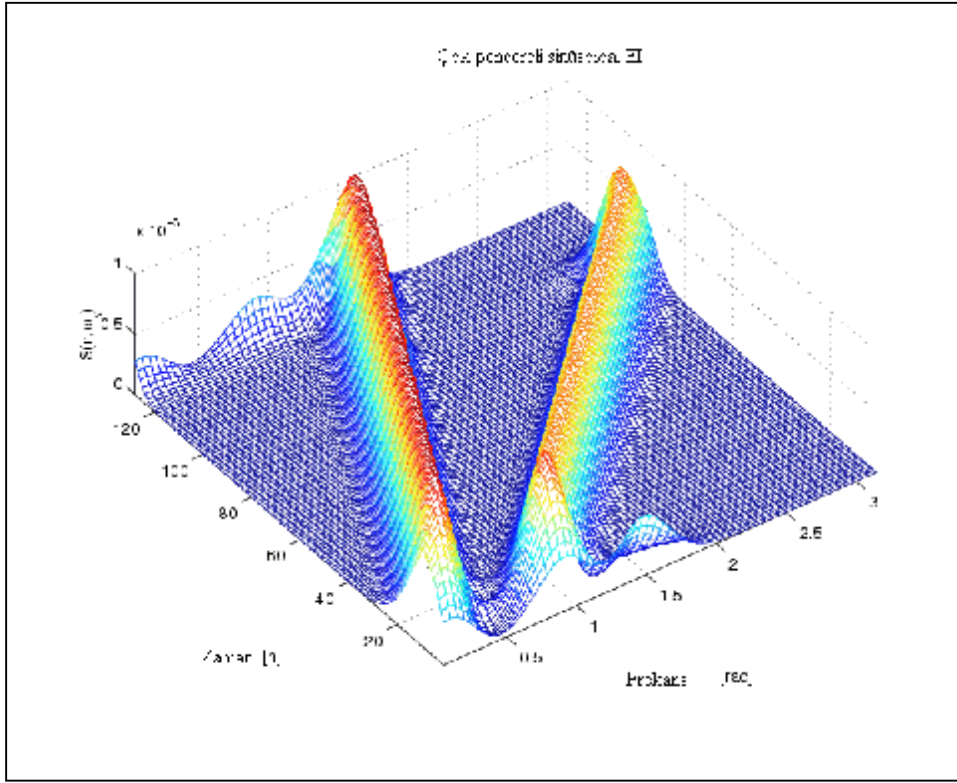
Diğer bir yöntem olarak ZF analiz literatüründe önemli bir yer tutan zaman frekans dağılımlarından Wigner-Ville Dağılımı ele alınmıştır. İki bileşenli $x(n)$ işaretinin Wigner-Ville Dağılımı Şekil-3.50’de gösterilmiştir. Bu dağılım her iki bileşeni yüksek çözünürlük ile göstermekte olup, negatif değerler alması ve bileşenler arasındaki çapraz terimler nedeni ile enerji dağılımı olarak yorumlanması oldukça güçtür.



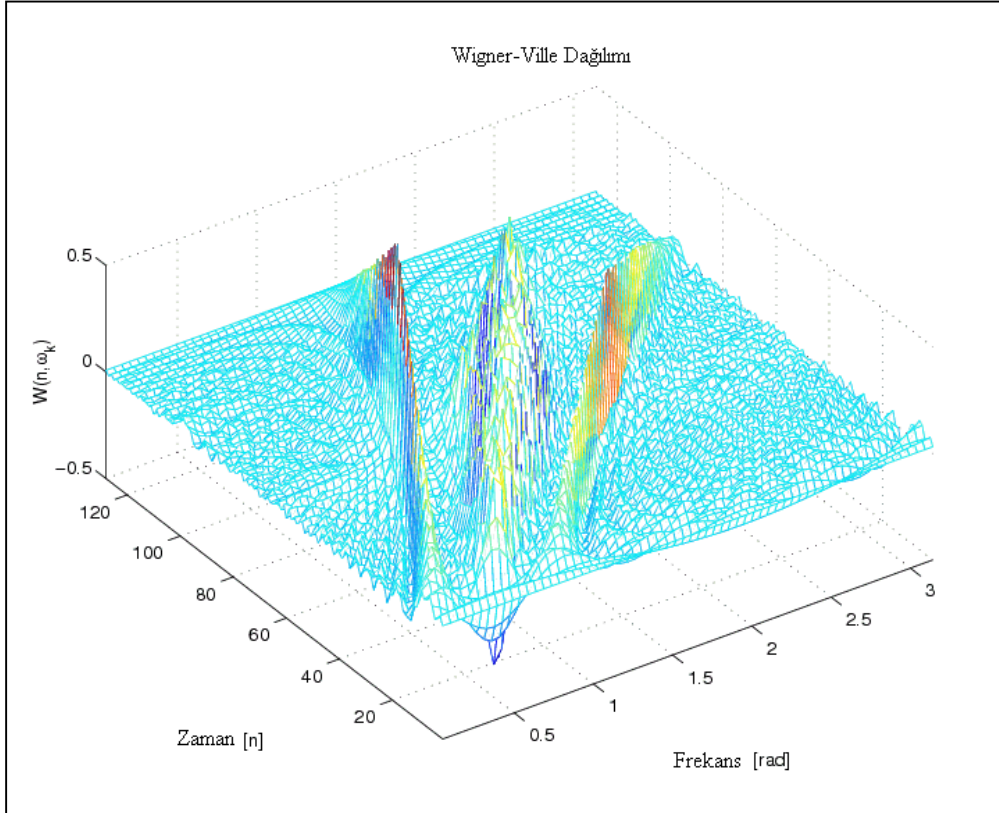
Şekil 3.47 $\alpha = \pi/4$, $L=4$, $K=128$, $I=4$ ile analiz edilmiş, Eİ kestirimi



Şekil 3.48 $\alpha = 3\pi/4$, $L=4$, $K=128$, $I=4$ ile analiz edilmiş, Eİ kestirimi



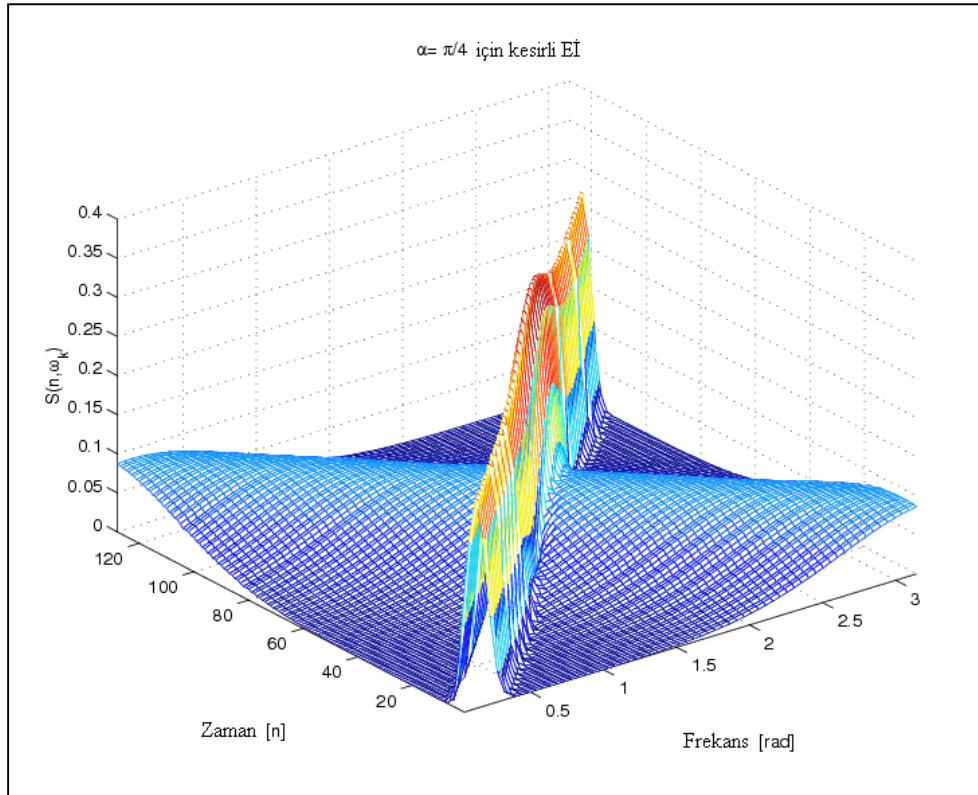
Şekil 3.49 Çok pencereli sinüsoidal Eİ ile analiz edilerek izge kestirimi



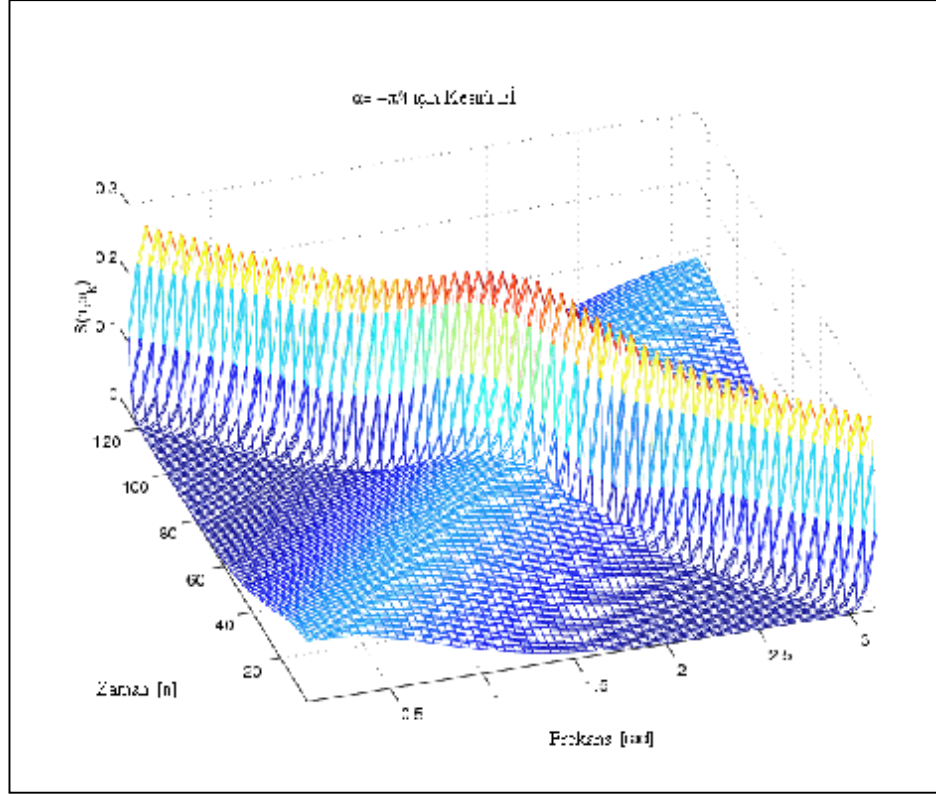
Şekil 3.50 Aynı işaretin Wigner-Ville dağılımı

Örnek 7: Bu örnekte ise birçok analiz yöntemi için imkansız derecede zor olan çok geniş bantlı, kesişen iki çarp bileşenden ($\pi/4$ ve $-\alpha=\pi/4$ açılı) oluşan işaret ele alınmaktadır. Zaman eksenine biri $\pi/4$ diğeri ise $\alpha=-\pi/4$ radyan açı yapan iki çarpın birleşiminden oluşan bir işareti göz önüne alalım. Kesirli Evrimsel İzge yöntemi ile bu işaret, iki ayrı kesir derecesinde analize tabi tutulmuştur. Şekil 3.51’de $\alpha=\pi/4$, $L=2$, $K=128$, $I=3$ kullanılarak yapılan kesirli Evrimsel İzge kestirimi, ZF düzleminde analiz yönteminin yaptığı dönme etkisi yok edildikten sonra verilmektedir. Ayrıca işaretin Eİ’si $\alpha=-\pi/4$ ile de hesaplanmış ve Şekil3.52’de gösterilmiştir.

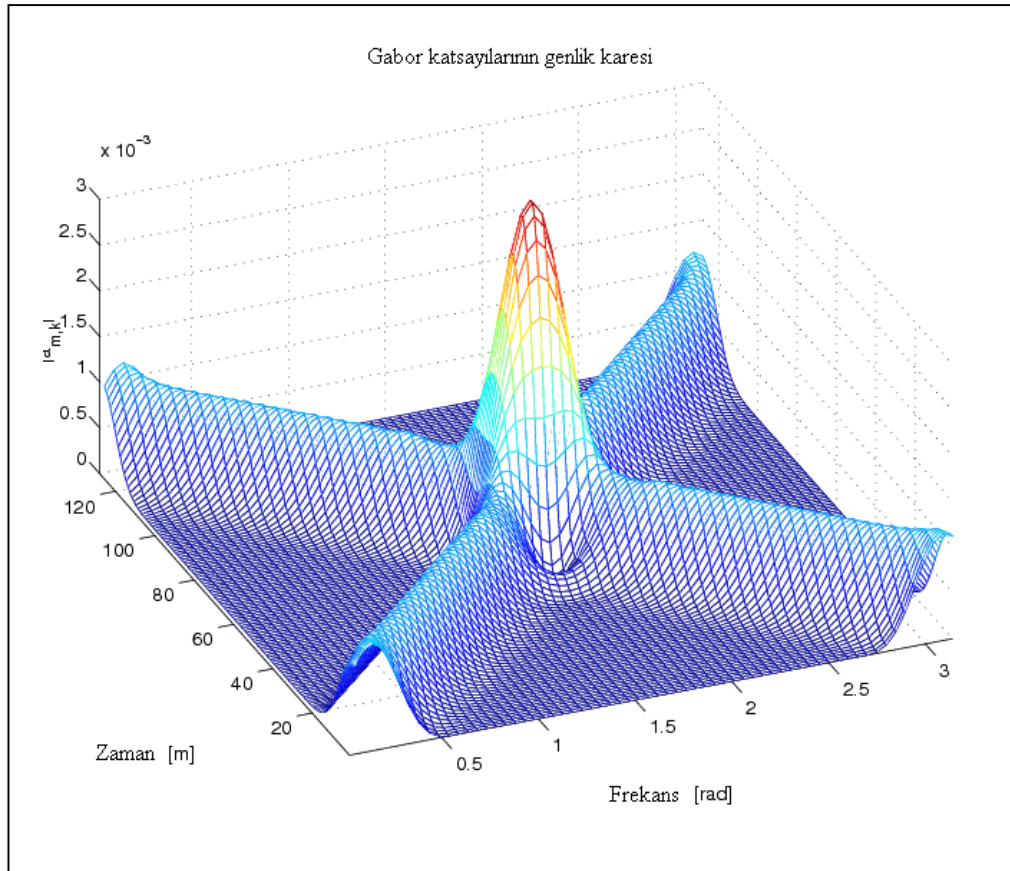
Elde edilen sonuçların mevcut bir yöntemle karşılaştırılması amacıyla bu işaret çok pencereli sinüsoidal evrimsel izge yöntemi ile analiz edilerek izge kestirimi Şekil 3.53’de verilmiştir. Görüldüğü gibi bu durumda her iki bileşen de daha yetersiz ZF çözünürlüğü ile temsil edilmiştir.



Şekil 3.51 $\alpha=\pi/4$, $L=2$, $K=128$, $I=3$ için kesirli Eİ kestirimi



Şekil 3.52 $\alpha = -\pi/4$ ile de hesaplanmış Eİ

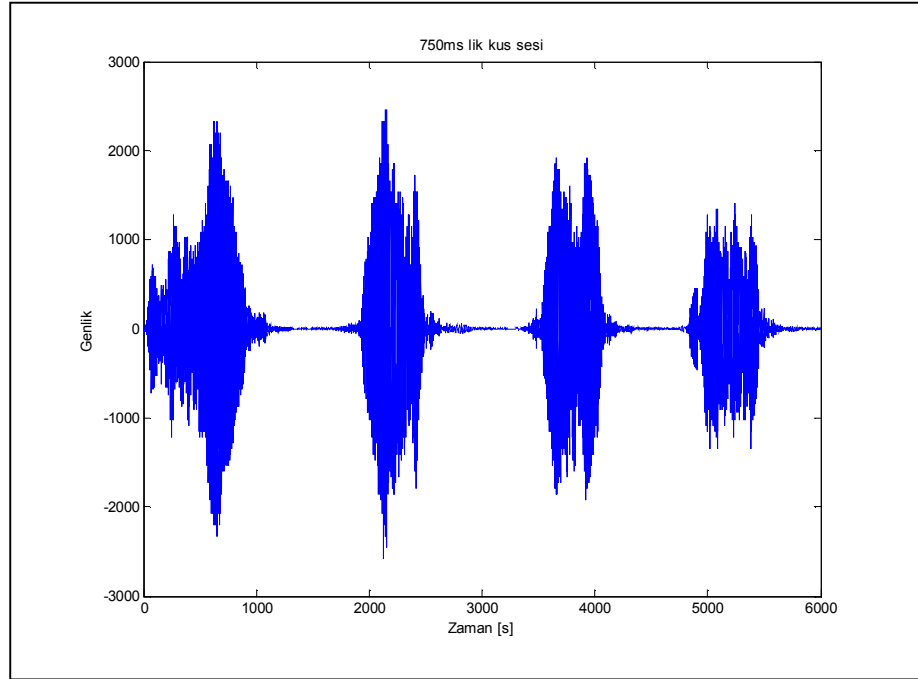


Şekil 3.53 İşaretin Gabor katsayılarının genlik karesi

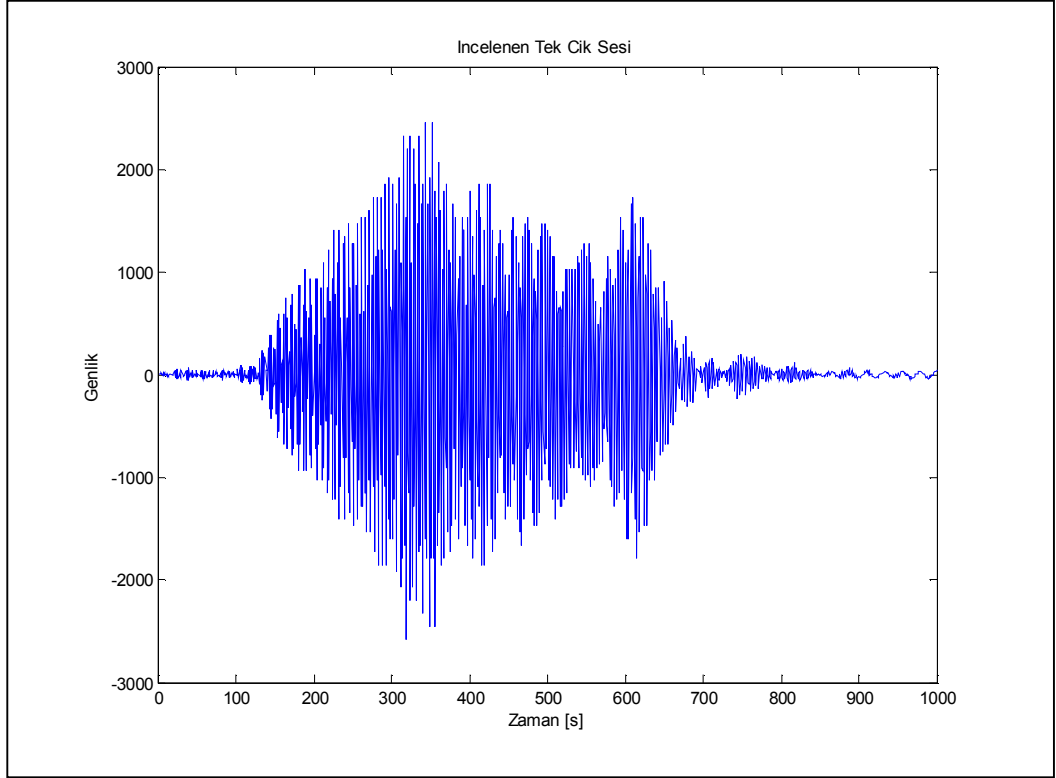
Örnek 8: Bu örnekte Şekil 3.54'de görülen, 8 kHz ile örneklenmiş, 0.75 s uzunluğunda bir kuş sesi ele alınmaktadır. Bu işaretin Şekil 3.55'de verilen 125 ms'lik kısmı ele alınmakta ve evrimsel izge analizi uygulanmaktadır. Öncelikle, sinüsoidal Gabor analizine dayanan evrimsel izge elde edilmiş ve Şekil 3.56'da verilmiştir. Görüldüğü gibi, kuş sesinin doğrusal frekans değişimi elde edilmiş, ancak yüksek bir zaman frekans yerleşmesi sağlanamamıştır. Daha sonra aynı işarete, $\alpha=\pi/6$ kesir derecesi ile Kesirli Evrimsel İzge analizi uygulanmış ve sonuç Şekil 3.57'de kesirli düzlemde ve Şekil 3.58'de döndürme etkisi kompanze edildikten sonra zaman frekans düzleminde gösterilmiştir.

Sonuç olarak kesirli evrimsel izge analizi ile, aynı işaret çok daha iyi bir zaman frekans çözünürlüğü ile elde edilebilmiştir. Ancak bu kuş sesinin zaman frekans davranışı hakkında hiçbir ön bilgi olmadan, $\alpha=\pi/6$ kesir derecesinin tahmin edilmesi mümkün değildir. Dolayısı ile en uygun kesir derecesinin elde edilmesi, yüksek zaman frekans çözünürlüğüne sahip izgeler elde edebilmek için en önemli parametre olmaktadır.

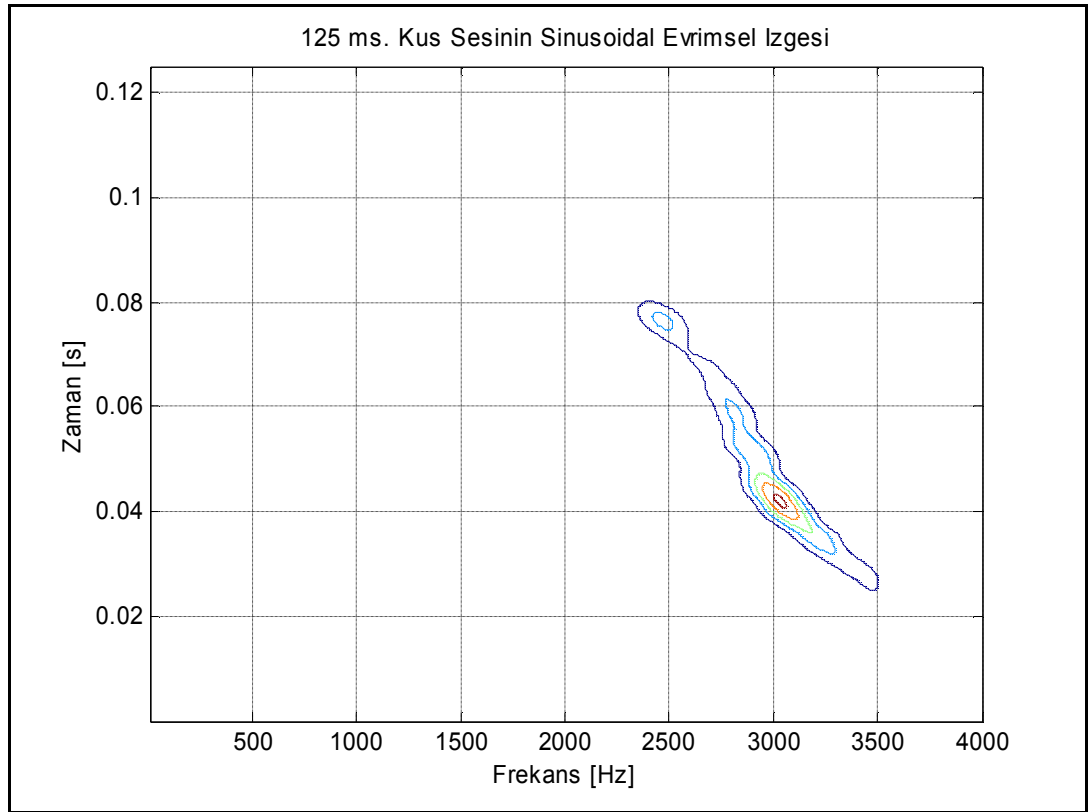
Bir sonraki bölümde, özellikle çok bileşenli işaretlerin analizinde, en uygun kesir derecesinin elde edilmesi için sinyal uyumlu bir en iyileştirme algoritması sunulmaktadır.



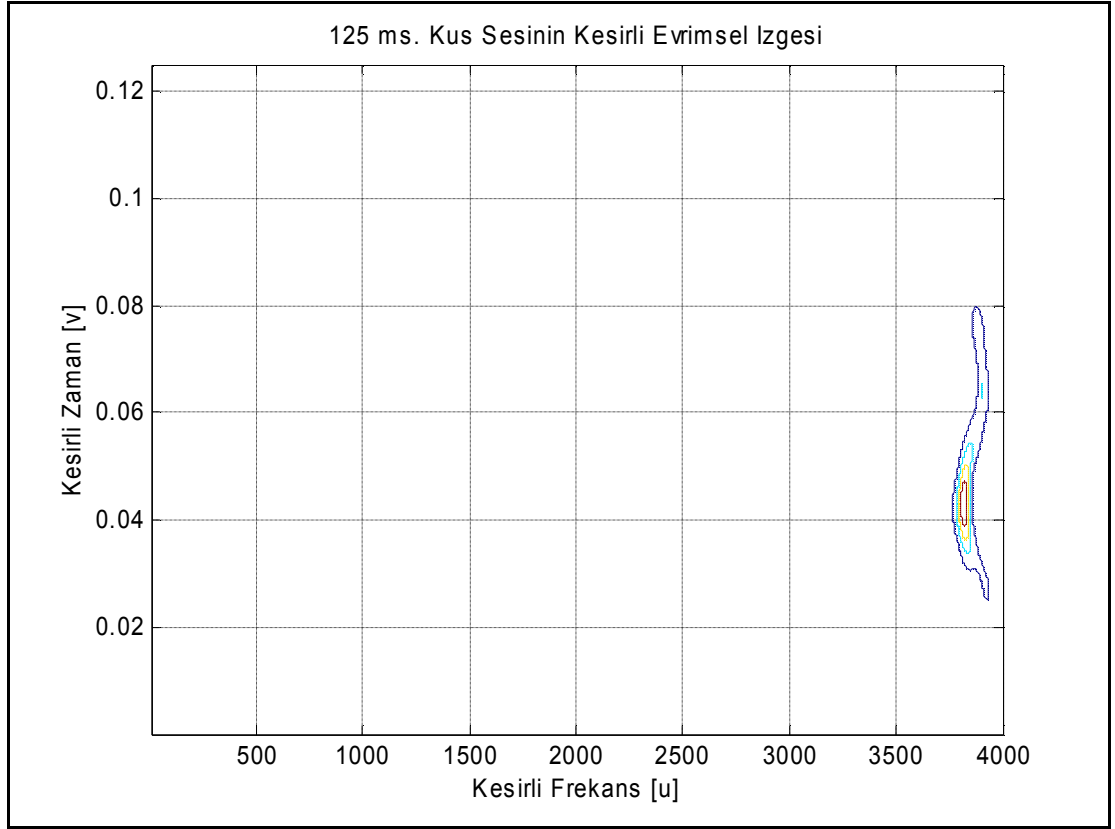
Şekil 3.54 600ms'lik kuş sesi



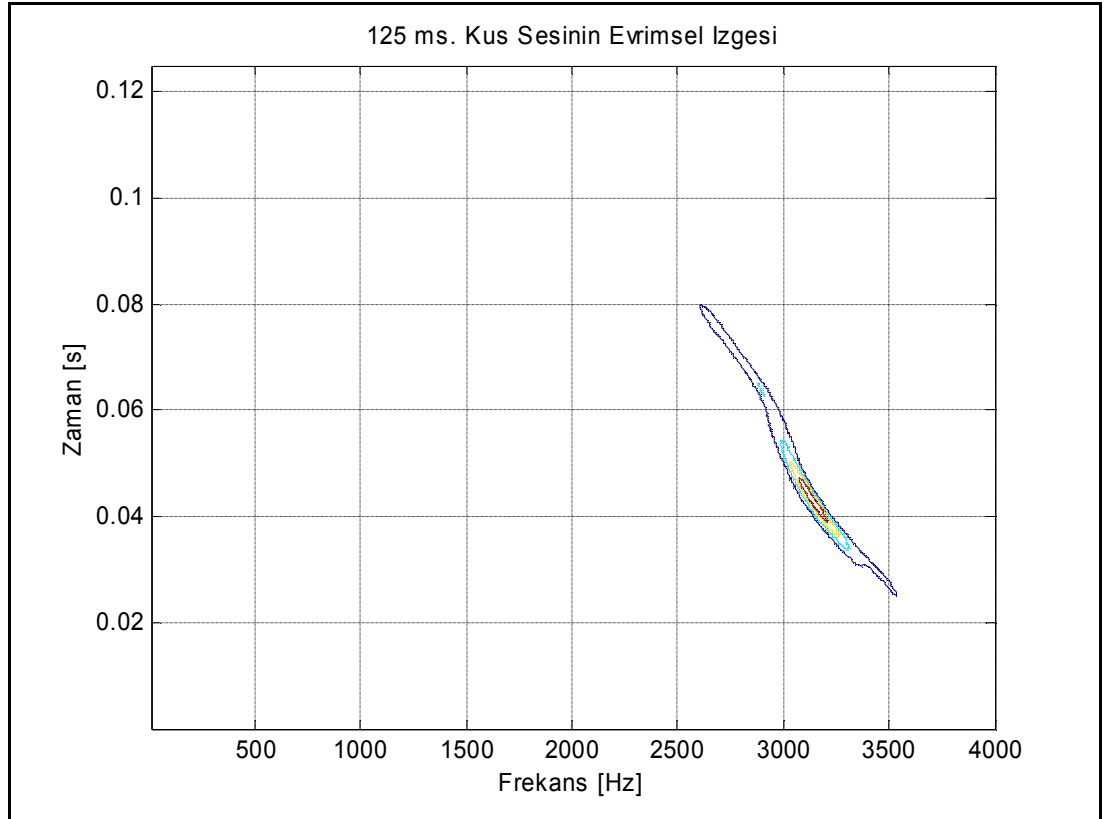
Şekil 3.55 125ms'lik kuş sesi



Şekil 3.56 125ms'lik işaretin klasik gabor ile elde edilen Evrimsel izgesi



Şekil 3.57 125ms'lik kuş sesinin Kesirli Fourier $\alpha=\pi/6$ ile yapılmış Evrimsel izgesi



Şekil 3.58 125ms'lik kuş sesinin döndürme etkisi yok edildikten sonraki Evrimsel izgesi

3.4.3. En Uygun Kesir Derecesinin Bulunması İçin En İyileştirme Yöntemi

Benzetim sonuçlarından görüldüğü gibi, verilen herhangi bir çok bileşenli işaretin tüm bileşenlerinin yüksek bir çözünürlük ile gösterilebilmesi için en uygun analiz kesir derecesinin seçilmesi gerekmektedir. Ayrıca işaret bileşenlerinin zaman frekans düzlemindeki desteği ve davranışına göre uygun kesir derecesi değişmektedir. Dolayısı ile bu bölümde, verilen bir işaretin tüm bileşenlerinin yüksek çözünürlük ile zaman frekans düzleminde gösterimini elde edebilmek için, en uygun kesir derecelerinin bir en iyileştirme yöntemi ile elde edilmesi sunulmaktadır.

Kullanılan en iyileştirme kriteri, yerel zaman frekans bölgeleri içinde işaretin enerji yerelleşmesinin en büyük yapılmasıdır. Buna göre, işaretin çok çeşitli kesir dereceleri ve pencere ölçekleri ile analiz edilmesinden sonra, enerji yerelleşme ölçütünü en büyük yapan Gabor katsayılarını seçerek optimum bir çözünürlük elde edebiliriz. En yüksek zaman frekans çözünürlüğü arzu edilen bir özelliktir, çünkü enerjiyi yerel olarak en büyültmek, izgeyi oluşturan frekans bileşenlerinin bir birlerini daha az girişim yapması demektir.

Tek bileşenden oluşan işaretler için birçok zaman frekans yerelleşme ölçütü vardır [39,96,97]. Bununla beraber, bizim birden fazla bileşenden oluşan işaretler için bir derişim ölçütü bulmamız gerekmektedir ki, içinde tek bir bileşen bulunabilecek kadar küçük zaman frekans bölgeleri içinde en yüksek yerelleşmeyi sağlayalım. Jones ve Parks [96] kısa zamanlı Fourier dönüşümünde, izge çözünürlüğünü en yüksek yapan Gauss penceresi parametresini bulmak için bir yerelleşme ölçütü kullanmışlardır. Enerji yerelleşme ölçütü [96] de verilmiştir ve izgenin L_4 normunun, L_2 normunun karesine oranıdır. Bu ölçüt istatistikte kullanılan “kurtosis” ve diğer keskinlik, yoğunluk gibi derişim ölçütlerine benzerdir [96].

Burada sunulacak yöntem, küçük zaman frekans bölgelerinde işaretin her bir bileşeninin en yüksek yerelleşmeye sahip olduğu kesir derecesini verecektir. İşaretin yüksek çözünürlüklü Evrimsel izgesini ve zaman frekans gösterimini elde etmek için bu yöntem, kesirli Gabor katsayılarına uygulanmaktadır. Amaç, S_xQ boyutlu zaman frekans bölgeleri içinde ölçütü en büyütecek kesri derecesi ve ölçek parametresini tespit

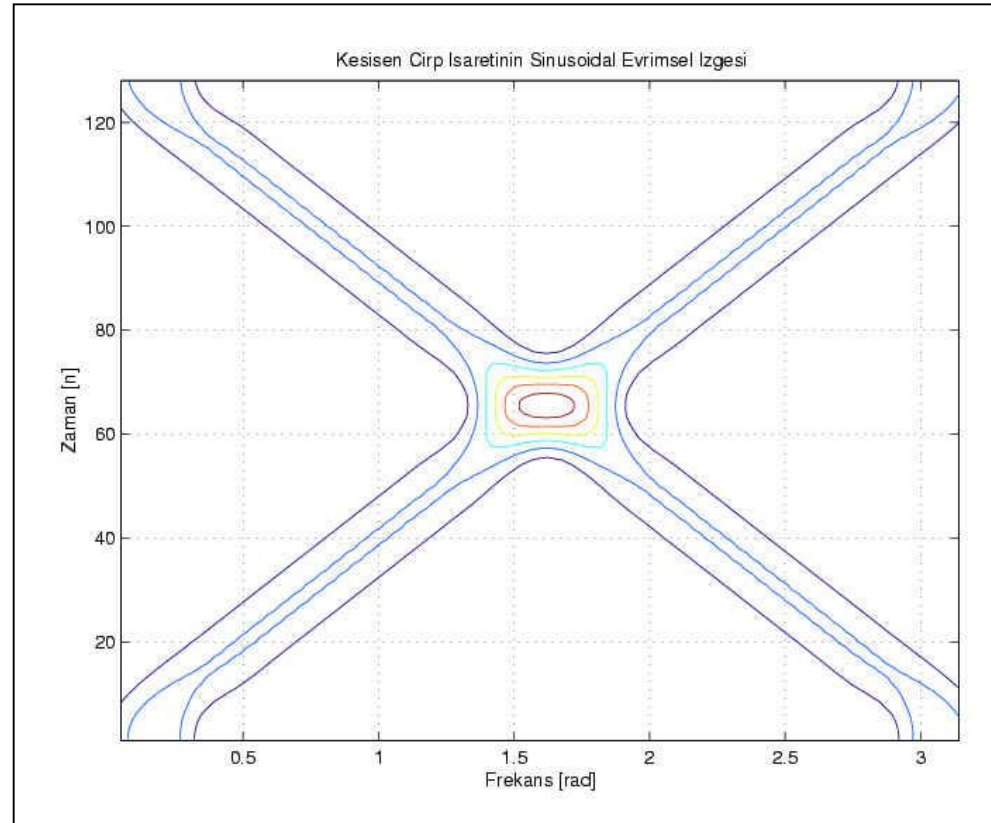
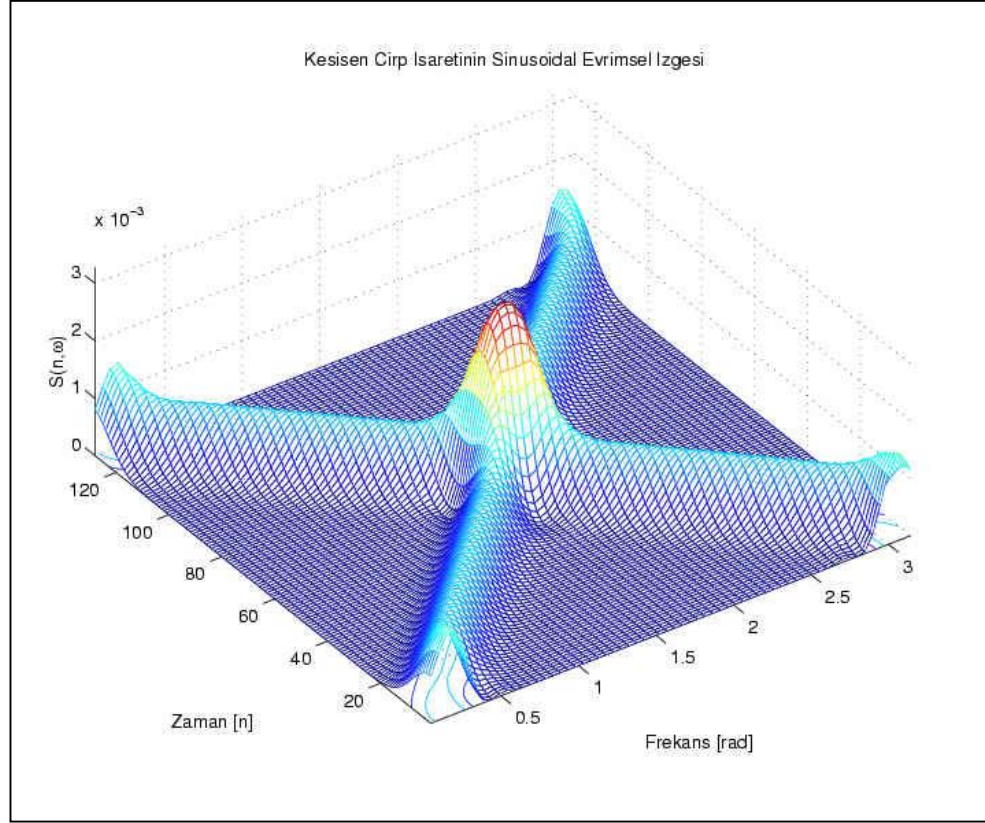
etmekdir. Bu yüzden I ölçek ile ve P kesir derecesi ile elde edilen kesirli Gabor katsayıları için aşağıdaki ölçüt uygulanacaktır:

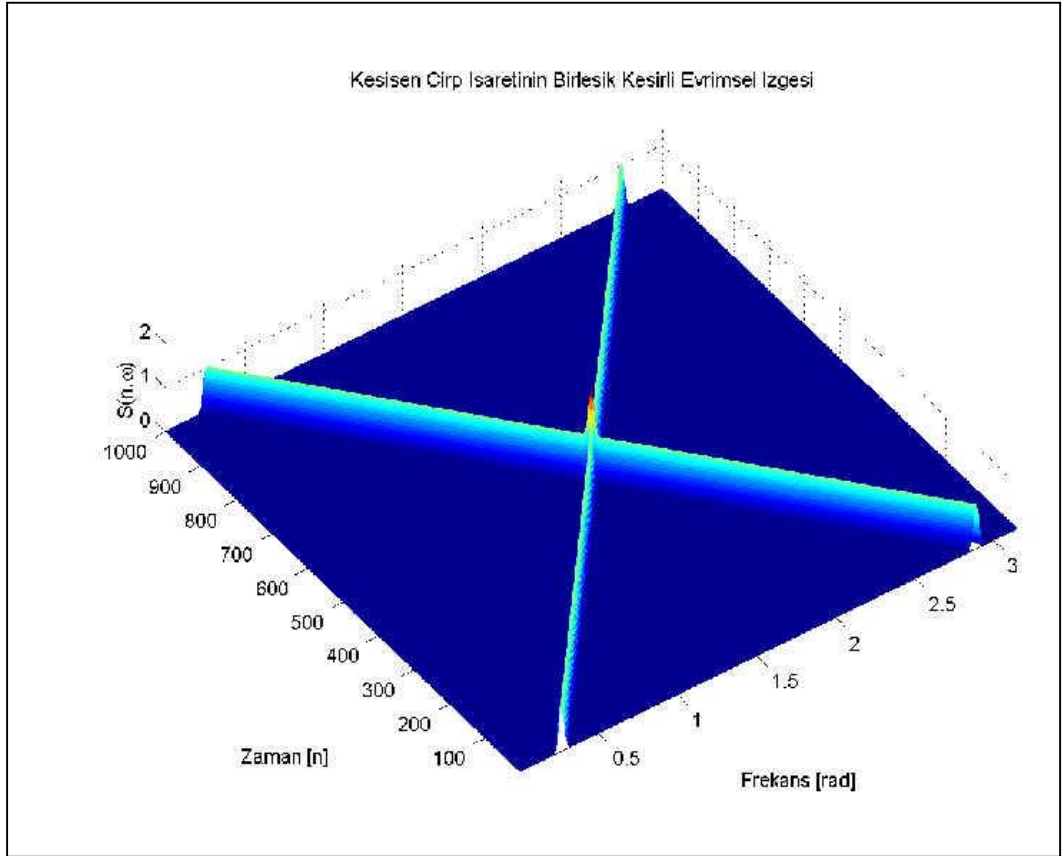
$$E_{i,p}(m,k) = \frac{\sum_{s=-S/2}^{S/2-1} \sum_{q=-Q/2}^{Q/2-1} \left| \Gamma_{i,p}^2(s-mL, q-k) a_{i,m,k}^{\alpha_p} \right|^4}{\left(\sum_{s=-S/2}^{S/2-1} \sum_{q=-Q/2}^{Q/2-1} \left| \Gamma_{i,p}^2(s-mL, q-k) a_{i,m,k}^{\alpha_p} \right|^4 \right)^2}$$

$\{2^i \mid 0 \leq i \leq I-1\}$ adet pencere ölçeği ve $\{\alpha_p, 0 \leq p \leq P-1\}$ kesir derecesi için Gabor katsayıları hesaplanır. Yukarıdaki ifadede $\Gamma(\cdot)$ zaman frekans yerleştirme penceresi Gabor katsayıları $a_{i,m,k}^{\alpha_p}$ 'nin hesaplanmasında kullanılan analiz penceresi olan $\gamma(\cdot)$ 'in spektrogramıdır. Zaman adımı S ve frekans adımı Q, $\Gamma(\cdot)$ 'in zaman frekans desteğinden tespit edilir. Bu iki boyutlu pencere, merkezi olan (n,k) noktasında en geniştir ve her yönde düzgün olarak azalır. Bu da, yerelleşme ölçütüne sadece komşu Gabor katsayılarının etki ettiğini gösterir.

Bu en iyileştirme yöntemi, çok sayıda ölçek ve kesir derecesi ile elde edilen sonuçlar arasından aramaya dayanmakta olup büyük bir hesaplama yükü getirmektedir. Fakat işaret hakkında hiçbir ön bilgiye sahip olmadığımız durumlarda uygulanması mümkün olmaktadır.

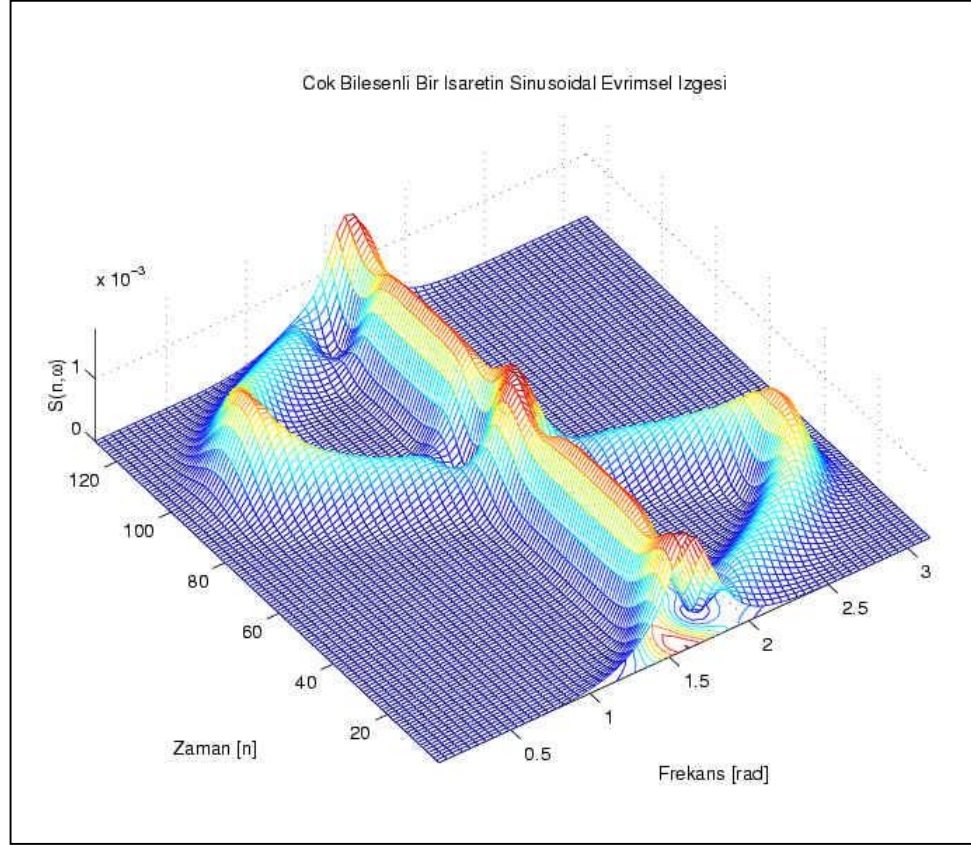
Örnek 9: Bu örnekte kesişen iki çarp işaretinin birleşiminden oluşan işaretin önce sinüsoidal Evrimsel İzgesi elde edilmiş Şekil 3.59 ve Şekil 3.60'da verilmiştir. Daha sonra bu işaret 20 farklı kesir derecesi ile analiz edilmiş ve sonuçlar, enerji yerelleşme ölçütü en iyileştirilerek birleştirilmiş, optimum kesirli Evrimsel İzge elde edilmiştir. Şekil 3.61 optimum Evrimsel İzgeyi göstermektedir.



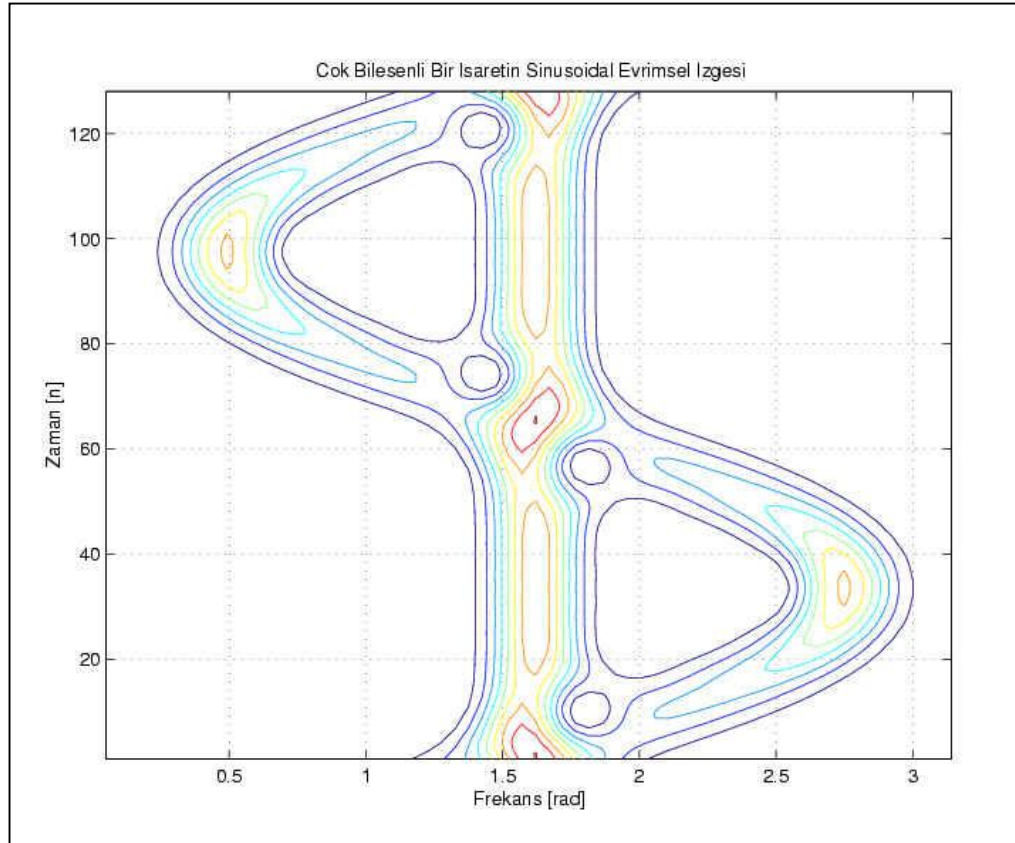


Şekil 3.61 İşarein optimum Evrimsel İzgesi

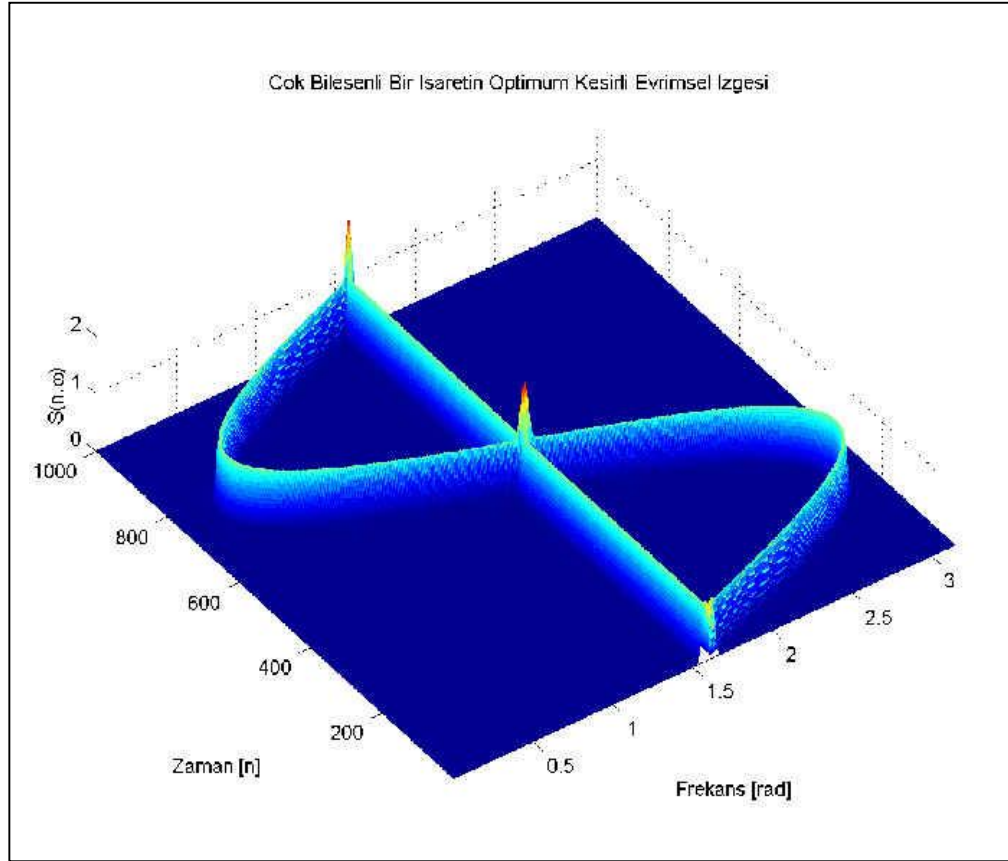
Örnek 10: Bu örnekte sinüsoidal FM ile $\pi/2$ frekanslı bir sinüsoidalın birleşiminden oluşan işaretin öncelikle sinüsoidal Evrimsel İzgesi elde edilmiş ve Şekil 3.62 ve Şekil 3.63'de verilmiştir. Daha sonra aynı işaret $\alpha=\pi/36$ rad. aralıklar ile analiz edilerek, yerel enerji yoğunlaşma ölçütü en iyileştirilerek analiz sonuçları birleştirilmiş ve Şekil 3.64'de görülen optimum kesirli Evrimsel İzge elde edilmiştir.



Şekil 3.62 Bir sinüsoidal FM ile $\omega_0 = \pi/2$ frekanslı bir sinüsoidalın Eİ'si

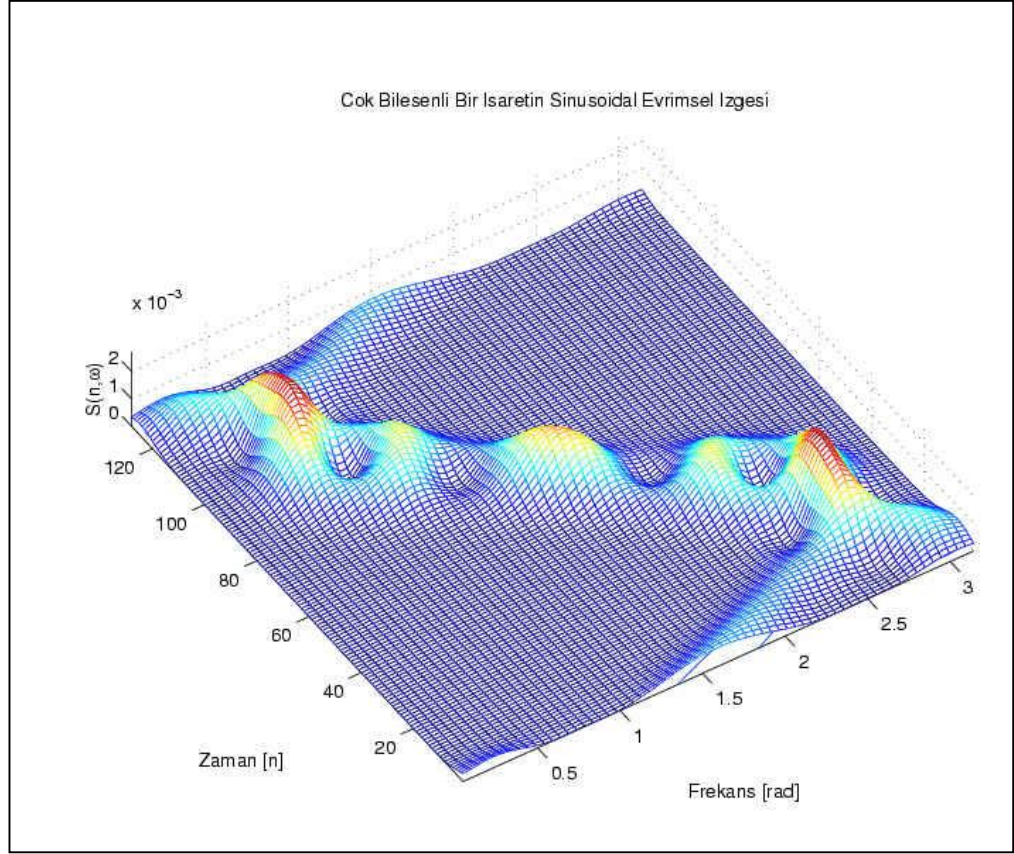


Şekil 3.63 Bir sinüsoidal FM ile $\omega_0 = \pi/2$ frekanslı bir sinüsoidalın Eİ'si

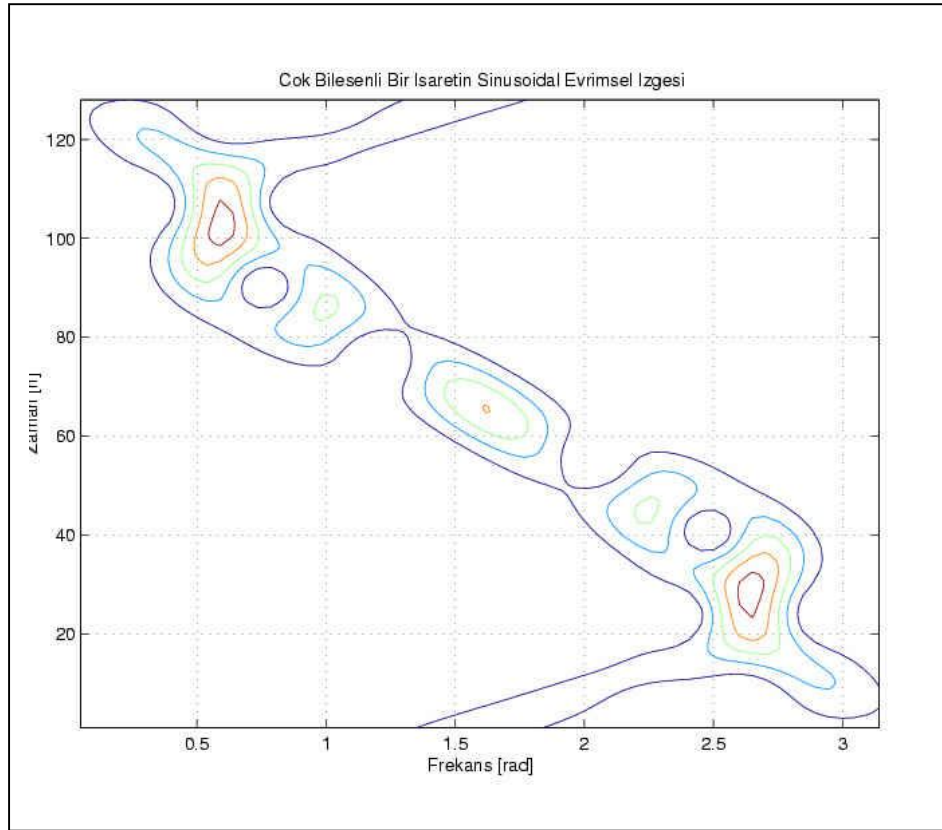


Şekil 3.64 İncelenen işaretin optimum Evrimsel İzge'si

Örnek 11: Bu örnekte ise sinüsoidal FM ile doğrusal bir çarpın birleşimi olan işaret ele alınmaktadır. Bu işaretin sinüsoidal Evrimsel İzgesi hesaplanmış ve Şekil 3.65 ve Şekil 3.66'da verilmiştir. Daha sonra işaret $[0-\pi]$ arasında 36 farklı kesir derecesi ile analiz edildikten sonra enerji yerelleşme algoritması ile seçilen kısımların birleşiminden oluşan optimum kesirli Evrimsel İzge elde edilmiş ve Şekil 3.67'de verilmiştir.

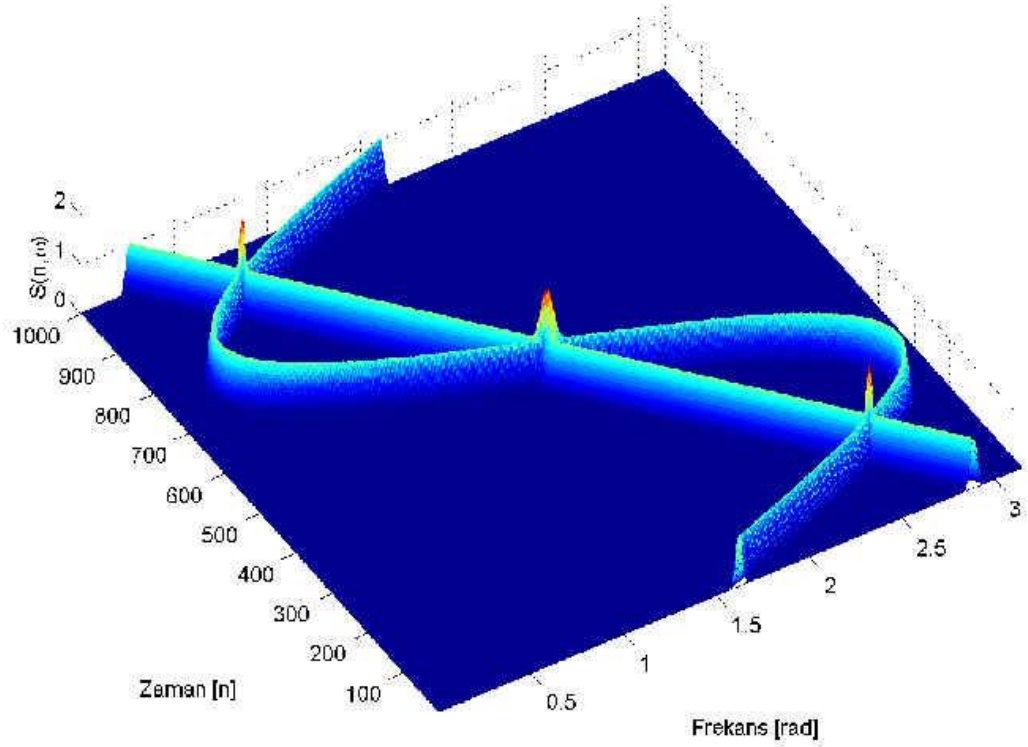


Şekil 3.65 Bir sinüsoidal FM ile doğrusal çarp'dan oluşan işaretin sinüsoidalın Eİ'si



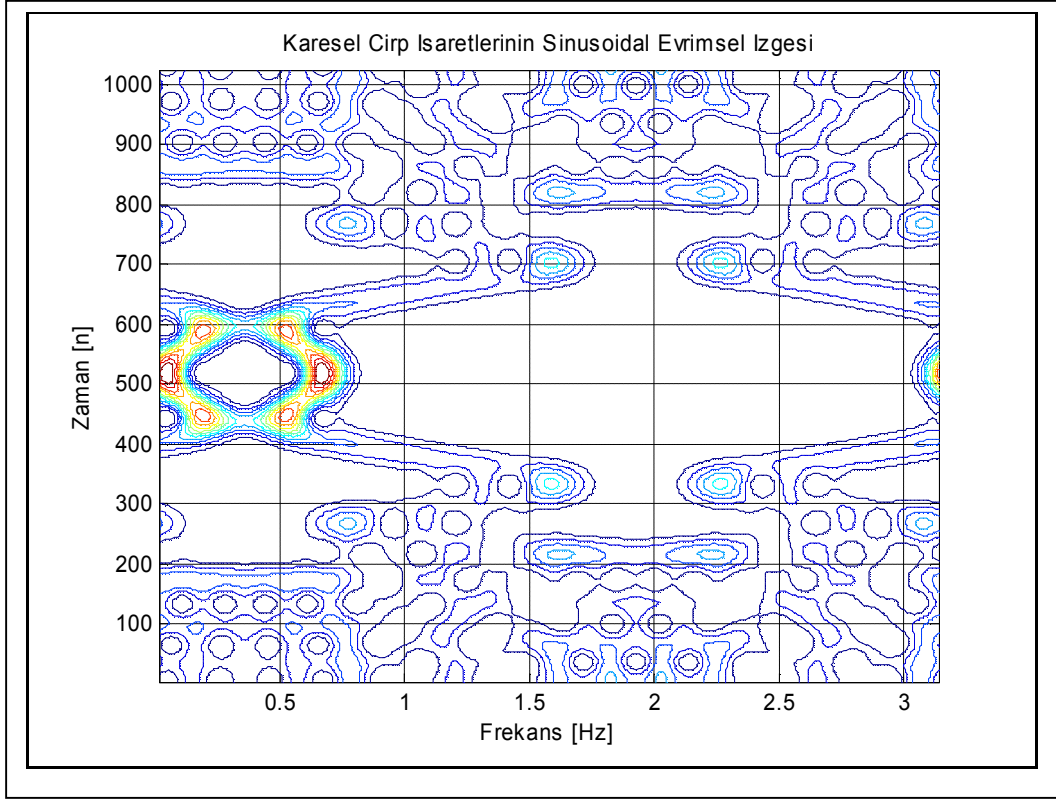
Şekil 3.66 Bir sinüsoidal FM ile doğrusal çarp'dan oluşan işaretin sinüsoidalın Eİ'si

Cok Bilesenli Bir Isaretin Optimum Kesirli Evrimsel Izgesi

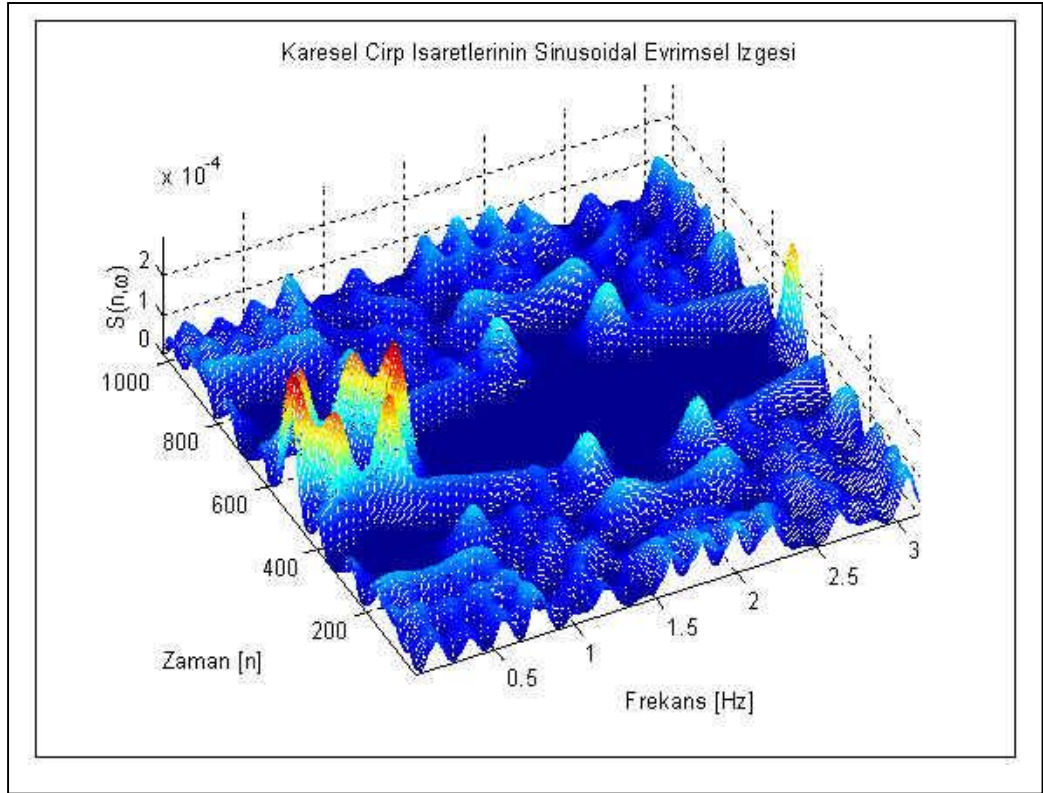


Şekil 3.67 İncelenen işaretin optimum Evrimsel İzge'si

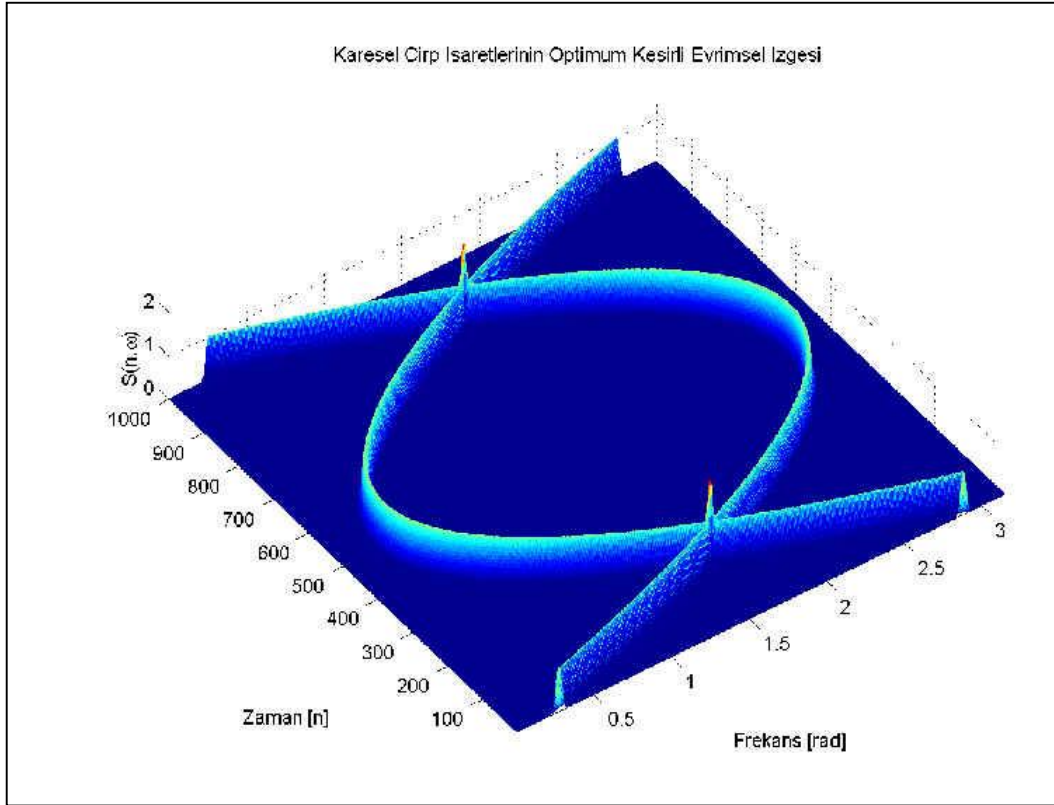
Örnek 12: Bu örnekte ise iki adet karesel çarp işaretinin birleşiminden oluşan işaretin önce sinüsoidal Evrimsel İzgesi elde edilmiş ve Şekil 3.68 ve Şekil 3.69'da verilmiştir. Daha sonra aynı işaret yine 36 kesir derecesi ile analiz edilerek, lokal enerji yerelleştirme ölçütü en iyileştirilerek analiz sonuçları birleştirilmiş ve optimum kesirli Evrimsel İzge elde edilmiştir. Şekil 3.70 optimum evrimsel izgeyi göstermektedir.



Şekil 3.68 İncelenen işaretin sinusoidal Evrimsel İzge'si

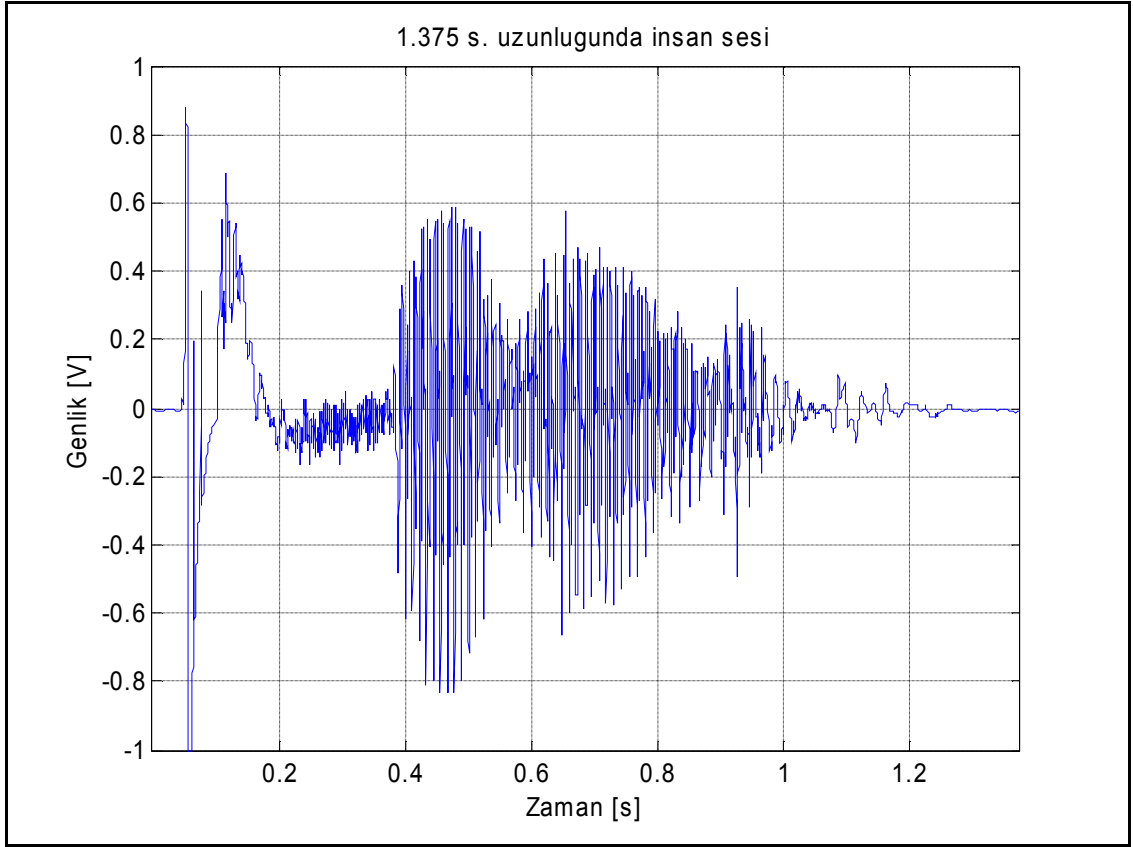


Şekil 3.69 İki karesel çırpın birleşiminden oluşan işaretin sinusoidal Evrimsel İzge'si

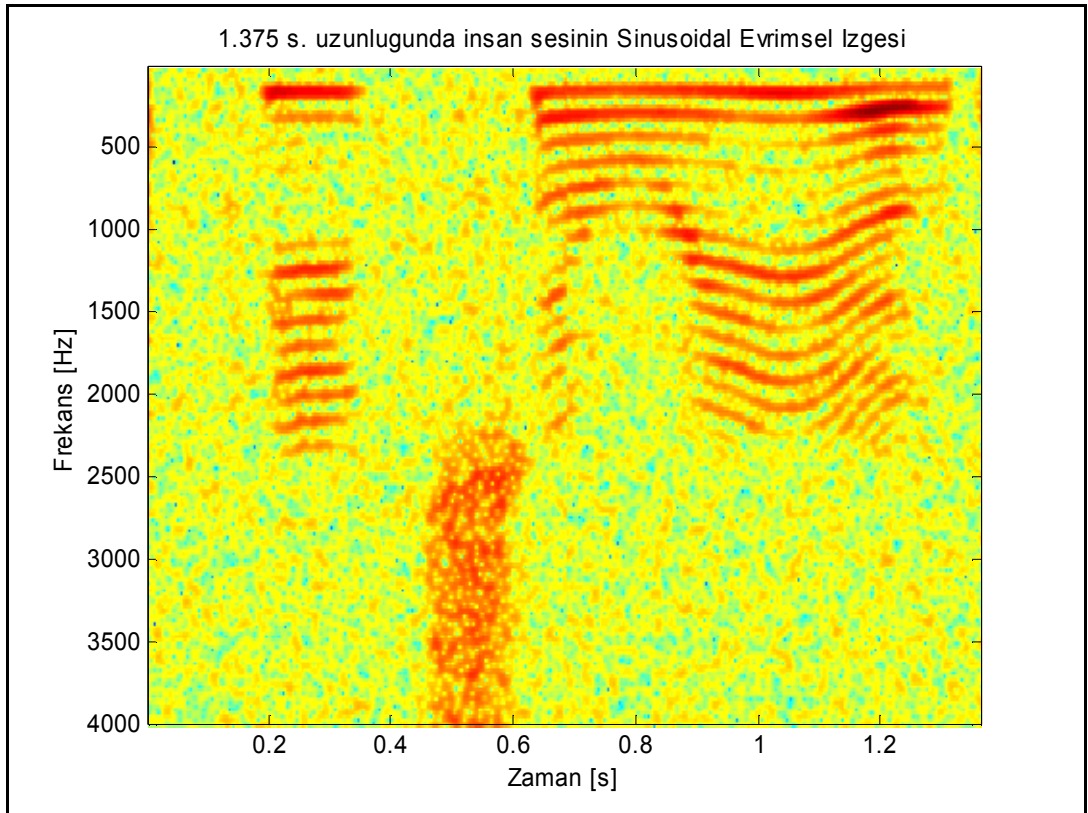


Şekil 3.70 İki karesel çırpın birleşiminden oluşan işaretin optimum Evrimsel İzge'si

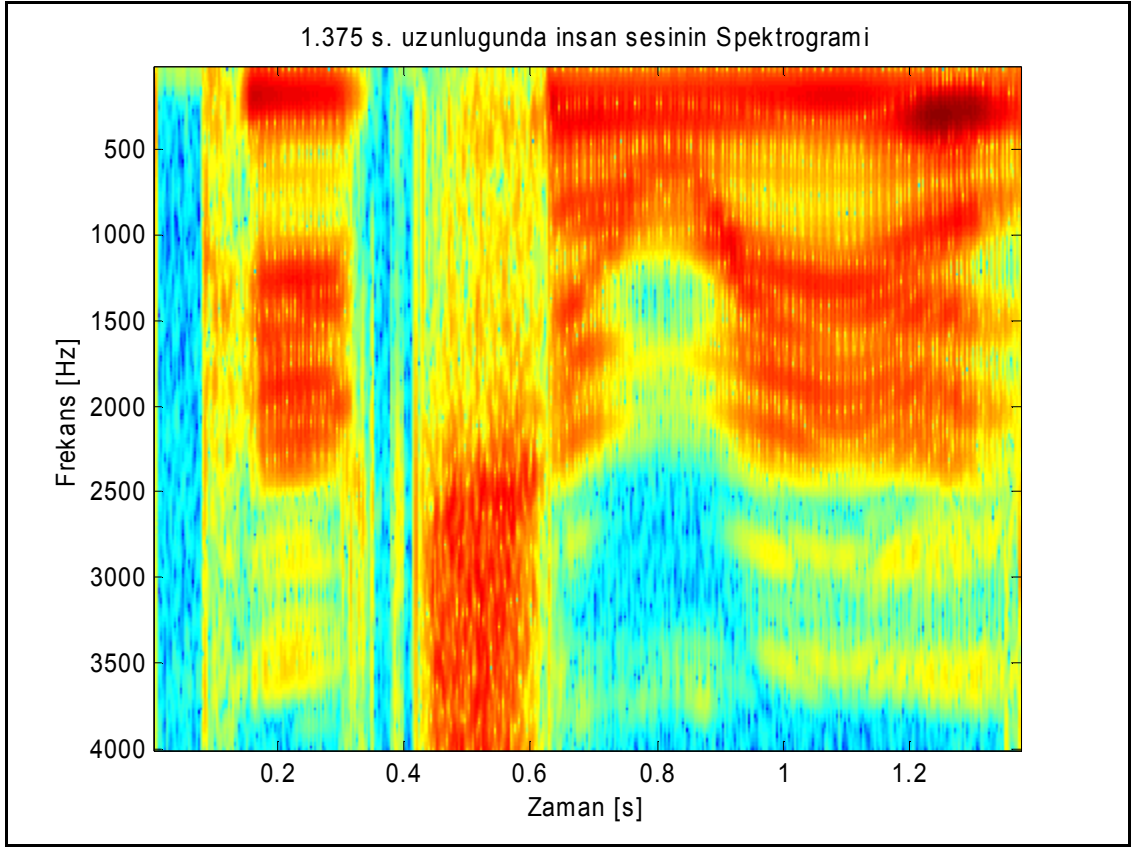
Örnek 13: Bu örnekte yine 8 kHz. ile örneklenmiş, 1.375 s uzunluğunda ve Şekil 3.71'de görülen insan sesi örneği analiz edilmektedir (pizzeria kelimesi). Şekil 3.72'de bu ses işaretinin sinüsoidal evrimsel izgesi, ve Şekil 3.73'de Spektrogramı verilmektedir. Görüldüğü gibi bu yöntemler kullanılarak işaret bileşenleri, yüksek zaman frekans çözünürlüğü ile elde edilememiştir. Daha sonra bu ses işareti, kesirli Gabor analizi ile $\alpha=\pi/2$, $\pi/4$ ve $-\pi/4$ kesir dereceleri ile incelenmiş ve en uygun katsayılar birleştirilerek evrimsel izge Şekil 3.74'de görüldüğü gibi yüksek bir çözünürlük ile elde edilmiştir.



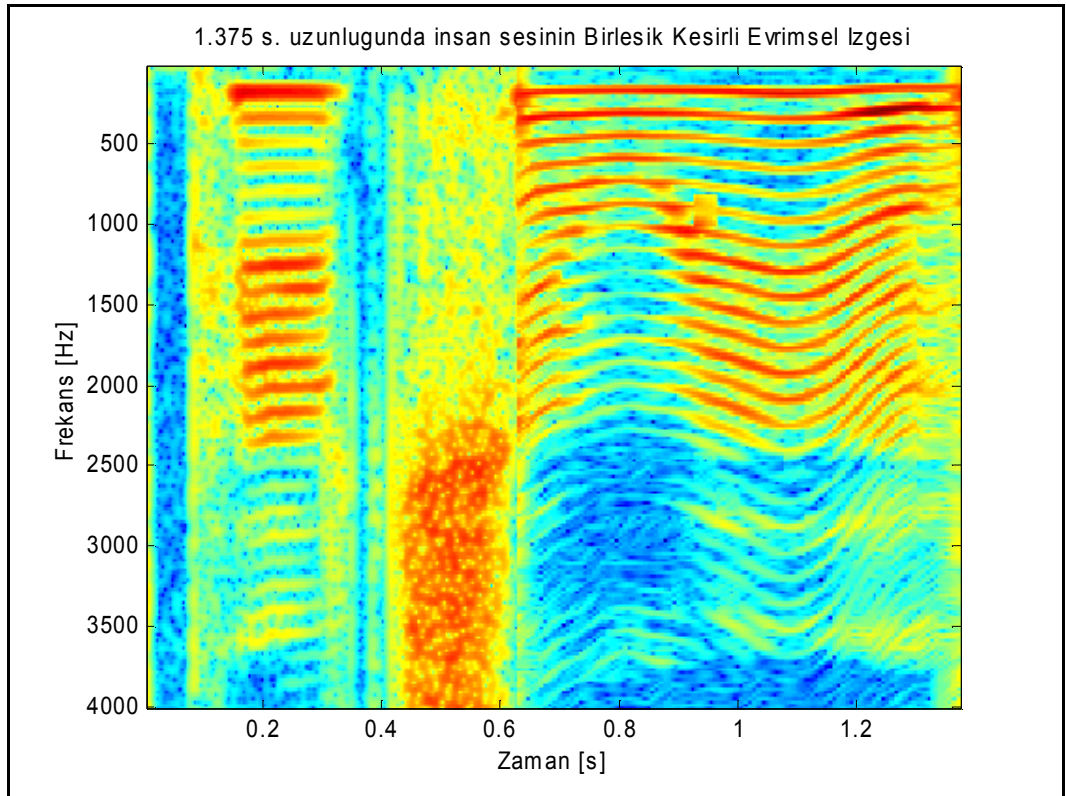
Şekil 3.71 1.375 sn uzunluğunda insan sesi örneği



Şekil 3.72 Bu ses işaretinin sinüsoidal Evrimsel izgesi

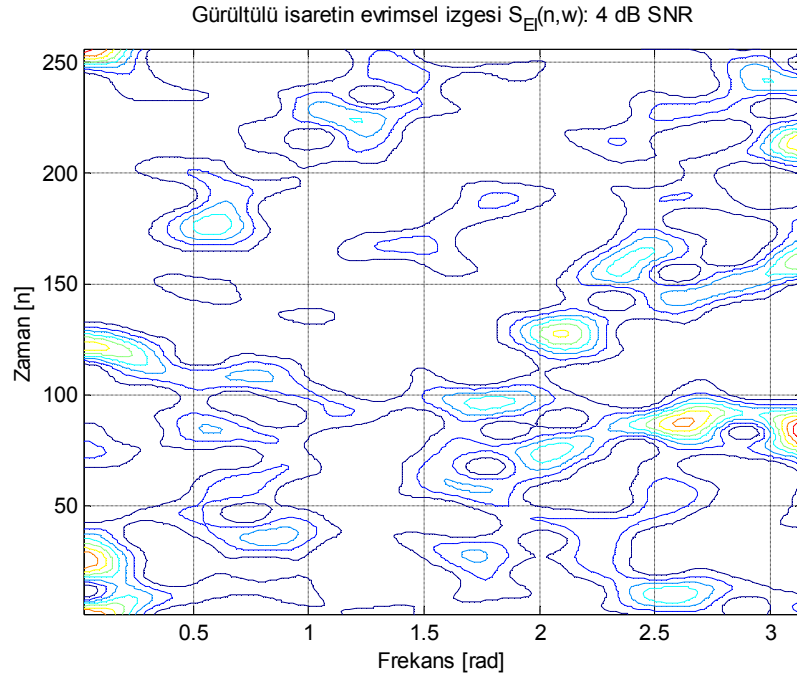


Şekil 3.73 Aynı ses işaretinin Spektrogramı

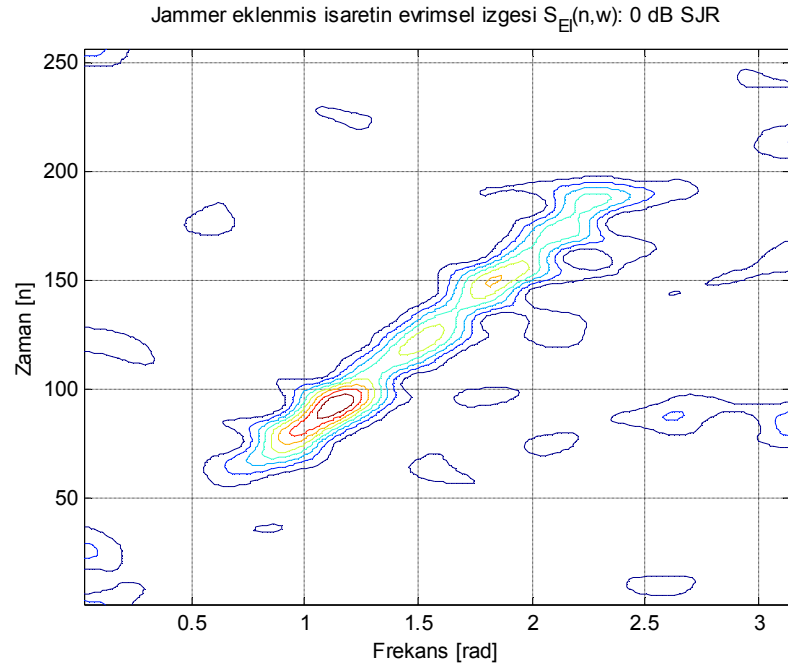


Şekil 3.74 Bu ses işaretinin optimum kesirli evrimsel izgesi

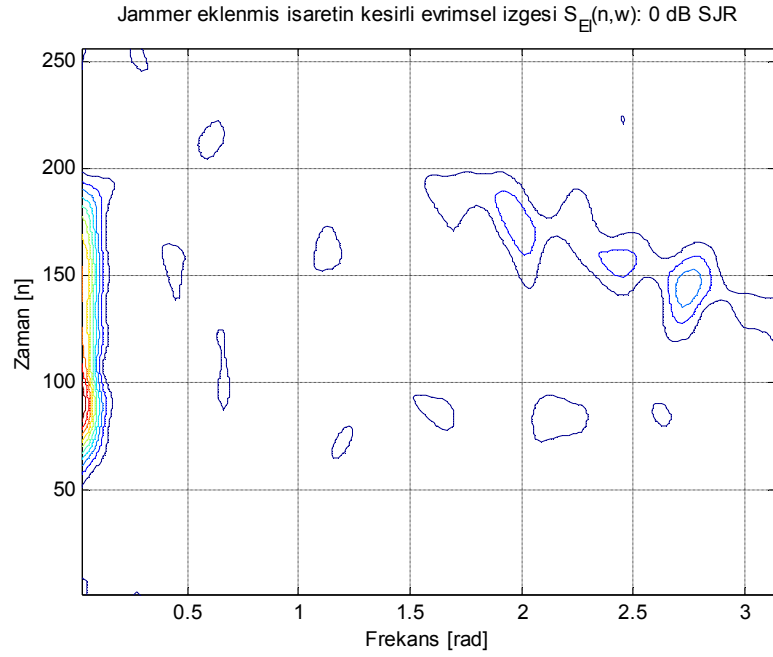
Örnek 14: Bu örnekte 32 bitlik bir veri, her bit 8 bitlik sözde rasgele dizi ile yayılarak yayılı izge iletişimi yapılmaktadır. Daha sonra bu işarete kanal gürültüsünü modellemek üzere toplamsal Gauss beyaz gürültüsü (işaret gürültü oranı, $\text{SNR}=4\text{dB}$) (işaretin evrimsel izgesi Şekil 3.75) ve bozucu giriş olarak çırp bozucu (işaret bozucu oranı, $\text{SJR}=0\text{db}$) eklenmiştir (Şekil 3.76). Alıcıda mesaj bitleri 16 bit hatalı olarak elde edilmiştir (%50 hata). $\alpha=\pi/4$ için Kesirli Gabor analizi ile analiz edilen işareten bozucu giriş (Şekil 3.77), maskelenerek alınmıştır (Şekil 3.78). Böylece alıcıda mesaj bitleri sadece dört bit hatalı olarak elde edilmiştir (%25 hata).



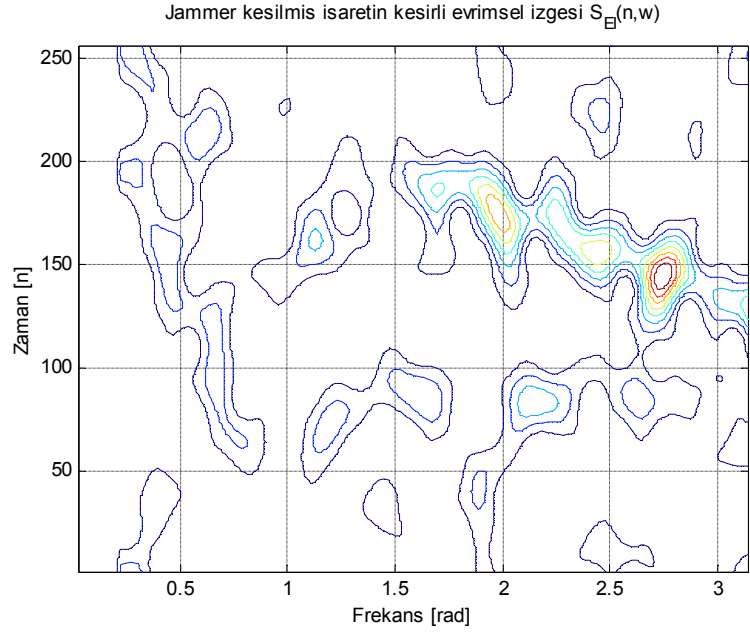
Şekil 3.75 Gürültülü işaretin evrimsel izgesi



Şekil 3.76 Jammer eklenmiş işaretin klasik evrimsel izgesi SJR=0db



Şekil 3.77 Jammer eklenmiş işaretin $\alpha=\pi/4$ için Kesirli Evrimsel izgesi



Şekil 3.78 Jammer'ı kesildikten sonraki kesirli evrimsel izge

IV. TARTIŞMA VE ŞONUÇLAR

Bu çalışmada Gabor işaret gösterimi, sinusoidal çekirdek kullanan klasik açılımdan, kesirli taban fonksiyonları kullanan genel bir açılıma genişletilmiştir. Öncelikle sürekli zamanlı işaretler için Kesirli Gabor Açılımı tanımlanmıştır. Bu açılımın geçerli olabilmesi için, analiz ve sentez taban kümelerine ait tamlık ve diklik koşulları elde edilmiştir.

Daha sonra, sayısal işaretlerin işlenmesinde kullanılabilecek ayrık zamanlı Kesirli bir Gabor açılımı sürekli zamandaki tanımdan örnekleme kullanılarak elde edilmiştir. Bu açılımın tamlık ve diklik koşullarının elde edilmesiyle, Kesirli Gabor açılımı ayrık zamanlı işaretlerin analizinde bilgisayar ortamında hesaplanabilir hale gelmiştir.

Literatürde daha önceki çalışmalarda olduğu gibi Zaman Frekans işaret analizinde temel hedef elde edilecek izgenin yüksek zaman frekans çözünürlüğüne sahip olmasıdır. Dolayısı ile kesirli Gabor açılımından elde edilecek Gabor izgesinin zaman frekans yerleştirilmesini iyileştirmek için, bir ana pencerenin zamanda ölçeklenerek ve kesirli çekirdek ile module edilerek üretilmiş $\{\tilde{h}_{i,m,k,\alpha}(n)\}$ taban fonksiyonları ile, Çok Pencereleli kesirli Gabor Açılımı tanımlanmıştır.

Gabor işaret gösterimi, işaretleri Zaman frekans bölgesinde göstermek için yaygınca kullanılan bir yöntemdir. Ancak $|a_{m,k}|^2$, katsayılarının genlik karesi, öteleme indeksleri bölgesinde olup Zaman Frekans bölgesini tam olarak yansıtmamaktadır. Bu nedenle tez çalışmasının sonunda durağan olmayan işaretlerin zamanla değişen izge kestirimi için Evrimsel İzge kestirimi verilmiştir. Bu izge gösterimi ile, kesirli Gabor açılımının katsayıları arasında bir ilişki kurularak, Evrimsel İzge çekirdeği elde edilmiştir. Evrimsel izge bu zamanla değişen $\{X^\alpha(n, \omega)\}$ çekirdeğinin genlik karesi olarak verilmektedir. Böylece işaret için, hem bir Zaman Frekans gösterimi, hem de bir Zaman

Frekans izgesi aynı anda elde edilmektedir. $\left\{ \frac{|X^\alpha(n, \omega)|^2}{K} \right\}$ evrimsel izgesinin, Zaman

Frekans güç izgesi olarak yorumlanabileceği, sürekli pozitif olması, enerjinin korunumu ve kenar yoğunluklarına yaklaşımları ile mümkün olabilmektedir. Bir çok zaman frekans analiz yöntemi negative değerler alması ve öz bileşenleri arasında çapraz terimler içermesi nedeniyle zaman frekans izgesi olarak yorumlanamamaktadır. Örneğin bir çok Cohen sınıfı zaman frekans dağılımı bu probleme sahiptir. Önerilen çok pencereci kesirli Evrimsel izge yöntemi ile pozitif ve yüksek çözünürlüğe sahip bir zaman frekans izgesi elde edilebilmektedir.

Ancak uygulama sonuçları göstermiştir ki, analizde kullanılan $\{\alpha\}$ kesir derecesi dolayısı ile kullanılan Zaman Frekans örnekleme kafesi herhangi bir sinyal bileşeninin zaman frekans davranışına uyum gösterdiğinde, o bileşenin izgesi daha yüksek çözünürlük ile elde edilebilmektedir. Yani analiz sonucunda elde edilen izge tamamen $\{\alpha\}$ kesir derecesine bağlıdır. Uygun $\{\alpha\}$ değerinin seçilmesi istenen sonucun elde edilmesi için gerekli olmaktadır. Fakat işaret hakkında hiç bir ön bilgiye sahip olmadan, uygun $\{\alpha\}$ değeri kestirimi mümkün değildir. Bu problemin çözümü olarak verilen bir işaret önce klasik Gabor açılımı ile analiz edilerek bileşenler tesbit edilebilir. Daha sonra elde edilen $\{\alpha\}$ değerleri kullanılarak kesirli analiz yapılabilir. Bu tezde ayrıca çok bileşenli işaretler için en uygun α değerlerinin seçilebilmesi konusunda, bir arama yöntemi önerilmiştir. Buna göre işaret çok sayıda $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ değeri ile analiz edilerek bunlar içinden küçük zaman frekans bölgeleri için en uygun α değeri bir optimizasyon kriterinin en iyileştirilmesi ile seçilmektedir. Böylece verilen herhangi bir çok bileşenli işaretin tüm bileşenleri, yüksek zaman frekans çözünürlüğü ile temsil edilebilmekte ve zamanla değişen güç izgesi elde edilebilmektedir.

V. KAYNAKLAR

1. KAYHAN, A. H., (1990): Sayısal İşaret İşleme, İstanbul Teknik Üniversite Matbaası,
2. OPPENHEIM, A. V., (1998): Discrete-Time Signal Processing, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, ISBN: 0-13-216771-9.
3. COHEN, L., (1995): Time-Frequency Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, ISBN: 0-13-594532-1.
4. QIAN, S. and CHEN, D., (1996): Joint Time-Frequency Analysis Methods and Applications, Prentice Hall, New Jersey, ISBN: 0-13-254384-2.
5. PAPANDREOU, A., HLAWATSCH, F., and BOUDREAUX-BARTELS G. F., (December 1993): The hyperbolic class of QTFRs – part I: Constant-Q warping, the hyperbolic paradigm, properties, and members, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. 41, No. 12, pp. 3425-3444.
6. BARANIUK, R. G., (March 1996): Covariant time-frequency representations through unitary equivalence, IEEE Signal Proc. Letters, Vol. 3, No. 3, pp. 79-81.
7. BARANIUK, R. G. and JONES, D. L., (June 1993): Signal-dependent time-frequency analysis using a radially Gaussian kernel, Signal Proc., Vol. 32, No. 2, pp. 263-284.
8. BARANIUK, R. G. and JONES, D. L., (April 1993): A signal-dependent time-frequency representation: Optimal kernel design, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. 41, No. 4, pp. 1589-1602.
9. BARANIUK, R. G. and JONES, D. L., (October 1995): An adaptive optimal kernel time-frequency representation, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. 43, No. 10, pp. 2361-2371.
10. WILLIAMS W. J., and SANG, T., (1994): Adaptive RID kernels which minimize time-frequency uncertainty, Proc. of the IEEE Int. Symp. On Time-Frequency and Time-Scale Analysis, pp. 96-99.
11. AUGER, F., and FLANDRIN, P., (May 1995): Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. 43, No. 5, pp. 1068-1089
12. BOASHASH, B., O'SHEA, P., (January 1994): Polynomial Wigner-Ville Distributions and Their Relationship to Time-Varying Higher Order Spectra, IEEE Trans. on Signal Proc., vol. 42, no. 1, pp. 216-220.

13. STANKOVIC, L., (May 1995): A method for improved distribution concentration in the time-frequency analysis of multicomponent signals using the L-Wigner distribution, *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 43, No. 5, pp.1262-1268.
14. STANKOVIC, L., (July 1994): A multitime definition of the Wigner higher order distribution: L-Wigner distribution, *IEEE Letters in Signal Proc.*, Vol. 1, No. 7, pp. 106-109.
15. STANKOVIC, L., and STANKOVIC, S., (February 1995): An analysis of instantaneous frequency representations using time-frequency distributions – generalized Wigner distribution, *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 43, No. 2, pp. 549-552.
16. FONOLLOSA, J. R., and NIKIAS, C. L., (January 1993): Wigner higher order moment spectra: Definition, properties, computation, and application to transient signal analysis, *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 41, No. 1, pp. 245-266.
17. COHEN, L., and POSCH, T., (January 1985): Positive time-frequency distribution functions, *IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, Vol. 33, No. 1, pp. 31-38.
18. LOUGHLIN, P. J., PITTON, J. W., and Hannaford, B., (1995): Fast approximations to positive time-frequency distributions, with applications, *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, and Signal Proc.*, pp. 1009-1012.
19. SANG, T., WILLIAMS, W. J., and O'NEILL, J. C., (1996): Algorithm for positive time-frequency distributions, *Proc. Of the IEEE Int. Symp. On Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 165-168.
20. BARANIUK, R. G., (1996): Joint distributions of arbitrary variables made easy, *Proc. Of the IEEE DSP Workshop*, pp.394-397.
21. BARANIUK, R. G. And COHEN, L., (January 1995): On joint distributions of arbitrary variables, *IEEE Signal Proc. Letters*, Vol. 2, No. 1, pp. 10-12.
22. HLAWATSCH, F., TWAROCH, T., and BOELCSKEI, (1996): Wigner type a-b and time-frequency analysis based on conjugate operators, *Proc. Of the IEEE Int. Conf. On Acoust., Speech, and Signal Processing*, pp. 1395-1398.
23. LOUGHLIN, P. J., PITTON, J. W., and HANNAFORD, B., (December 1994): Approximating time-frequency density functions via optimal combinations of spectrograms, *IEEE Signal Proc. Letters*, Vol. 1, No. 1, pp. 199-202.
24. HLAWATSCH, F., BOUDREAUX, G. H., (April 1992): Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations, *IEEE Signal Proc. Magazine*, pp. 21-67.

25. WIGNER, E. P., (1932): On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Physical review*, Vol. 40, pp.749-759.
26. [VILLE, J., (1948): *Theorie et applications de la notion de signal analytique*, Cables et Transmission, Vol. 2A, pp. 61-74.
27. FLANDRIN, P., and HLAWATCH, F., (1987): Signal representation geometry and catastrophes in the time-frequency plane, in *Mathematics in Signal Processing*, T. S. D. Et al., editor, pp. 3-14, Clarendon Press, Oxford.
28. HLAWATSCH, F., FLANDRIN, P., (1992): The Interference Structure of the Wigner Distribution and Related Time-Frequency Signal representations, in the *Wigner Distributions theory and Applications in signal Processing*, W. Mecklenbrauker, ed., North Holland Elsevier Science Publishers.
29. COHEN, L., (July 1989): Time-Frequency Distributions –a Review, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 77, No:7.
30. COHEN, L., (1966): Generalized phase-space distribution functions, *J. Math. Phys.*, Vol. 7, pp. 781-786.
31. CHOI, H. I., WILLIAMS, W. J., (June 1989): Improved Time-Frequency Representations of Multi-component Signals Using Exponential Kernels, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Sig. Proc.*, Vol. 37, No. 6, pp. 862-871.
32. JEONG, J., WILLIAMS, W. J., (February 1992): Kernel Design for Reduced Interference Distributions, *IEEE Trans. Sig. Proc.*, Vol. 40, No. 2, pp. 402-412.
33. JEONG, J., WILLIAMS, W. J., (1991): A new formulation of generalized discrete-time time-frequency distributions, *Proc. IEEE ICASSP-91*, pp. 3189-3192.
34. CUNNINGHAM, G. S., WILLIAMS, W. J., (1993): High-resolution signal synthesis for time-frequency distributions, *Proc. IEEE ICASSP-93*, Vol. 4, pp. 400-403.
35. BARANIUK, R. G., JONES, D. L., (June 1993): A radially Gaussian, signal-dependent time-frequency representation: Optimal Kernel Design, *Signal Processing*, Vol. 32, pp. 263-284.
36. BARANIUK, R. G., JONES, D. L., (January 1994): A signal-dependent time-frequency representation, *IEEE Trans. Signal Proc.*, Vol. 41, pp. 1589-1602.
37. LOUGHLIN, P., PITTON, J., ATLAS, L. E., (1994): Construction of Positive Time-Frequency Distributions, *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, Vol. 65, No. 7, pp. 1345-1351.

38. FONOLLOSA, J. R., NIKIAS, C. L., (1994): A New Positive Time-Frequency Distribution, Proc. IEEE ICASSP-94, vol. 4, pp. 301-304.
39. GABOR, D., (1946): Theory of Communication, J.Enst. Elec. Eng., Vol. 93, 429-457.
40. WEXLER, J., RAZ, S., (November 1990): Discrete Gabor Expansions, Signal Proc., Vol. 21, No. 3, pp. 207-220.
41. QIAN, S., CHEN, D., (July 1993): Discrete Gabor Transform, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. 41, No. 7, pp. 2429-2439.
42. FRIEDLANDER, B., PORAT, B., (February 1989): Detection of transient signals by the Gabor representation, IEEE Trans. on ASSP, Vol. 37, No. 2, pp. 169-180.
43. MALLAT, S., ZHANG, Z., (December 1993): Matching pursuit with time-frequency dictionaries, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. 41, No. 12, pp. 3397-3415.
44. BROWN, M., WILLIAMS, W., and Hero, A., (April 1994): Non-orthogonal Gabor representation of biological signals, IEEE Proc. ICASSP-94, Adelaide, Australia, pp. 396-399.
45. BASTIANS, M. J., (1980): Gabor' s Expansion of a Signal into Gaussian Elementary Signals, Proc. IEEE, Vol. 68, No. 4, pp. 538-539.
46. DAUBECHIES, I., JAFFARD, S., and JOURNE, J. L., (March 1991): A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay, SIAM Jour. Math. Anal., Vol. 22, pp. 554-572.
47. QIAN, S., CHEN, K., and LI, S., (May 1992): Optimal biorthogonal functions for finite discrete-time Gabor expansion, Signal Processing, Vol. 27, No. 2, pp. 177-185.
48. MEYER, Y., (1988): Wavelets: Algorithms and applications, Society for industrial and applied mathematics (SIAM), Philadelphia,
49. AHARONI, G., AVERBUNCH, R., COIFMAN, R., ISRALI, M., (1993): Local cosine transform- A method for the reduction of the blocking effect in JPEG, Jour. Math. Imaging Vision, Vol. 3, pp. 7-38.
50. COIFMAN, R. R., WICKERHAUSER, R. V., (1992): Entropy-based algorthims for best basis selection, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. 38, pp. 713-718.
51. WESFREID, E., WICKERHAUSER, M. V., (1993): Adaptive local trigonometric transforms and speech processing, IEEE Trans. Signal Proc., Vol. 41, pp. 3596-3600.

52. MALLAT, S., (1989): Multifrequency channel decompositions of images and wavelets models, IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Proc., Vol. 37, pp. 2091-2110.
53. MALLAT, S., (September 1989): Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$, Trans. of Amer. Math. Soc., Vol. 315, pp. 69-87.
54. DAUBECHIES, I., (September 1990): The Wavelet Transform. Time Frequency Localization and Signal Analysis, IEEE Trans. Info. Th., vol. 36, no.5, pp. 961-1005.
55. DAUBECHIES, I., (November 1988): Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 4, pp. 909-996.
56. DAUBECHIES, I., (1992): Ten lectures on wavelets, Philadelphia: SIAM, 1992.
57. PRISTLEY, M. B. , (1965): Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes, J. Of Royal Statistical Society, B., vol. 27, no. 2, pp204-237.
58. MELARD, G., SCHUTTER, A. H., (January 1989): Contributions to Evolutionary Spectral Theory, J. Time Series Analysis, vol. 10, pp. 41-63.
59. ZADEH, L. A., (March 1950): Frequency Analysis of Variable Networks, Proceeding of the I. R. E., pp. 291-299.
60. HUANG, N. C., AGGARWAL, J. K., (August 1980): On Linear Shift-variant Digital Filters, IEEE Trans. On Circuits and Systems, vol. 27, pp. 672-679.
61. KAYHAN, A.S., EL-JAROUDI, A., and CHAPARRO, L.F., (June 1994): Evolutionary Periodogram for Non-stationary Signals, IEEE Trans. on Signal Proc. vol. 42, no. 6, pp. 1527-1536.
62. AKAN, A., and CHAPARRO, L.F., (December 1997): Multi-Window Gabor Expansion for Evolutionary Spectral Analysis, Signal Processing, vol. 63, pp. 249-262.
63. DETKA, C., LOUGHLIN, P., and EL-JAROUDI, A., (June 1994): On combining evolutionary spectral estimates, IEEE Workshop on Stat. Signal and Array Proc., Qubec City, Canada.
64. GERR, N. L., (March 1998): Introducing a third order Wigner distribution, Proc. IEEE, Vol. 76, No. 3, pp. 290-292.
65. DANDAWATE, A. V., GIANNAKIS, G. B., (March 1991): Ergodicity results for non-stationary signals: cumulants, ambiguity functions and wavelets, in Proc.. 25th Conf. on Information Sciences and Systems, Baltimore, Maryland, USA, pp. 976-983.

66. FONOLLOSA, J. R., and NIKIAS, C. L., (May 1991): Wigner polyspectra: HOS spectra in TV signal processing, in: Proc. Inter. Conf. Acoustic, Speech and Signal Processing (ICASSP), Toronto, Canada, pp. 3085-3088.
67. FONOLLOSA, J. R., and NIKIAS, C. L., (April 1994). Analysis of finite-energy signals using higher-order moments and spectra-based time-frequency distributions, *Signal Processing* 36, pp. 315-328.
68. BOASHASH, B., RISTIC, B., (1998). Polynomial time-frequency distributions and time-varying higher-order spectra: Application to the analysis of multicomponent FM signal and to the treatment of multiplicative noise, *Signal Processing*, Vol. 67, No. 1, pp. 1-23.
69. BOASHASH, B., and O'SHEA, P., (January 1994): Polynomial Wigner-Ville distributions and their relationship to time-varying higher order spectra, *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Vol. 42, No. 1, pp. 216-220.
70. NAMIAS V., (1980): The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics., *J. Inst. Math. Appl.*, Vol. 25, pp. 241-265.
71. MCBRIDE A. C. ,KERR F. H., (1987) On Namias' fractional Fourier transforms, *IMA J. Appl. Math.*, vol. 39, pp. 159-175.
72. ALMEIDA, L. B., (April 1993): An introduction to the angular Fourier Transform, in Proc. 1993 IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing (Minneapolis, MN).
73. SEGER, O., (1993): Model building and restoration with applications in confocal microscopy, Ph.D. Dissertation No. 301, Linköping University, Sweden.
74. CARIOLARO, G., ERSEGHE, T., KRANIAUSKAS, P., LAURENTI, N., (January 2000): Multiplicity of fractional Fourier Transforms and their relationships, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 48, No. 1, pp. 227-
75. ALMEIDA, L. B., (November 1994): The fractional Fourier Transform and time-frequency representations, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, No.11, pp. 3084-3091.
76. DICKINSON, B. W., STEIGLITZ, K., (February 1982): Eigenvectors and functions of the discrete Fourier transform, *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-30, pp. 25-31.
77. MCCLEALLAN, J. H., PARKS, T. W., (March 1972): Eigenvalue and eigenvector decomposition of the discrete Fourier transform, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, Vol. AU-20, pp. 66-74.
78. LANDAU, E., (1927/1950(reprint)): Vorlesungen über Zahlentheorie, Vol. 1, New York: Chelsea, p.164.

79. GOOD, I. J., (1962): Analogues of Poisson's summation formula, Amer. Math. Monthly, Vol. 69, pp. 259-266.
80. LANCASTER, P., (1969): Theory of Matrices, New York: Academic, 1969.
81. CINCOTTI, F. GORI, SANTARSIERO, M. (1992): Generalized Self Fourier Transform, J. Phys., vol 25, pp. 1191-1194
82. DICKINSON, B. W., STEIGLITZ, K., (1980): Eigenvalues of symmetric matrices: System theory conditions for distinctness, IEEE Trans. Automat. Cont., Vol. AC-25, pp.284-285.
83. SANTHANAM, B. W., MCCLEALLAN, J. H., (1995): The DRFT- A rotation in time-frequency space, Proceedings of ICASSP 1995, pp. 921-924.
84. AKAN, A., CHAPARRO, L. F., (May 1996): Evolutionary spectral analysis using a warped Gabor expansion, IEEE ICASSP-96, Atlanta, GA.
85. BULTAN, A., (1999): A Four Parameter Atomic Decomposition of Chirplets, IEEE Trans. On Signal Proc. Vol. 47, pp. 731-745
86. AKAN, A., CHAPARRO, L.F., (1998): Signal-Adaptive Evolutionary Spectral Analysis Using Instantaneous Frequency Estimation," IEEE-SP Proceedings of International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, TFTS'98, pp. 661-664
87. PEI, S.C., YEH, M.H., LUO, T.L., (1999): Fractional Fourier Series Expansion for Finite Signals and Dual Extension to Discrete-Time Fractional Fourier Transform, IEEE Trans. on Signal Proc. Vol. 47, No. 10, pp. 2883—2888
88. ÖZAKTAŞ, H.M., BARSHAN, B., MENDLOVIC, D., ONURAL, L., (1994): Convolution, Filtering and Multiplexing in Fractional Fourier Domains and their Relation to Chirp and Wavelet Transforms, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 11, no. 2, pp. 547-559
89. ÖZAKTAŞ, H.M., ARIKAN, O., KUTAY, M.A., BOZDAĞI, G., (1996): Digital Computation of the Fractional Fourier Transform, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. 44, no. 9, pp. 2141-2150
90. KUTAY, M.A., ÖZAKTAŞ, H.M., ARIKAN, O., AND ONURAL, L.,(1997): Optimal Filtering in Fractional Fourier Domains, IEEE Trans. on Signal Proc. Vol. 45, no. 5, pp. 1129-1142
91. CANDAN Ç., KUTAY, M.A., AND ÖZAKTAŞ, (1999): The Discrete Fractional Fourier Transform, IEEE Proc. ICASSP-99, pp. 1713-1716
92. BASTIANS, M.J., van LEEST, A.J., (1998): From the Rectangular to the Quincunx Gabor Lattica via Fractional Fourier Transform, IEEE Signal Proc., Vol.5, no. 8, pp. 203-205

93. QIAN, S. and CHEN, D., (1996): Joint Time-Frequency Analysis Methods and Applications, Prentice Hall, New Jersey, ISBN: 0-13-254384-2.
94. S. KAYHAN, A. EL-JAROUDI, AND L. F. CHAPARRO, (1995): Data-Adaptive Evolutionary Spectral Estimation, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. 43, No. 1, pp. 204-213
95. S.I. SHAH, L. F. CHAPARRO, AND A. S. KAYHAN, (1994): Evolutionary Maximum Entropy Spectral Analysis, IEEE Proc. ICASSP-94, Vol. IV, pp 285-288
96. D.L. JONES, AND T.W. PARKS, (1990): A High Resolution Data-Adaptive Time-Frequency Representation, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. 38, No. 12, pp. 2127-2135
97. D.L. JONES, AND R.G. BARANIUK, (1994): A Simple Scheme For Adapting Time-Frequency Representations, IEEE Trans. On Signal Proc., Vol. 42, No. 12, pp. 3530-3535

VI. ÖZGEÇMİŞ

Yalçın ÇEKİÇ 2 Ocak 1971'de İstanbul'da dünyaya gelmiştir. İlk, orta ve lise öğrenimini sırası ile Sultanahmet ilkokulu, Mahmutpaşa Ortaokulu, Maçka Teknik Lisesi Elektronik Bölümü'nde İstanbulda tamamladıktan sonra 1989 yılında İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektronik Mühendisliği Bölümünde lisans eğitimine başlamıştır. Bu bölümden 1993 yılında mezun olmuş ve Elektronik Mühendisi ünvanı almıştır. Mezun olduğu yıl İstanbul Üniversitesinin Fen Bilimleri Enstitüsü'nün Elektronik Programında Yüksek Lisans eğitimine başlamış ve Ağustos 1996'de tamamlamıştır. Yüksek Lisans tezinde Bilgisayar ile kontrol konusunda çalışmıştır.

1994 yılında İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Elektrik Makinaları Anabilim Dalına Araştırma Görevlisi olarak atanmıştır. 2000 yılında buradaki görevinden ayrılmış ve Bahçeşehir Üniversitesi Mühendislik Fakültesinde Öğretim Görevlisi olarak göreve başlamıştır.

Mart 1996'da İstanbul Üniversitesinin Fen Bilimleri Enstitüsü'nün Elektronik Programında Doktora eğitimine başlamıştır.

Ar. Gör. Yalçın ÇEKİÇ, İ.Ü. Araştırma Fonu tarafından desteklenen dört adet öncelikli projede yardımcı araştırmacı olarak görev almış ve tamamlamıştır. Araştırmaları üzerine yazmış olduğu çeşitli bildiri ve makaleler yurtiçi ve yurtdışında yayınlanmıştır. Yalçın ÇEKİÇ 1996'den itibaren Institute of Electrical and Electronics Engineering (IEEE), IEEE Signal Processing kolu ve Elektrik Mühendisliği Odası üyesidir.